

Eduardo Bologna

Métodos Estadísticos de Investigación

00026157



 Editorial Brujas



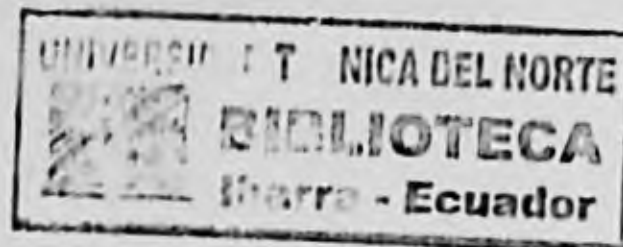
Eduardo León Bologna es Licenciado en Psicología y Doctor en Demografía por la Universidad Nacional de Córdoba, y Doctor en Ciencias Sociales por la Universidad de París 5. Desde 1997, trabaja en investigación sobre migraciones internacionales en el cono sur de América Latina, en perspectiva socio-demográfica. En docencia, se ocupa de cursos metodología cuantitativa en carreras de grado y posgrado de Ciencias Sociales y de la Salud, y de migraciones en el Doctorado en Demografía de la Universidad Nacional de Córdoba.

Integra la cátedra de Psicoestadística en la Licenciatura en Psicología de la Universidad Nacional de Córdoba desde el año 2009. Actualmente dirige la Especialización en Producción y Análisis de Información para Políticas Públicas en el CEA - FCS - UNC y, en la misma institución, el programa Población, Desigualdad y Políticas Públicas.

310
.B65
Mét
2018

Métodos Estadísticos de Investigación

<Apéndice Estadístico>
<Estadísticas>



Eduardo Bologna

Métodos Estadísticos de Investigación

UNIVERSIDAD TÉCNICA DEL NORTE	
BIBLIOTECA	
Vía de adquisición:	Compra
Documento N°:	006-A-2018
Fecha:	17/04/2018
Valor unitario:	49,00
Código de Barras:	059300
Anexo:	

 Editorial Brujas

Título: *Métodos estadísticos de investigación*

Autores: *Eduardo Bologna*

Docentes - investigadores que colaboraron en esta edición

Dra. Ana Eugenia Faas

Dr. Leonardo Medrano

Mg. María Cristina Gonzalez de Menne

Dra. María Marta Morales

Dra. Cecilia Reyna

Lic. Ing. Waldino Romero

Dr. Andrés Ignacio Urrutia

Lic. Marcelo Vaiman

Bologna, Eduardo

Métodos estadísticos de investigación / Eduardo Bologna. - 1a ed. - Córdoba :
Brujas, 2018.

354 p. ; 25 x 18 cm.

ISBN 978-987-760-114-5

1. Análisis Estadístico. 2. Estadísticas. I. Título.
CDD 310

© Eduardo Bologna

© Editorial Brujas

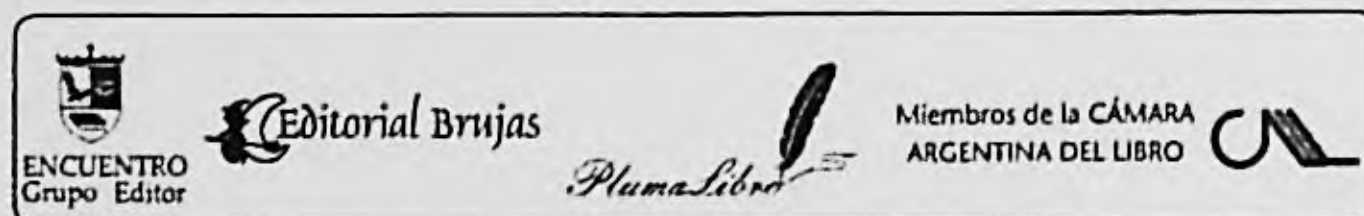
1° Edición 2018.

Impreso en Argentina

ISBN: 978-987-760-114-5

Queda hecho el depósito que marca la ley 11.723.

Ninguna parte de esta publicación, incluido el diseño de tapa, puede ser reproducida, almacenada o transmitida por ningún medio, ya sea electrónico, químico, mecánico, óptico, de grabación o por fotocopia sin autorización previa.



www.editorialbrujas.com.ar publicaciones@editorialbrujas.com.ar

Tel/fax: (0351) 4606044 / 4691616– Pasaje España 1486 Córdoba–Argentina.

Contenidos

Contenidos	5
Presentación.....	9
Parte I: Estadística Descriptiva	15
Capítulo 1 Los datos estadísticos	17
La selección de la información pertinente	18
Los individuos	22
Las variables	22
Las categorías	23
Los símbolos numéricos	25
La medición	26
Niveles de medición	27
Resumen de los niveles de medición	35
Capítulo 2 Distribuciones de frecuencia.....	37
Tablas de distribución de frecuencia	37
Recategorización	41
Variable discreta con muchas categorías.....	42
Variable continua	42
La presentación gráfica de los resultados	43
Resumen de definiciones	50
Capítulo 3 La expresión resumida de la información	51
Medidas de posición	51
Medidas de centralidad.....	51
Medidas no centrales.....	62
Obtención informática de las medidas de posición.....	65
La forma de la distribución	66
Asimetría	67
Curtosis	69
Box-plots	69
Medidas de dispersión	73
Medidas de dispersión basadas en la media	74
Obtención informática de medidas de dispersión.....	79
Medida de la dispersión cuando no hay distancias	80
El individuo en relación a su grupo	82
Resumen de medidas descriptivas	88
Capítulo 4 Relación entre variables: los fundamentos	89
Tablas de contingencia	92
Frecuencias relativas	94
Una clasificación en referencia al tiempo	95
La dirección de la relación	97
Concepto de riesgo relativo	99
La intensidad	101
El concepto de independencia estadística	108
Capítulo 5 Relación entre variables: el análisis	113
Variables nominales con más de dos categorías cada una	113
La distancia entre frecuencias esperadas y observadas.....	113
Variables de nivel ordinal	120
Nivel intervalar o proporcional	125
Dicotomías reales y artificiales	136

Niveles de medición combinados	137
Una variable dicotómica real y una proporcional	137
Una variable continua dicotomizada y una proporcional	139
Resumen de coeficientes de asociación	140
La forma de la relación	141
Ordenada al origen	142
Pendiente	143
Obtención de la recta de regresión	144
Parte II: De la descripción a la inferencia.....	153
Capítulo 6 Obtención de la muestra.....	155
Población	155
Muestra	157
Muestreos probabilísticos	158
Muestreo irrestricto aleatorio o aleatorio simple	158
Muestreo sistemático	159
Muestreo estratificado	160
Muestreo por conglomerados	164
Uso combinado de técnicas de muestreo	165
Muestreos no probabilísticos	166
Muestreo por cuotas	167
Muestreo de juicio o intencional.....	167
Muestreo autoelegido.....	168
Muestreo accidental o según disponibilidad	169
Muestreo bola de nieve	170
Resumen de técnicas de muestreo	171
Capítulo 7 Probabilidad: los fundamentos	173
El rol de la probabilidad en Estadística	173
Formas para asignar probabilidades	174
Asignación a priori	174
Asignación a posteriori	177
La relación entre asignación a priori y a posteriori.....	178
Operando con probabilidades	180
Con probabilidades frecuenciales.....	180
Con probabilidades a priori.....	186
El teorema de Bayes	188
Variables aleatorias	193
Capítulo 8 Probabilidad: los modelos	197
Concepto de modelización	197
Distribución binomial	198
Esperanza y varianza.....	202
Distribución normal	203
Usos de la distribución normal	209
La idea de grados de libertad	213
La distribución ji cuadrado (χ^2)	215
La distribución t de Student	218
La distribución F	221
Capítulo 9 Distribuciones en el muestreo	225
Parámetros y estimadores	225
Características de los estimadores	229

Inssegabilidad	229
Consistencia	229
Eficiencia	230
Distribución de la media muestral	232
Distribución de la proporción muestral	240
Muestras pequeñas	247
Distribución de la varianza	248
Distribución del cociente de varianzas	249
Resumen de la relación entre estimadores y parámetros	250
Parte III: Estadística inferencial.....	251
Capítulo 10 Estimación por intervalo	253
Estimación puntual	253
Intervalos de confianza	253
Estimación de la media.....	254
Estimación de la proporción	259
La calidad de las estimaciones por intervalo	263
El error de estimación en la media	264
El error de estimación en la proporción	265
Capítulo 11 Prueba de hipótesis: la lógica.....	269
El razonamiento de la prueba de hipótesis	269
Prueba sobre la media	273
La toma de decisión.....	274
Pruebas unilaterales.....	281
Prueba sobre la proporción	287
Tipos de error en las pruebas de hipótesis	293
Curva de potencia	300
Significación estadística y valor p	302
Muestras pequeñas y pruebas t	305
Resumen de pruebas sobre una muestra	308
Capítulo 12 Prueba de hipótesis: las aplicaciones.....	309
Muestras independientes	311
Prueba de diferencia de medias.....	311
Prueba de diferencia de proporciones.....	321
Muestras apareadas	323
Coeficiente r de Pearson	327
Capítulo 13 Cuando los supuestos no se cumplen.....	333
Las pruebas χ^2 cuadrado (o χ cuadrado)	334
Prueba de independencia de atributos	334
Pruebas de bondad de ajuste	338
Prueba de la mediana	340
Coeficiente r_s de Spearman	342
Alternativas no paramétricas a las pruebas t	343
Muestras independientes.....	343
Muestras relacionadas.....	344
Apéndice: Tamaño del efecto	345
Significación estadística y significación práctica	345
Medidas de tamaño del efecto	345
Prueba t para diferencia de medias	346
Análisis de la varianza	346

Correlaciones	346
Regresión lineal.....	346
Pruebas χ^2	346
Análisis de la potencia	347
Relación efecto, muestra, potencia y significación	348
Referencias bibliográficas.....	351

Presentación

Este manual es una nueva edición reordenada, corregida y ampliada de nuestro trabajo anterior *Estadística para Psicología y Educación*. Los ajustes se originan en la experiencia acumulada luego de siete años de uso en primer año de la carrera de Psicología, y también con estudiantes de grado y posgrado de otras Ciencias Sociales. Los cambios de orden y las correcciones mejoran aspectos didácticos, vuelven más consistente la secuencia de contenidos, lo que es necesario en una materia en la que cada tema se construye sobre el anterior.

Se han reemplazado en gran medida las capturas estáticas de pantalla con indicaciones de uso de Infostat®, por videos que muestran los comandos en tiempo real.

Las ampliaciones incluyen algunos coeficientes de correlación, procedimientos no paramétricos, distribuciones en el muestreo para la varianza y el cociente de varianzas y más precisiones sobre la lógica de la prueba de diferencia de medias. Se ha incluido un apéndice sobre la relación entre el tamaño muestral, el tamaño del efecto y las probabilidades de cometer errores de tipo I y II en la aplicación de la prueba de hipótesis. Es un contenido valioso para el diseño de investigaciones empíricas.

Los temas se presentan a partir de nociones básicas, para ilustrar la continuidad que hay entre las formas corrientes de razonar y su formalización. Se pone el acento en cuatro aspectos del uso de las técnicas: i) la comprensión del razonamiento que las sostiene, ii) los supuestos que autorizan su uso, iii) el modo de solicitarlas a un software determinado y iv) la lectura e interpretación de los resultados. Al final del curso, se espera que los destinatarios de este manual puedan decidir ante qué interrogantes corresponde aplicar cada procedimiento, bajo qué condiciones se puede apelar a él, cómo hacer que un paquete estadístico realice las rutinas de cálculo y cómo se lee el resultado. Así es como se usa la estadística en el desempeño profesional o en investigación.

Las fórmulas se consideran como una manera compacta de expresar relaciones entre conceptos y su uso para el cálculo está limitado, debido a que en la actualidad, las operaciones matemáticas se solicitan a paquetes informáticos especializados. Cada técnica que se describe tiene un fundamento teórico cuyo contenido matemático excede el interés de la mayoría de los destinatarios de este manual. Sin embargo, para interpretar adecuadamente un resultado o para decidir si determinada técnica puede aplicarse, es necesario conocer esos fundamentos; hemos intentado presentarlos apelando en la menor medida posible a conocimientos matemáticos previos y usando un mínimo de formalización.

Las aplicaciones informáticas se realizan usando InfoStat®, (Di Rienzo et al., 2013) un conjunto de rutinas informáticas para manejar datos y realizar operaciones matemáticas rápidamente y de manera automatizada. Existe una versión estudiantil sin costo en www.infostat.com.ar. El manual de este programa (Balzarini et al., 2008) ayuda en operaciones de mayor grado de complejidad que las presentadas aquí.

En el texto se hacen algunas referencias a R, que es un lenguaje de programación libre diseñado para cálculos estadísticos y visualización de datos. Tiene amplia difusión en el análisis de datos, tanto por su carácter abierto y en constante desarrollo, como por la posibilidad de instalar diversos “paquetes” que contienen rutinas específicas para determinadas operaciones estadísticas. Por ejemplo, el

paquete “psych” (Revelle, 2017) suele definirse como “una caja de herramientas para investigación en Personalidad, Psicometría y Psicología Experimental”. Existen interfaces gráficas (GUI) que permiten que una gran parte de los paquetes de R, aunque no todos, puedan usarse con formato de “ventanas”. Se asemeja así la apariencia y el modo de operación de Infostat y de otros paquetes de análisis de datos, como SPSS. Dos de estas interfaces son RCommander (Fox & Bouchet-Valat, 2018, Fox, 2017) y Deducer (Fellows, 2012).

El manual está organizado en tres partes que articulan los dos conjuntos de procedimientos por medio de los cuales la Estadística aporta a la construcción de conocimiento: el resumen de un conjunto grande de información y la extensión de las conclusiones que se observan en ciertos sujetos, a otros sujetos que no han sido observados. Estos dos conjuntos se denominan estadística descriptiva y estadística inferencial respectivamente. Las partes I y III de este manual corresponden a cada uno de ellos, mientras que la parte II es de transición, entre la certeza de la descripción de datos observados y la incertidumbre que acompaña a la generalización. Porque está pensado como manual, el índice tiene un alto nivel de desagregación, a fin de facilitar las búsquedas de temas. Las instrucciones para que Infostat® ejecute los procedimientos que se tratan en el texto están en videos. A continuación se ofrecen las coordenadas de cada uno de ellos, en orden alfabético para facilitar la búsqueda. Los códigos QR pueden escanearse desde el teléfono con alguna de las aplicaciones disponibles, para una referencia rápida durante la lectura.

categorización		https://fyoutu.be/OnxDeb-6BSk
cobertura intervalos		https://youtu.be/2VT1P3Ybl8Q
descriptivos primera parte		https://youtu.be/MBhDAQbANEU
descriptivos segunda parte		https://youtu.be/tP-TlsRnnDU
estimación P con infostat		https://youtu.be/DSPTq-uFS5Q

intervalo de confianza



https://youtu.be/_FnMhwuD6g0

ji cuadrado



<https://youtu.be/VRnqoDJJKZY>

límites para la estimación
de P



<https://youtu.be/99gVFO9U3Qo>

prueba Mann-Whitney y
Wilcoxon



<https://youtu.be/tOzxjGAlQhI>

prueba t dos muestras
independientes



https://youtu.be/OECcefHUu_s

prueba t muestras
apareadas



<https://youtu.be/eHbg9yVfyD0>

prueba t una muestra



<https://youtu.be/MfJKS0h-oFA>

regresión



<https://youtu.be/yoh5pFI5pqs>

tamaño del efecto, muestra
potencia y significación



https://youtu.be/vuTVfl1_8rw

Introducción

La Estadística provee herramientas para trabajar con una forma de hacer investigación: el enfoque cuantitativo. No es el único enfoque que sirve para construir conocimiento validado y tampoco es incompatible con otras maneras de tratar de conocer el mundo. Toda disciplina científica debe superar las creencias de “sentido común”, esta ilusión de conocer, pero especialmente importante es eliminar los prejuicios en el campo de las ciencias que tratan con sujetos humanos, porque es allí donde más abundan. Expresiones como “Esta persona es así porque de chico no lo tenían en cuenta”, “No está dotado para la matemática”, “Los sueños anuncian lo que va a pasar”; “Las mujeres tienen más sensibilidad que los hombres”, son en general, falsas, provienen de creencias, de tradiciones, de voces populares transmitidas de una generación a la siguiente. La Estadística aporta a la investigación y con ella al descubrimiento de relaciones entre hechos, y a fundamentar esos descubrimientos. Lo hace con una mirada aguda y acotada, una mirada, que no aspira a ofrecer un conocimiento sobre alguna totalidad, sino sobre aspectos parciales del mundo que nos rodea. En esa limitación yace su fortaleza para poner en crisis la ilusión de conocer, en particular en un terreno en el que lo que observamos nos atañe de manera muy próxima, y no es raro confundir “lo que sucede” con lo que creemos, opinamos o suponemos sobre ello.

La presencia de Estadística en carreras de Ciencias Sociales, Humanas y de la Salud se justifica porque a menudo la investigación empírica usa información proveniente de colectivos, y se dispone de datos (propios o generados por terceros) que requieren que se los resuma para poder interpretarlos, ambas operaciones —resumir y generalizar—, requieren de la Estadística.

En segundo lugar, quienes se dediquen al ejercicio profesional aplicarán técnicas de intervención en sus distintos campos de especialización, y estas técnicas están basadas en la teoría y en el estado del conocimiento en un momento dado. Así como luego de un tiempo de haber usado una droga puede descubrirse que no produce los efectos deseados, también vale esto para cualquier intervención profesional: una terapia, una estrategia didáctica, una política pública. Cuando repetimos que el conocimiento científico es revisable, queremos decir que en cualquier momento puede hallarse nueva evidencia que contradiga las convicciones que tenemos hoy. Por cierto, no se trata de cualquier evidencia, sino de la que proviene de procedimientos cuidadosos de observación, registro, comparación, medición y análisis; en pocas palabras, de la investigación. Lo que sabemos y lo que aprendamos para desempeñarnos como profesionales es el conocimiento de que se dispone en este momento, y que está en continua reelaboración a través de la investigación. Una vez que quienes hoy están estudiando en la universidad terminen sus carreras y trabajen como profesionales, asistirán a cambios en el modo de intervenir, los psicólogos encontrarán nuevos enfoques terapéuticos, nuevas formas de tratar con grupos, los educadores nuevas estrategias didácticas. Eso no se aprenderá en la Facultad, se aprenderá luego, manteniéndose actualizado, leyendo revistas científicas, asistiendo a congresos; en fin enterándose de cómo cambia el conocimiento y se revisan los saberes a partir de los resultados de la investigación. Y la investigación usa la estadística muy a menudo. Si no se puede leer un artículo científico porque no se entiende lo que dicen las cifras, solo se podrá tener una idea general del resultado, más grave aún; puede que decidamos que solo vamos

a leer la información que no contenga cifras, con lo cual accederemos a una pequeña parte de lo que se publica.

Esa limitación puede ser peligrosa: si no se entiende cómo se obtuvieron determinados resultados, no se los puede cuestionar, dudar de ellos, discutir procedimientos, porque parecerán ajenos.

En disciplinas como Psicología, Psicopedagogía, Educación debemos agregar que el uso de técnicas estadísticas es necesario en la construcción, validación e interpretación de los resultados de las pruebas psicométricas: tests de inteligencia, de desarrollo. Otro tanto sucede con escalas de actitudes, de preferencias, de opinión, de uso frecuente en Ciencia Política y Sociología.

Por último, y aunque no parezca obvio, la Estadística nos sirve en la vida diaria. El ejercicio de nuestros derechos ciudadanos necesita que podamos darnos cuenta de lo que nos dicen las mediciones de audiencia, las consultoras políticas, los laboratorios de medicamentos, los indicadores nutricionales de lo que comemos, las estadísticas oficiales (tasa de desempleo, pobreza, inflación), entre otras fuentes de información. ¿A quiénes consultaron para decidir que un programa de televisión se levanta y otro se sostiene? ¿Cómo se hacen las encuestas que indican quién va a ganar las elecciones? ¿Qué implica que una técnica anticonceptiva sea eficaz en el 99% de los casos? Somos nosotros los que vemos la programación que se ofrece, somos nosotros los afectados por los resultados de una elección de autoridades, somos nosotros los que consumimos. Mucha de esa información usa estadísticas y hay parte del vocabulario que no es comprensible para todos pero que, por habernos habituado a escuchar, creemos conocer, ya que las palabras nos suenan familiares: el promedio, un porcentaje, que una diferencia sea significativa. Cada una de esas expresiones tiene un significado preciso; si no lo conocemos no podemos cuestionar las decisiones.

Que no lo conozcamos, que muchos prefieran no conocerlo y que haya quienes operan para que la Matemática —y por extensión la Estadística—, sean de difícil acceso a los estudiantes, no es por azar, es funcional a un modo de producción que requiere que en su mayoría, los ciudadanos puedan ser silenciados con argumentos que usan terminología críptica. Por esto, nuestra aspiración no se limita a transmitir un conjunto de técnicas de análisis de datos, sino a proveer herramientas que ayuden a mirar al mundo desde una posición más informada, y esperamos que eso implique también una posición más crítica y hasta quizás transformadora, que pueda poner en duda certezas establecidas.

Parte I: Estadística Descriptiva

Debido a que la Estadística no trabaja con individuos aislados sino con conjuntos de ellos, siempre es necesario resumir la información, para presentarla de manera accesible a la lectura y para extraer significado.

Una gran tabla proveniente de registros hospitalarios que muestre las edades de madres primerizas no puede leerse de manera directa; es necesario buscar indicadores de síntesis, uno de ellos, muy difundido, es el promedio, un resumen de la información podría decir: "En este hospital se atendieron durante el año 2017, 350 partos. Las madres tuvieron edades entre los 17 y los 45 años, con una edad promedio de 21".

Sucede del mismo modo al observar los puntajes de una prueba de memoria aplicada a muchas personas. O también si se sabe de cada alumno de una escuela si repite o no el curso. En esos casos podemos resumir esa información indicando el promedio (con las limitaciones que esta medida tiene). También es posible indicar cuántas personas tienen un valor menor a cierta cifra o mayor a otra: ¿cuántas de las madres primerizas son menores de 20 años?, ¿repiten de grado con igual frecuencia los varones que las mujeres? O bien expresar los valores a través de gráficos, que suelen aportar mucha información de manera abreviada (aunque también pueden ser engañosos).

Si de cada alumno de una escuela se conoce si repite el curso o no, la información agregada puede sintetizarse con la tasa de repitencia a nivel de la escuela, y expresar el resultado como: "en esta escuela uno de cada quince alumnos está repitiendo el curso". Identificar un trending topic requiere observar una gran cantidad de tweets para detectar las repeticiones y las tendencias.

Entonces, la Estadística Descriptiva provee de una serie de procedimientos dirigidos a resumir, a sintetizar información, a volverla manejable para poder interpretarla y extraer conclusiones a partir del conjunto de datos que, de otra manera, serían ininteligibles.

Capítulo 1 Los datos estadísticos

En este capítulo se desarrollan procedimientos para presentar la información de manera accesible para que pueda ser analizada y luego interpretada. Para poder extraer significado de los datos recogidos es necesario primero dedicar un esfuerzo a organizarlos, a presentarlos de manera comprensible, una operación previa a la aplicación de las técnicas de análisis que se verán más adelante.

La ciencia se interesa por la producción de conocimiento validado, uno de cuyos requisitos es que pueda ser comunicado de manera inequívoca, que se confronten las conclusiones a que llegan y los métodos que usan diferentes investigadores. Esto implica la necesidad de usar un lenguaje que permita el intercambio entre investigadores y que dependa, en el menor grado posible, de las impresiones subjetivas o de las interpretaciones que cada investigador individual dé a los conceptos. Se busca un vocabulario tan unívoco como sea posible. Un modo de acercarse a lograr esta comunicabilidad de las ideas, de los métodos y de los resultados, es definir, de la manera más precisa posible, los elementos acerca de los que se habla.

Alguna vez hemos dado con expresiones como "esta persona es más inteligente que aquella". ¿Qué se quiere decir exactamente con eso?, la afirmación podría provenir de algún evento en que se vio a esa persona actuando de manera que llamaríamos inteligente, aunque esto también puede confundirse con astucia: no es infrecuente usar el adjetivo inteligente para un estafador, alguien a quien le resulta fácil engañar a otros; y, a la inversa, sería poco inteligente quien se deja engañar con facilidad. O bien, a menudo decimos que alguien es inteligente porque obtiene buenos resultados en sus estudios. Esto es parte de la imprecisión en la definición de un concepto. Si se dispone de una definición de inteligencia, se puede saber cuándo aplicar esa idea a alguien, cuándo una conducta es inteligente, inclusive, cómo ayudar a desarrollar la inteligencia. Si se puede definir el concepto con el que se trabaja, se pueden indicar ciertas operaciones a realizar para evaluarlo y así conocer cuál es el nivel de inteligencia de un sujeto en particular.

Luego de definir el concepto con el que se trabaja, se requiere diseñar un instrumento que refleje esa definición y finalmente aplicar este instrumento a las personas que se evaluarán. Al hacer esto último se obtiene un resultado que, si se expresa de manera cuantitativa, permite hacer comparaciones *del aspecto que representa ese concepto*, entre personas, entre grupos, etc.

¿Pueden compararse personas? La respuesta es no, porque cada persona tiene una infinidad de aspectos que la caracterizan y la hacen única. Por el contrario lo que sí pueden compararse son características claramente definidas de las personas. Del mismo modo no se pueden comparar escuelas, ni hogares, ni países si no se especifica en qué aspecto se realiza la comparación. O dicho de otro modo, cuál es la característica que se compara, y cómo se mide esa característica.

Podemos decir que una persona tiene más escolarización formal que otra, indicando con eso que ha aprobado más años de la escuela o de la universidad. Podemos decir que un hogar es diferente a otro si uno se compone de una pareja sola y el otro incluye tres hijos. Un país puede tener más habitantes, un régimen político diferente, o mayor libertad de expresión que otro. En todos los casos

especificamos una característica (un rasgo o un estado), sobre la base del cual hacemos la comparación.

La selección de la información pertinente

Cuando se ha decidido quienes son los sujetos de la observación; es decir, una vez que se sabe a quiénes se observará, deben elegirse ciertas características de esos sujetos para observar¹. Cada unidad que resulta de interés para la investigación tiene un conjunto muy grande de características observables y siempre se realiza una selección de esas características. Se trata de un recorte que permite comprender mejor ciertos aspectos, dejando de lado otros. La información que seleccionamos para observar se denomina *pertinente* para la investigación.

Cuando se decide cuál es la información pertinente, se la puede recabar de varios individuos y cambiar la óptica desde el caso particular a la regularidad colectiva. Es un cambio desde el individuo hacia el grupo. La siguiente es una lista que indica el área en que les gustaría trabajar cuando se reciban, a nueve estudiantes de primer año de Psicología:

Alumno	¿En qué área de la Psicología le gustaría trabajar cuando se reciba?
Susana	Clinica
Marcos	Laboral
Daniel	Clinica
Federico	Social
María	Clinica
Pedro	Educacional
Eugenia	Clinica
Mabel	Educacional
Francisco	Laboral

La lista los individualiza, los reconoce por su nombre, indica qué área le gustaría a cada uno y solo eso, no se sabe la edad de cada uno, ni sus intereses políticos ni el deporte favorito, solo se seleccionó como pertinente para este ejemplo, el área en que le gustaría trabajar. Si ahora se transforma esa lista en una tabla:

Área preferida	Cantidad de alumnos
Clinica	4
Laboral	2
Social	1
Educacional	2

Se lee que Clínica es un área preferida por cuatro alumnos, Laboral y Educacional por dos y a Social solo la menciona uno. Las personas desaparecieron, ya no hay nombres, hemos abstraído para referirnos al *área preferida*, no a los alumnos. En la tabla se ve que lo más frecuente es que se prefiera Clínica, y que Social es poco frecuente. Se pasó de la lista de individuos a

¹ La palabra observar aquí se utiliza en un sentido general, puede tratarse de una observación directa como la que se realiza al mirar (o filmar) un comportamiento, o bien de la presentación de preguntas que alguien debe responder.

la tabla de valores. Nos despegamos de los casos a fin de buscar la regularidad en el conjunto. Más adelante diremos que se ha pasado de la *matriz de datos* a la *distribución de frecuencias*, que constituye una reducción o un primer resumen de la información disponible.

Consideremos el siguiente cuestionario, aplicado a un conjunto de estudiantes universitarios de las licenciaturas en Psicología, Educación y Psicopedagogía de distintas universidades de la ciudad de Córdoba. Los dos últimos ítems provienen de Lounsbury, Park, Sundstrom, Williamson, & Pemberton (2004) quienes examinan la satisfacción académica utilizando sólo dos ítems: 1) "siento que estoy en una carrera que me va a permitir ser alguien en la vida", y 2) "estoy muy satisfecho con el modo en que he progresado en mi carrera".

Número de cuestionario.....

P1. Sexo	1. Masculino 2. Femenino 3. Otro 4. Prefiere no responder	P2. Carrera que cursa	1. Psicología 2. Educación 3. Psicopedagogia
P3. Universidad	1. Nacional de Córdoba 2. Provincial de Córdoba 3. Católica de Córdoba 4. Siglo 21 5. Blas Pascal	P4. ¿Cuántos años cumplidos tiene?	P5. ¿Cuántas materias tiene aprobadas actualmente?
		P6. ¿En qué año ingresó a esta carrera?	

Por favor indique su grado de acuerdo con cada una de las dos afirmaciones siguientes encerrando con un círculo el número que corresponde a la opción elegida:

P7. Siento que estoy en una carrera que me va a permitir ser alguien en la vida.
Completamente en desacuerdo En desacuerdo No sabe De acuerdo Completamente de acuerdo
1 2 3 4 5
P8. Estoy muy satisfecho con el modo en que he progresado en mi carrera.
Completamente en desacuerdo En desacuerdo No sabe De acuerdo Completamente de acuerdo
1 2 3 4 5

Este instrumento de producción de datos que es el cuestionario, se dirige a una población definida: estudiantes de tres carreras universitarias determinadas. En él se solicita información sobre un conjunto seleccionado de características: sexo, carrera que cursa, universidad a la que asiste, edad, cantidad de materias aprobadas y su grado de acuerdo con dos afirmaciones preestablecidas. Notemos que se trata de unos pocos aspectos de cada estudiante los que interesan para esta investigación; no se tiene en cuenta, por ejemplo la opinión política de los estudiantes, ni con quién viven, ni tampoco su estatura. Estas últimas y muchas más son características de los estudiantes que están fuera del alcance de la investigación. Esto muestra a qué nos referimos con que la información seleccionada constituye un recorte, es una parcialización de los individuos que responden, en la que se eligen solo los aspectos que son de interés para una investigación particular.

El cuestionario tiene 8 ítems, numerados como P1, P2, etc., cada estudiante que lo responde marca una sola de las opciones indicadas en cada ítem. Una vez completados los cuestionarios por los estudiantes a los que fue dirigido, la información está “en bruto” y es necesario ordenarla para poder tener una visión de conjunto. Eso se logra organizando los datos recogidos en la **matriz de datos** que tiene, para el cuestionario mostrado, la siguiente forma:

Cuestionario	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8
1	1	3	3	21	22	2015	2	1
2	1	1	1	19	15	2016	1	2
3	2	1	2	19	13	2017	2	2
4	2	1	1	18	4	2017	2	1
5	2	2	5	22	20	2015	4	3
...								
150	2	3	3	21	15	2015	1	2

Este ordenamiento de la información tiene filas (horizontales) y columnas (verticales). Cada fila es un individuo y cada columna es un ítem. La primera fila muestra los nombres de los ítems del cuestionario y las filas siguientes los números que corresponden a las respuestas dadas por los encuestados. Así, la persona que respondió al primer cuestionario es un varón (1), que estudia Psicopedagogía (3) en la Universidad Católica (3), que tiene 21 años, lleva aprobadas 22 materias e ingresó en 2015. En los dos últimos ítems respondió que está de acuerdo (2) con la afirmación “Siento que estoy en una carrera que me va a permitir ser alguien en la vida”, y completamente de acuerdo (1) con que “Estoy muy satisfecho con el modo en que he progresado en mi carrera”.

La forma de la matriz de datos en InfoStat® es la siguiente²:

² La matriz de datos puede construirse directamente en Infostat® o bien en una hoja de cálculo y luego importada desde este programa

Caso	Cuestionario	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8
1	1.00	2.00	3.00	1.00	19.00	7.00	2010.00	5.00	4.00
2	2.00	1.00	3.00	3.00	20.00	12.00	2015.00	2.00	1.00
3	3.00	1.00	2.00	1.00	22.00	10.00	2012.00	4.00	3.00
4	4.00	1.00	2.00	4.00	20.00	7.00	2012.00	3.00	3.00
5	5.00	1.00	3.00	2.00	20.00	1.00	2011.00	5.00	3.00
6	6.00	2.00	3.00	5.00	18.00	13.00	2017.00	5.00	2.00
7	7.00	2.00	1.00	1.00	24.00	7.00	2017.00	4.00	5.00
8	8.00	1.00	3.00	5.00	25.00	19.00	2014.00	5.00	1.00
9	9.00	1.00	2.00	5.00	22.00	15.00	2014.00	3.00	2.00
10	10.00	1.00	3.00	3.00	25.00	13.00	2012.00	2.00	1.00
11	11.00	2.00	1.00	3.00	25.00	12.00	2016.00	1.00	1.00
12	12.00	1.00	1.00	4.00	24.00	12.00	2015.00	1.00	2.00
13	13.00	2.00	2.00	3.00	25.00	8.00	2011.00	2.00	3.00
14	14.00	1.00	1.00	3.00	20.00	12.00	2017.00	4.00	3.00
15	15.00	2.00	1.00	2.00	20.00	13.00	2012.00	4.00	4.00
16	16.00	1.00	1.00	4.00	22.00	4.00	2013.00	1.00	5.00
17	17.00	1.00	3.00	5.00	21.00	9.00	2013.00	7.00	5.00
18	18.00	1.00	3.00	3.00	18.00	2.00	2017.00	5.00	3.00
19	19.00	1.00	2.00	3.00	21.00	10.00	2016.00	3.00	1.00
20	20.00	1.00	1.00	4.00	18.00	4.00	2016.00	2.00	1.00
21	21.00	2.00	1.00	4.00	20.00	13.00	2015.00	3.00	3.00
22	22.00	1.00	1.00	4.00	26.00	4.00	2015.00	4.00	2.00
23	23.00	2.00	1.00	1.00	21.00	14.00	2016.00	4.00	4.00

La matriz de datos contiene toda la información que será insumo de los análisis posteriores, luego será necesario definir qué es cada elemento que la constituye.

La matriz de datos es un arreglo en el que cada fila (horizontal) representa un individuo del cual proviene la información, cada columna (vertical) es un aspecto de los individuos, que se ha seleccionado para observar, y cada celda es el valor que tiene el individuo de la fila en el aspecto de la columna correspondiente.

Los individuos

Hemos dicho que cada fila representa un caso, un individuo al que se observa. Este individuo puede ser una persona como en este ejemplo, pero también una entidad colectiva: un hogar, una empresa, una escuela. Cada una de ellas se denomina **unidad de análisis**.

Es importante que las unidades de análisis estén claras, por ejemplo, si se afirma que “las personas de menores recursos acceden menos frecuentemente a la educación superior”, hablamos de personas, y éstas son las unidades de análisis. Y es muy diferente a decir que “en los países más pobres, es menor la proporción de personas que acceden a la educación superior”, porque aquí las unidades de análisis son los países.

Se llama **unidades de análisis** a los entes individuales acerca de los que se analizan sus cualidades.

Si las unidades de análisis fuesen escuelas, sus características, dependiendo de la investigación de que se trate, podrían ser: dependencia (estatal o privada), nivel (primaria, secundaria, ambas), cantidad de alumnos, turnos (mañana, tarde, ambos), etc. Si se tratara de hogares, puede observarse: cantidad de miembros, composición, actividad económica, etc.

Las variables

Cada columna de la matriz de datos es un ítem del cuestionario, es decir un aspecto seleccionado de las unidades de análisis sobre el que se llama la atención. Esos aspectos se denominan **variables**. Así, el sexo es una variable,

como lo es la carrera que cada estudiante cursa, el año en que ingresó, etc. Cada ítem del cuestionario se constituye en una variable. Las variables son los aspectos de los individuos que se someterán al análisis. Su cualidad central es la que le da nombre: la de variar.

Llamamos **variable** a una característica de las unidades de análisis que puede asumir diferentes valores en cada una de ellas.

Cada vez que se haga referencia a una variable, debe conocerse cuál es la unidad de análisis a la que se refiere, si no resulta claro, se debe indicar. Es diferente afirmar que un país es rico que decir que sus habitantes lo son.

Las categorías

El cuerpo de la matriz de datos tiene números que corresponden a las respuestas que cada estudiante dio a cada ítem. El primer caso tiene un número 1 en la primera columna, que quiere decir que esa persona respondió que es un varón. En esta pregunta, se podía elegir entre cuatro respuestas diferentes (varón, mujer, otro, prefiere no responder), en el lenguaje que estamos introduciendo, diremos que esta variable (sexo) puede asumir cuatro **categorías** diferentes. Para el primer caso, la variable sexo asume la categoría 1. Las categorías son las “posibilidades” que tiene una variable, dentro de las cuales a todas las unidades de análisis les corresponde una y solo una.

Las **categorías** de una variable son los valores que ésta puede asumir.

Cada vez que se define una variable —es decir cada vez que se selecciona un aspecto de las unidades de análisis para observar—, debe indicarse también el conjunto de categorías que le corresponden, aunque a veces esto está implícito. Si la variable es *nivel de escolaridad alcanzado*, pueden considerarse las siguientes categorías: ninguno, primario incompleto, primario completo, secundario incompleto, secundario completo, terciario o universitario incompleto, terciario o universitario completo y postgrado. Si tratamos con la variable *edad*, sus categorías son valores numéricos, entre cero y un máximo de años que se fija según el caso.

Hay dos propiedades que debemos asegurar que cumplan las categorías que construyamos. La primera se llama **exclusión mutua**, es decir que cada categoría excluya a todas las demás. Dicho de otra manera, si a un individuo le corresponde una categoría, entonces sabemos que no le corresponde ninguna otra. Si analizamos hogares y a cada persona le preguntamos por su parentesco, sin indicar con quién, tendremos una categorización defectuosa, porque una persona del hogar puede al mismo tiempo ser hijo y hermano, o hijo y padre, si conviven tres generaciones. En cualquiera de los dos casos, a una misma persona le corresponderían dos categorías y se viola el requisito de exclusión mutua. Esto se resuelve estableciendo respecto de quién se declara el parentesco, y todos los integrantes del hogar lo refieren a la misma persona³.

³ Habitualmente denominado “Jefe de Hogar”.

Al analizar los *tipos de lectura preferida*, nos equivocariamos si los categorizáramos como de ficción, de misterio, policiales, románticas, biográficas, de aventuras; ya que la categoría ficción puede incluir misterio, policiales, novelas románticas o de aventuras.

También se comete ese error si se clasifica a las escuelas como céntricas, parroquiales, urbanas y rurales. Dado que una escuela puede ser al mismo tiempo parroquial y urbana. Es necesario separar, para que quede claro, lo que interesa en el análisis: si lo que queremos distinguir son escuelas céntricas de barriales, entonces la variable será la ubicación geográfica y no importa si la escuela depende de una iglesia o del estado; es decir, identificar la variable y luego sus categorías.

Las categorías de una variable son **mutuamente excluyentes** si a cada individuo le corresponde no más de una categoría.

El segundo requisito que solicitaremos a las categorías de una variable es que agoten todas las posibilidades de variación, es decir, que todos los valores posibles estén contemplados. Esta cualidad se llama **exhaustividad**.

Veamos qué sucede si no respetamos este requisito. Si evaluamos la variable situación conyugal y ofrecemos como categorías: casado, soltero, divorciado, viudo; las personas que estén viviendo juntas sin estar casadas no encuentran un lugar donde ubicarse, como tampoco lo encuentran quienes están separados sin haberse divorciado. Para resolver esto es necesario, o bien incluir estas categorías explícitamente: casado, unido, soltero, separado, divorciado, viudo; ampliando así el número de categorías, o bien fusionarlas con las existentes: casado o unido, soltero, separado o divorciado, viudo.

Con la edad, las categorías son valores numéricos que pueden ir del cero hasta el un máximo, pero ¿dónde fijarlo? Si se eligiera un límite como 100 años, algunas personas quedarían fuera, quizás sean pocas, pero no pueden quedar sin categoría donde incluirse. Por lo demás puede haber solo una persona de 103 años, otra de 105, por lo que no se justifica seguir extendiendo categorías. Una solución frecuente es la de tomar una categoría "abierta final", fijando como última categoría 100 y más, e incluir allí a todas las personas que declaren una edad de 100 años o superior. Puede verse que esta opción conlleva una pérdida de información, ya que no sabemos la edad exacta de quienes se ubican en esa categoría. Aceptamos esa pérdida a cambio de reducir el número de categorías de la variable, luego volveremos sobre eso.

Algunas preguntas de cuestionarios, luego de un conjunto de opciones para responder, incluyen una categoría que dice "Otro... especificar". Se trata de casos de categorizaciones en las que no se sabe de antemano cuáles son todas las respuestas posibles; son frecuentes en las encuestas de opinión. Por ejemplo, si alguien declara que en las próximas elecciones va a votar en blanco y preguntamos por qué, podemos conocer de antemano algunas de las respuestas posibles, pero debemos dejar espacio para que los encuestados expresen razones que no habíamos previsto. De este modo aseguramos la exhaustividad de las categorías.

Las categorías de una variable son **exhaustivas** si todo individuo tiene alguna categoría que le corresponda.

En algunas situaciones, el número de categorías de una variable es parte de la decisión del investigador. Hay casos en que las categorías están establecidas de antemano: por ejemplo, en la variable sexo se tiende a usar como categorías las de varón y mujer; sin embargo, si estamos frente a un estudio que trate precisamente sobre orientación sexual de las personas, deberá considerarse un espectro más amplio de categorías, o bien ofrecer preguntas abiertas, sin establecer categorías de antemano.

En la edad de las personas suele elegirse terminar las categorías con "100 y más". De hecho, también se podrían mantener las edades exactas hasta 109 años y cerrar con 110 y más. Qué se elija depende de cuánta información y cuánta claridad se decida que tenga la clasificación; lamentablemente, no es posible lograr al mismo tiempo el máximo de información y de claridad en la presentación⁴.

Los símbolos numéricos

Las categorías pueden tener diferente naturaleza: algunas se expresan con números (como la edad) y otras con palabras (como la carrera que cursa), otras en graduaciones (como el grado de acuerdo); sin embargo es muy común representar con números a las categorías, aun cuando lo que se observe no sea numérico. Así, en la variable *nivel de educación*, pueden codificarse las categorías de la siguiente manera:

Código	Máximo nivel de educación formal alcanzado
1	ninguno
2	primario incompleto
3	primario completo
4	secundario incompleto
5	secundario completo
6	terciario o universitario incompleto
7	terciario o universitario completo
8	postgrado

Hemos usado números para referirnos a las categorías a fin de simplificar la notación. Cuando usemos un programa informático para analizar los datos, veremos que esta codificación es necesaria.

De manera equivalente podemos codificar las categorías de otras variables:

Código	Sexo
1	Varón
2	Mujer

⁴ A menudo que, en Estadística, es necesario llegar a puntos de equilibrio entre el grado de detalle de la información que se ofrece y la claridad con que esa información puede presentarse.

Código	Estoy muy satisfecho con el modo en que he progresado en mi carrera.
1	Completamente en desacuerdo
2	En desacuerdo
3	Indiferente
4	De acuerdo
5	Completamente de acuerdo

En las variables cuyas categorías son numéricas, no es necesario hacer ninguna codificación. Así, la edad quedará expresada de manera numérica directamente por la cantidad de años, como sucede con la cantidad de materias aprobadas. En estos casos, la exclusión mutua y la exhaustividad se cumplen.

La medición

En Ciencias Sociales tiene plena vigencia el debate acerca de las posibilidades de medición de los fenómenos que se estudian. Buena parte de la discusión gira en torno a una definición de medición, ya que según qué sea lo que se considere como tal, se tratará de una medición o no. La posición más tradicional corresponde a lo que el sentido común trata como medición: la estatura, las distancias, el peso, etc. Esta definición demanda que los números que codifican a las categorías tengan algunas propiedades para considerarlos como mediciones. Se conoce como teoría clásica de la medición, y desde ese punto de vista sería muy difícil realizar mediciones sobre las variables que manejamos en Ciencias Sociales. Una definición menos restrictiva es la que propuso Stevens (1946, 1951), según la cual “medir es asignar números a los objetos según cierta regla, de manera que los números asignados en la medición, no representan propiamente cantidades, sino relaciones”.

Esta última definición, basada en la teoría representacional de la medición, es la que adoptaremos en este curso aunque la discusión sigue vigente. Desde esta definición, evaluar una variable para una unidad de análisis dada, equivale a medir esa unidad de análisis en el aspecto que la variable expresa.

Aun cuando se adopte una definición amplia de lo que es medir, podemos intuir que no se mide una opinión del mismo modo que se mide el salario o la estatura. Esto sugiere que, dentro de las variables de las que hemos hablado hasta aquí habrá que reconocer diferencias, y estas diferencias vendrán dadas por el significado que tengan los números que asignamos a las categorías, es decir, por las reglas que ligan los números con lo que se observa.

El **nivel de medición** de una variable está determinado por el significado que tengan los símbolos numéricos que se asignan a las categorías.

Existe una graduación en el significado que tienen los números, y por eso se habla de niveles, que pueden ser más altos o más bajos. En la variable sexo, haber elegido 1 para varones y 2 para mujeres es de una arbitrariedad total (de la que alguien podría quejarse). Si la codificación hubiese sido al revés, habría estado igual de bien, y también lo habría estado usar el número 25 para representar a los varones y el 38 para las mujeres, aunque esto resulta un poco incómodo. Por el contrario, en la variable edad, asignar el número 20 a quien

tiene 20 años, parece totalmente “natural” ¿qué otro número podríamos haber asignado? ¿Qué sucede con el nivel de educación? En el ejemplo elegimos numerar las categorías del 1 al 8; habría habido otras opciones, por ejemplo usar solo números pares o números impares u otra secuencia arbitraria, pero algo importante es que cualquier secuencia que se elija debe respetar el orden de las categorías de la variable, por lo que los números deben reflejarlo; no habría sido correcto usar números que no vayan aumentando, como lo hacen los niveles de educación.

Así entonces, hay grados diferentes en la libertad que existe para asignar los números a las categorías. Esas diferencias distinguen los niveles de medición de las variables.

Niveles de medición

Según la mayor o menor arbitrariedad que exista en la relación que liga los números a las categorías, hablaremos de niveles de medición. Una forma diferente de decirlo es que, cuánta más restricción haya en la asignación de los números a las categorías, más alto será el nivel de medición de las variables. Si los números se asignan de manera totalmente arbitraria, el nivel de medición es el más bajo de todos y se llama **nivel nominal** (como en la variable sexo); si los números deben respetar el orden de las categorías (como en la educación), la variable se llama de **nivel ordinal**. Por ahora, nos detenemos en estos dos niveles.

El nivel nominal

Es el nivel más elemental de medición: las variables de este nivel tienen categorías que son solo nombres (de allí que se llamen nominales). La asignación de códigos numéricos cumple la función de designar las categorías, es decir, de distinguirlas una de otras. Sexo, área de especialización preferida (UA = estudiantes de Psicología), carrera que cursa (UA = estudiantes universitarios); cuyas codificaciones podrían ser:

Código	Carrera	Código	Área
1	Psicología	1	Clínica
2	Filosofía	2	Educacional
3	Medicina	3	Jurídica
4	Otras	4	Laboral
		5	Sanitaria
		6	Social
		7	Experimental
		8	Otra

Por comodidad, se empieza en el 1 y desde allí correlativamente, pero no hay ninguna prohibición para codificar con cualquier conjunto de números. Aun con esta amplia libertad para elegir los códigos numéricos, hay algo que no se puede hacer: no es válido usar el mismo número más de una vez. Si hiciéramos esto, confundiríamos las categorías que corresponden a cada individuo. Así, a un estudiante de Psicología, le asignamos el valor 1 en la variable “carrera”, y no podría usarse ese mismo número en la misma variable también para alguien que estudia Medicina. Diremos que la condición que deben cumplir los números en este nivel de medición es que: a categorías diferentes correspondan números distintos.

Entonces, en este nivel de medición a cada categoría puede asignarse, de manera arbitraria, uno y solo un número. Esta forma de asignar los valores numéricos solo implica que éstos designan las categorías (que las distinguen a una de otra), por eso, no es posible tratarlos como números en cuanto a sus propiedades aritméticas. En particular no puede sumárselos: nada puede significar que se sumen los números 1 y 2 que codifican a las carreras de Psicología y Filosofía.

Una variable está medida a nivel **nominal** si los números que representan cada categoría son asignados de manera arbitraria y solo cumplen con la función de designar y distinguir categorías diferentes

Para unidades de análisis medidas a través de una variable de nivel nominal, es posible saber si corresponden a la misma categoría o a una diferente, es decir si tienen la misma cualidad (o atributo) o una diferente.

Sea la variable “carrera que cursa”, (P2 del cuestionario anterior):

Código	Carrera que cursa
1	Psicología
2	Educación
3	Psicopedagogía

Si a un alumno le corresponde el número 1 y a otro también, solo podemos decir que coinciden en esta variable, ambos estudian la misma carrera (Psicología), si a uno le corresponde el 1 y a otro el 3, sabremos que el primero estudia Psicología y el otro Psicopedagogía. El hecho que el número 3 sea más grande que el 1, no tiene ninguna interpretación en este nivel de medición, no puede decirse que Psicología sea menos que Educación. Como tampoco vale que 3 sea el triple de 1.

Si 1 y 2 son dos categorías de una variable medida a nivel nominal, el único tipo de relación que puede establecerse entre ellas es $1 \neq 2$, es decir que 1 es diferente de 2.

La regla de transformación de una escala nominal en otra es que cualquier número puede cambiarse por cualquiera a condición de no repetir ninguno. La escala nominal 1, 2, 3, 4 puede cambiarse por la 5, 8, 4, 2. Aunque no es obligatorio, en la práctica, lo más frecuente es usar los primeros números naturales para codificar las categorías.

El nivel ordinal

Aquí subimos un nivel, ya que a los números que solo tienen la propiedad de designar en las variables nominales, se agrega otra: la de reflejar el orden que existe entre las categorías.

Simplemente ahora se trata de variables cuyas categorías indican alguna cualidad de las unidades de análisis que crece en una dirección. Eso equivale a decir que se pueden hacer entre ellas, juicios de orden, tales como una categoría es mayor que otra, una categoría es menor que otra. El grado de escolarización cumple con ese requisito: efectivamente, el “primario incompleto” es un nivel de estudios superior a “ninguno”, pero inferior a “primario completo”.

Los valores numéricos que representan las categorías rescatan ahora una propiedad adicional: el orden. Además de poder distinguir si dos sujetos tienen la misma característica analizada o una distinta como en el nivel nominal, ahora también podemos saber si un individuo tiene esa característica en mayor o menor grado. Así como “ninguno” es menor que “primario incompleto”, los números correspondientes cumplen con que 1 es menor que 2 y resulta más sencillo escribirlo como $1 < 2$.

Una variable está medida a nivel **ordinal** si los números que representan cada categoría son asignados de manera que respeten el orden según aumenta o disminuye la característica que la variable mide.

Estos números designan las categorías y son expresión de la jerarquía que hay entre ellas. Otros ejemplos de variables medidas a nivel ordinal y su correspondiente codificación numérica son:

Código	P8	Código	Rendimiento de los alumnos de una escuela
1	Completamente en desacuerdo	1	Insatisfactorio
2	En desacuerdo	2	Satisfactorio
3	No sabe	3	Bueno
4	De acuerdo	4	Muy bueno
5	Completamente de acuerdo	5	Excelente

De aquí en adelante ya no usaremos una columna especial de la tabla para indicar el código, simplemente lo señalamos junto al nombre de la categoría, como en las tablas siguientes:

Grado de participación de los padres en las reuniones convocadas por la escuela	Año en el que se matriculó
0 nulo	1 Primero
1 bajo	2 Segundo
2 moderado	3 Tercero
3 alto	4 Cuarto
	5 Quinto

Acerca del significado de los valores numéricos en las variables de nivel ordinal, si bien hemos agregado el orden, aun no es posible hacer operaciones con ellos. Es decir, no es posible sumar dos valores y que la suma tenga algún significado. Por ejemplo, en la última variable, no es cierto que $3=2+1$, porque no es cierto que tercer año sea la suma de primero y segundo. Tampoco es válido restarlos, veamos que la diferencia entre 1 y 2 es 1 y la diferencia entre 3 y 4 también es 1, pero eso no tiene un correlato entre las categorías: no es cierto que haya la misma distancia entre primero y segundo año que entre tercero y cuarto, simplemente porque no tenemos definida la idea de distancia para esta variable.

Sí 1 y 2 son dos categorías de una variable medida a nivel ordinal, se pueden establecer las relaciones: $1 \neq 2$ y $1 < 2$, es decir que, uno es diferente que dos y

que uno es menor que dos. A la relación de distinción que existe entre categorías de la escala nominal se agrega la relación de orden.

La regla de transformación de una escala ordinal en otra consiste en cambiar los números por cualquiera, a condición que no se repita ninguno (como en la nominal) y además, que sigan el mismo orden. La escala ordinal 1, 2, 3, 4 puede cambiarse por la 5, 8, 15, 23. Nuevamente, esto es poco común y suelen usarse números correlativos.

Los dos niveles (o escalas) de medición siguientes se llaman intervalares y proporcionales y usan las codificaciones numéricas con un significado un poco diferente al visto hasta aquí. La principal diferencia es que el grado de arbitrariedad para asignar los números se reduce sustancialmente. En primer lugar, las escalas intervalares conservan las distancias entre los valores: aquello que no puede hacerse en las ordinales, porque pasar de primer año a segundo no “es lo mismo” que pasar de tercero a cuarto. En las variables medidas a nivel proporcional, además de conservarse la distancia, se verifica la proporcionalidad de los valores: es decir que, recién en estas escalas, cuatro será el doble de dos.

El nivel intervalar

Veamos un ejemplo antes de definir este nivel. Cuando decimos que estamos en el año 2018, hacemos implícitamente una afirmación que supone una medición del tiempo transcurrido desde un determinado evento, cuya elección no es única. En cierto modo decimos “han transcurrido 2018 años desde el momento que se acordó usar como inicio de este calendario”. En culturas no cristianas, el origen en la medición de los tiempos puede ubicarse en otro momento y, en consecuencia, el año actual es otro. En el calendario judío, por ejemplo, el presente es el año 5778. Hay entonces cierto grado de arbitrariedad en la ubicación del punto desde donde empezar a contar los años. Lo que llamaríamos el “año cero”, no es necesariamente el mismo. Sin embargo, el tiempo transcurrido entre 1975 y 2005 es de treinta años, como lo es el tiempo transcurrido entre 5735 y 5765. Es decir que la transformación que lleva los años de un calendario al otro, **conserva las distancias**. Independientemente de la escala con que hayamos medido el año, la diferencia entre dos años, se mantiene constante. Eso sucede porque las dos escalas (en este ejemplo, la medición del tiempo según las tradiciones cristiana y judía) se distinguen solo en la elección del origen (la posición del cero) pero no en la definición de lo que es un año. Para ambas escalas un año corresponde a una vuelta de la tierra al sol, por lo que la unidad de medición es la misma⁵. Si alguien tiene 30 años en el calendario cristiano, también tiene 30 años con el calendario judío; porque, aunque tanto el año de nacimiento como el actual sean diferentes en los dos calendarios, la diferencia (el tiempo transcurrido) entre las dos fechas es el mismo. Ubicar el cero en un momento (en un determinado hecho histórico) o en otro es una elección; ese cero no indica la “ausencia de tiempo”. En este caso, cero no quiere decir “nada”, sino “origen elegido”.

Llevemos esto a un terreno más cercano a la Psicología: una forma de medir la inteligencia es la de observar cuántos problemas de una serie de dificultad

⁵Si bien la corrección que se introduce cada año no es idéntica, por lo que el momento de cambio de año no es el mismo en las dos escalas.

creciente es cada uno capaz de resolver correctamente. Pero, ¿podría decirse que quien no resuelve ninguno de ellos tiene inteligencia cero?, esto es claramente incorrecto, porque la ubicación del cero no implica la ausencia de lo que estamos midiendo (ausencia de inteligencia en este caso).

Las escalas intervalares, mantienen las propiedades de las escalas ordinales y nominales, es decir, los números designan categorías y permiten ordenarlas; pero además permiten decir a qué distancia está una de otra, porque cada categoría se expresa también en sentido cuantitativo. La medición intervalar implica construir una escala en la que las categorías están proporcionalmente distanciadas entre sí. Esto permite especificar la distancia que separa a cada categoría de las demás. Este nivel de medición requiere que se establezca algún tipo de unidad de medida que pueda ser considerado por todos como una norma común y que sea repetible, esto es, que se pueda aplicar reiteradamente a los mismos individuos produciendo los mismos resultados. En el campo de la Psicología, especialmente en el uso de las pruebas mentales, como la medición de aptitudes, el uso de las escalas intervalares es muy frecuente.

La medición de los rendimientos individuales por medio de pruebas suele expresarse en puntajes que provienen del tiempo requerido para realizar una determinada tarea o de la cantidad de trabajo realizado. En este tipo de prueba, es común que los puntajes partan de un mínimo establecido (por ejemplo el mínimo tiempo posible de ejecución o la mínima cantidad de tareas que una persona puede realizar en una prueba) y esto constituye el puntaje mínimo o la categoría más baja. Los puntajes de las pruebas mentales varían de acuerdo con el rendimiento y un mayor rendimiento siempre significará un mayor puntaje. Por ejemplo, el manual original del Inventario de Depresión de Beck-II (Beck et al., 1996) establece niveles (ordinales) para los puntajes (intervalares) que resultan de la aplicación del instrumento:

Puntaje en la escala	Significado
0 – 13	depresión mínima
14 – 19	depresión leve
20 – 28	depresión moderada
29-63	depresión grave

De este modo se ha bajado el nivel de medición, de intervalar a ordinal.

A nivel intervalar, ya es posible expresar la regla de transformación de manera formal; así, si x e y representan la medición del mismo atributo en diferentes escalas, puede obtenerse y a partir de x a través de la siguiente operación:

$$y = b_0 + b_1 * x$$

Se usan los símbolos b_0 y b_1 para indicar dos números fijos elegidos arbitrariamente. El primero de ellos indica el desplazamiento en el origen de la escala: allí donde x valga 0, y tomará el valor de b_0 . Por su parte, b_1 es un factor de escala, que modifica el tamaño de la unidad de medida.

En el ejemplo de la medición del año según dos calendarios diferentes, si x es la medición en el calendario cristiano e y con el calendario judío, la relación es:

$$y = 3760 + x$$

En la que b_0 se reemplazó por 3760 y b_1 ha desaparecido, es decir que vale 1 (que no tiene efecto cuando multiplica a x). El valor 3760 representa el cambio en el origen: cuando el calendario cristiano marcó cero (hipotéticamente, porque su implementación es posterior a esa época), el judío indicaba el año 3760. El 1 correspondiente a b_1 , indica que no hay cambio en el tamaño de la unidad, como dijimos antes, ambas culturas acuerdan en que el año es una vuelta de la tierra al sol⁶.

Una variable está medida a nivel **intervalar** cuando las distancias entre las categorías son proporcionales.

Si 1, 2, 3 y 4 son categorías de una variable medida a nivel intervalar, se pueden establecer las relaciones:

$$\begin{aligned} 1 &\neq 2 \\ 1 &< 2 \\ 2 - 1 &= 4 - 3 \end{aligned}$$

Se agrega la conservación de las distancias a las propiedades que ya tenía la escala anterior.

El nivel proporcional⁷

Este es el último nivel de medición que trataremos y es el más intuitivo, es el único nivel considerado efectivamente como medición por la teoría clásica, ya que en él se integran todas las propiedades de los niveles anteriores y además se agrega la proporcionalidad de los valores numéricos y el carácter absoluto del cero. Recién a este nivel, los números se comportan realmente como números, ya que se puede operar con ellos del modo al que estamos acostumbrados (sumarlos, multiplicarlos, etc.). ¿Qué variables pueden medirse a este nivel? Todas aquellas para las cuales tengan sentido las dos propiedades adicionales que esta escala incorpora: proporcionalidad de valores y cero absoluto. La cantidad de errores ortográficos cometidos en una prueba de dictado, admite el valor cero como correspondiente a “no errores”, es la ausencia de lo que se mide, se trata de un cero absoluto. Además, cometer 10 errores es el doble que cometer 5. Por eso, la variable *Número de errores ortográficos cometidos* es de nivel proporcional. El *tiempo que una persona tarda en resolver una tarea*, si se mide en minutos, admite considerar que 4 minutos es el doble de 2, por lo que estamos también en presencia de una escala proporcional, aunque el cero no sea un valor observable. También es proporcional la variable *ingresos mensuales del hogar* o el *número de materias aprobadas*.

En general, los valores que provengan de procesos de conteo (como el número de errores) serán siempre proporcionales, como también aquellos que hagan referencia a una unidad de medida estándar como el tiempo⁸ o la distancia.

⁶ Con la salvedad indicada antes sobre la no coincidencia del momento de cambio de año.

⁷ Este nivel de medición aparece mencionado en alguna bibliografía como “escalas de razón” se pueden tratar como sinónimos, ya que la razón se refiere al cociente de números, que permanece constante en el caso de valores proporcionales.

La expresión formal de la regla de transformación entre escalas proporcionales es, si x e y representan la medición del mismo atributo en diferentes escalas:

$$y = b_1 * x$$

En la que ahora solo tenemos un número fijo: b_1 , que es el factor de escala, que modifica el tamaño de la unidad de medida. Esto simplemente significa que pueden cambiarse las unidades con que se miden las variables proporcionales. Por ejemplo para pasar de metros a centímetros:

$$y = 100 * x$$

Donde x es la medida en metros e y la misma medida expresada en centímetros. Si $x = 3$ metros entonces $y = 300$ centímetros

De horas a minutos

$$y = 60 * x$$

El factor 60 transforma a las horas (x) en minutos (y). Si $x = 2$ horas entonces $y = 120$ minutos

Otro ejemplo, si el tiempo que tardan sujetos experimentales para reconocer una expresión facial se mide en milisegundos (x), esa medición se puede pasar a segundos (y), dividiendo por mil.

$$y = \frac{1}{1000} * x$$

Ninguna de esas transformaciones pueden modificar la posición del cero, porque en esta escala es absoluto: allí donde x valga cero, y deberá también valer cero, por eso no aparece el término b_0 que estaba en las intervalares. Cero metros son también cero centímetros y cero horas son cero minutos.

Una variable está medida a nivel **proporcional** cuando sus valores respetan relaciones de proporcionalidad y, en consecuencia, el cero tiene un valor absoluto.

Si 1, 2, 3 y 4 son categorías de una variable medida a nivel proporcional, se pueden establecer las relaciones:

$$\begin{aligned} 1 &\neq 2 \\ 1 &< 2 \\ 2 - 1 &= 4 - 3 \\ 4 &= 2 * 2 \end{aligned}$$

Una subdivisión en las escalas proporcionales

Entre las variables medidas a nivel proporcional, debe hacerse una diferenciación, según los valores solo puedan ser números enteros o admitan números decimales, porque cambia la forma de presentación. El primer tipo es el que se llama variable **discreta**, los siguientes son ejemplos de ella:

⁸El ejemplo de los calendarios judío y cristiano, aunque es una medición de tiempo, no es absoluta. Es diferente de la medición con un cronómetro, que establece un inicio de cuenta al momento en que se lo dispara y da lugar a una variable de nivel proporcional.

Número de materias aprobadas	Cantidad de aplazos
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
	7
	8
	9 ó más

Aquí podría suceder que la variable tenga un gran número de valores. En el ejemplo de la cantidad de materias aprobadas, puede restringirse a las aprobadas por alumnos de primer año y en condición de regular, de modo que el máximo sea de 6. Pero si fueran alumnos de toda la carrera, la cantidad podría ir desde cero hasta el número total de materias. En esos casos, resultaría poco claro hacer la lista con todos los valores posibles. Cuando la variable admite números decimales se la llama **continua**, y allí el problema es mayor, porque el número de valores puede ser muy elevado⁹.

Ya sea porque una variable discreta tiene una cantidad grande de valores, o bien porque la variable es continua, el problema de la presentación de las categorías se resuelve agrupándolas. Esto se llama **recategorización** porque consiste en construir nuevas categorías (volver a categorizar) a partir de las originales de la variable, a fin de resumir la información. Por ejemplo, la primera categoría puede incluir a quienes aprobaron una materia o ninguna, la segunda a los que aprobaron dos o tres y así sucesivamente:

Número de materias aprobadas	Estatura (en metros)
0-1	hasta 1,55
2-3	1,55 – 1,65
4-6	1,65 – 1,75
	1,75 – 1,85
	1,85 – 1,95
	1,95 – 2,05
	más de 2,05

En el próximo capítulo nos detendremos en las formas de construir estos agrupamientos y despejaremos las dudas que provengan de la diferente cantidad de valores que se agruparon en la variable discreta de este ejemplo (las dos primera categorías contienen dos valores cada una, y la tercera tres) y la aparente superposición entre el inicio de una categoría y el fin de la anterior en el caso de la continua, que sería una violación de la exclusión mutua, porque alguien con una talla de 1,85 podría ir a la cuarta o a la quinta categoría.

⁹ La cantidad de valores depende de la precisión con que se mida. Si se mide con precisión de un centímetro, en un metro caben 100 valores, pero si se mide al milímetro en el mismo intervalo de un metro se ubican 1000 categorías.

Resumen de los niveles de medición

Nivel de medición	Significado de los símbolos numéricos	Requisito para cambiar los números	Ubicación del cero
Nominal	Designan, distinguen	Que no se repita el mismo para diferentes categorías	Sin significado
Ordinal	Expresan orden	Que respeten el orden de las categorías	Sin significado
Intervalar	Reflejan proporcionalidad de las distancias	$y = b_0 + b_1 * x$	Arbitrario
Proporcional	Reflejan proporcionalidad de los valores de la variable	$y = b_1 * x$	Absoluto (indica ausencia de lo que se mide)

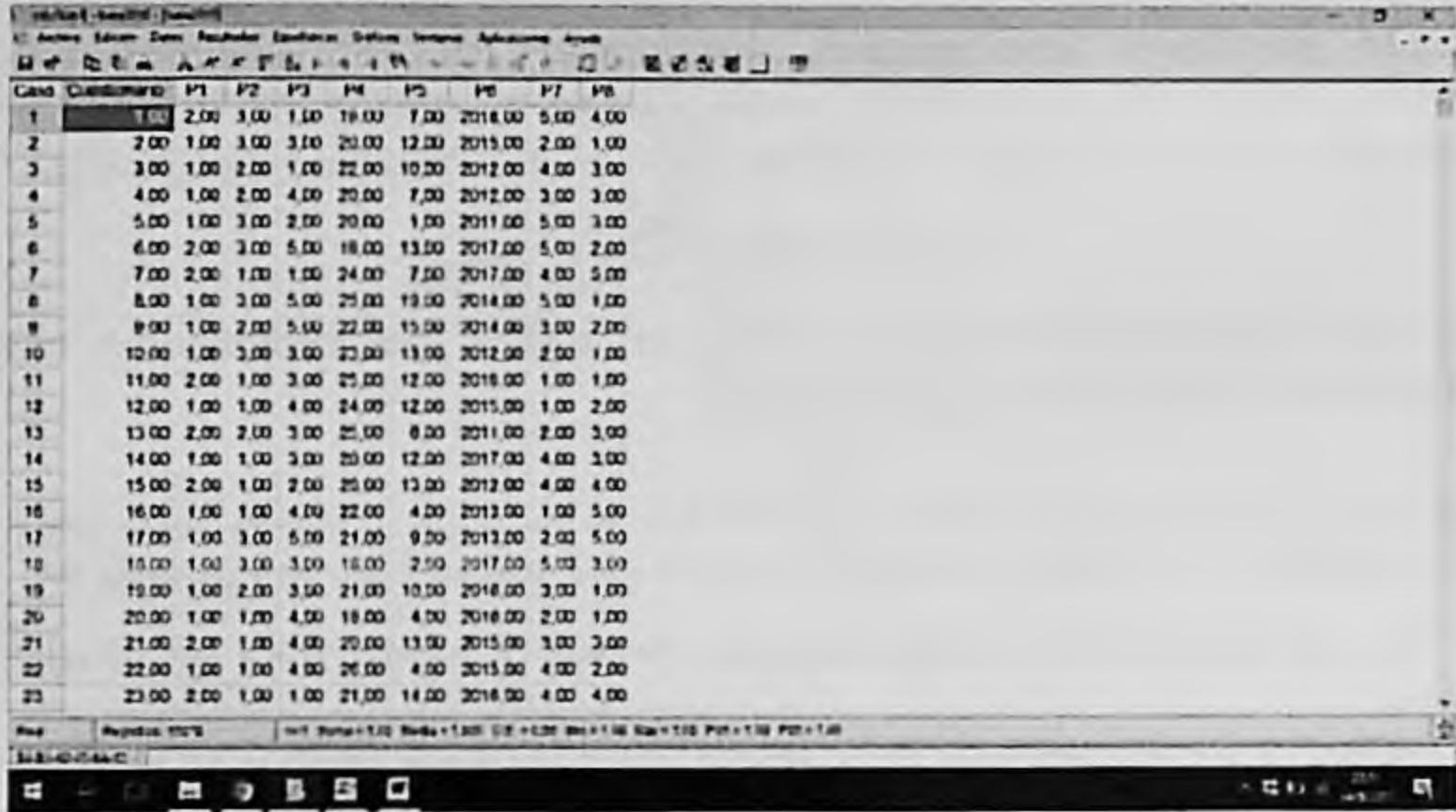
Ejemplos de variables medidas a diferente nivel

	Nominales		Cepa de la que provienen los animales de laboratorio
	Ordinales		Grado de dificultad de un examen de ingreso a la Universidad
Métricas	Intervalares		Edad mental
	Proporcionales	Discretas	Número de palabras recordadas en una prueba de memoria
		Continuas	Duración de cada periodo de amamantamiento (en minutos)

Capítulo 2 Distribuciones de frecuencia

Una vez identificadas las variables y reconocido su nivel de medición, es necesario darle a la matriz de datos un formato que permita hacer lecturas de los resultados, ya que es imposible observar una tabla que tenga gran cantidad de filas (casos) y muchas columnas (variables).

La siguiente matriz de datos:



Caso	Condicion	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8
1	1.00	2.00	3.00	1.00	19.00	7.00	2018.00	5.00	4.00
2	2.00	1.00	3.00	3.00	20.00	12.00	2015.00	2.00	1.00
3	3.00	1.00	2.00	1.00	22.00	10.00	2012.00	4.00	3.00
4	4.00	1.00	2.00	4.00	20.00	7.00	2012.00	3.00	3.00
5	5.00	1.00	3.00	2.00	20.00	1.00	2011.00	5.00	3.00
6	6.00	2.00	3.00	5.00	18.00	13.00	2017.00	5.00	2.00
7	7.00	2.00	1.00	1.00	24.00	7.00	2017.00	4.00	5.00
8	8.00	1.00	3.00	5.00	25.00	10.00	2014.00	5.00	1.00
9	9.00	1.00	2.00	5.00	22.00	15.00	2014.00	3.00	2.00
10	10.00	1.00	3.00	3.00	23.00	11.00	2012.00	2.00	1.00
11	11.00	2.00	1.00	3.00	25.00	12.00	2016.00	1.00	1.00
12	12.00	1.00	1.00	4.00	24.00	12.00	2015.00	1.00	2.00
13	13.00	2.00	2.00	3.00	25.00	8.00	2011.00	2.00	3.00
14	14.00	1.00	1.00	3.00	20.00	12.00	2017.00	4.00	3.00
15	15.00	2.00	1.00	2.00	25.00	13.00	2012.00	4.00	4.00
16	16.00	1.00	1.00	4.00	22.00	4.00	2013.00	1.00	5.00
17	17.00	1.00	3.00	5.00	21.00	9.00	2013.00	2.00	5.00
18	18.00	1.00	3.00	3.00	18.00	2.00	2017.00	5.00	3.00
19	19.00	1.00	2.00	3.00	21.00	10.00	2016.00	3.00	1.00
20	20.00	1.00	1.00	4.00	19.00	4.00	2016.00	2.00	1.00
21	21.00	2.00	1.00	4.00	20.00	13.00	2015.00	3.00	3.00
22	22.00	1.00	1.00	4.00	26.00	4.00	2015.00	4.00	2.00
23	23.00	2.00	1.00	1.00	21.00	14.00	2016.00	4.00	4.00

Corresponde a la aplicación del cuestionario mostrado antes. Cada columna de la matriz de datos contiene los valores que se han observado en cada uno de los individuos (filas); si se observa verticalmente, cada columna es una secuencia de números, que algunos programas (como R) denominan vector. Para el caso de P4 (la edad), esta secuencia es la siguiente:

19 20 22 20 20 18 24 25 22 23 25 24 25 20 20 22 21 18 21 18 20 26 21 18 17 25
26 17 19 19 22 23 19 25 26 22 23 21 19 19 19 19 24 25 19 19 21 20 21 20 24 17
18 20 25 18 19 21 18 26 20 19 22 23 22 23 24 24 19 25 19 21 19 18 26 17 17 17
18 21 20 24 20 24 17 20 20 24 17 24 19 20 23 24 18 21 19 24 21 24 23 24 19 21
19 21 26 17 19 22 17 23 20 18 18 24 21 23 22 17 17 18 21 25 25 17 22 18 25 18
17 25 26 22 18 25 17 24 25 20 19 25 21 22 18 17 23 21 25 20

Así presentada, la secuencia se llama **serie simple** y solo puede analizarse cuando son muy pocos casos. El más elemental de los resúmenes consiste en contar, para una variable determinada, cuantas apariciones tiene cada categoría. En la columna encabezada P1 (sexo) pueden contarse cuántos unos (1s) y cuántos doses (2s) hay en total.

Tablas de distribución de frecuencia

Las tablas resumen los recuentos, que aquí indican que, de los 150 casos, hay 89 doses y 61 unos. Esto puede decirse brevemente así:

sexo	casos
1	89
2	61
n	150

O de manera más explícita:

sexo	casos
masculino	89
femenino	61
n	150

Que informan que hay 89 varones y 61 mujeres. A la cantidad de casos, que proviene del recuento del número de unos y doses en la columna de sexo, se lo llama técnicamente **frecuencia absoluta simple** y se la indica como **f**. La tabla resulta entonces:

Sexo	f
1	89
2	61
n	150

El total de 150 casos resulta de la suma de todas las frecuencias absolutas simples, de manera breve, esto se indica así:

$$\sum_{i=1}^k f_i = n$$

Que se lee "La sumatoria de las frecuencias desde 1 hasta k es igual al total de observaciones".

En esa expresión, Σ es el símbolo de suma o sumatoria e indica la realización de esa operación (sumar).

- Las f_i son las frecuencias absolutas simples. El subíndice i va cambiando entre categorías.

- La expresión $i=1$ señala desde qué valor de i se inicia la suma, así como k señala la última categoría a sumar. En el ejemplo de las tablas, el valor de k es 2 (solo hay dos categorías), por lo que solo hay dos frecuencias a sumar: f_1 y f_2 , correspondientes a las cantidades de varones y de mujeres.

- n es el total de casos (observaciones).

Lo mismo puede indicarse como:

$$f_1 + f_2 + \dots + f_k = n$$

Que, en el caso de la tabla anterior resulta simplemente:

$$f_1 + f_2 = 89 + 61 = 150$$

La **frecuencia absoluta simple** de cada valor de la variable es el número de casos que asumen ese valor. Se indica f .

Si se quisieran comparar estas frecuencias con las de otra matriz de datos que tuviera un número total de casos diferente de 150, sería inadecuado usar los valores absolutos aquí presentados. Sea la comparación entre la tabla que acabamos de mostrar y otra de la que solo sabemos que contiene 120 varones. La información disponible solo nos diría que en una muestra hay 89 varones y en la otra 120. Sobre esos números no podemos hacer ningún juicio, ya que para saber si son muchos o pocos, o si hay más o menos varones en una muestra o en la otra, necesitamos el total. Si bien 120 es más que 89, la comparación depende de cuál sea el total *sobre* el que se los cuente. Sabemos que la primera muestra tiene

un total de 150 casos, si la otra tiene 200, podríamos afirmar que la cantidad de varones es parecida (poco más de la mitad en ambos casos). Pero para comparar con certeza nos hace falta indicar el peso *relativo* de los varones, no su número total, sino su contribución al total de casos.

Para calcularlo se divide el número de varones en el total general. En el ejemplo, 89/150 es 0,59 que también puede leerse como 59%. Es decir que los varones constituyen una proporción de 0,59 o bien que representan el 59% del total. Mientras que en la segunda tabla, la proporción de varones es 120/200 que es 60%. Estas proporciones se denominan **frecuencias relativas simples**, se simbolizan como *f'* (efe prima), y se calculan dividiendo la frecuencia absoluta por el total. Ahora puede completarse la tabla anterior agregando otra columna.

sexo	f	f'
1	89	0,59
2	61	0,41
n	150	1,00

El valor 1,00 que resulta de sumar las dos frecuencias relativas corresponde al 100% de los casos, es decir a las 150 observaciones. Usando la misma simbología que antes:

$$\sum_{i=1}^k f'_i = 1$$

Que afirma que la suma de las frecuencias relativas simples (*f'*) es igual a uno. La salida Infostat¹⁰ tiene la siguiente forma

P1	Total	Porcentaje
1,00	89	59,33
2,00	61	40,67
Total	150	100,00

Para la variable Carrera que cursa (P2)¹¹.

P2	Total	Porcentaje
1,00	48	32,00
2,00	44	29,33
3,00	58	38,67
Total	150	100,00

La tabla dice que hay 48 estudiantes de Psicología, que constituyen el 32% del total (*f'*=0,32), y del mismo modo con las demás categorías de la variable.

Al construir estas tablas de distribución de frecuencias se renuncia a una parte de la información que estaba en la matriz de datos. En ella se podía seguir por la fila a cada individuo y describirlo en cada uno de sus aspectos relevados (variables). Por el contrario, la tabla de distribución de frecuencias de sexo solo dice que hay 89 varones y 61 mujeres o, en la tabla de P2, que hay 48

¹⁰ Que se obtiene en *Estadísticas — Datos categorizados — Tablas de contingencia*

¹¹ Con categorías: 1. Psicología; 2. Educación; 3. Psicopedagogía

estudiantes de Psicología y 44 de Educación pero no informa quiénes son. Esta pérdida de información es parte inevitable del proceso en el que se resumen datos, cuanto más sintética sea la presentación, tanta más información habremos perdido. Esto puede visualizarse como el proceso en el que se “toma distancia” de los datos originales: cada vez tenemos una mejor visión de conjunto, pero al mismo tiempo perdemos detalles.

La **frecuencia relativa simple** de cada valor de la variable es la proporción de casos que asumen ese valor. Se indica f' .

Los dos ejemplos mostrados hasta aquí corresponden a variables medidas a nivel nominal, por lo que los números no son más que códigos, no representan orden ni puede considerarse la distancia entre ellos. ¿Qué cambia con un nivel de medición más elevado? Con el mismo principio usado para las variables nominales, la forma de la tabla de distribución de frecuencia para la edad (P4) sería:

P4	f	f'
17	16	0,11
18	17	0,11
19	21	0,14
20	18	0,12
21	17	0,11
22	12	0,08
23	10	0,07
24	16	0,11
25	16	0,11
26	7	0,05
Total	150	1,00

Sobre esta tabla se pueden calcular otras frecuencias, que respondan a preguntas como ¿cuántos alumnos de menos de 20 años respondieron? Para saber eso, hay que contar cuántos casos hay con edades menores a 20: con 17, 18 o 19 años hay 54 casos, que provienen de sumar las frecuencias de esas categorías (16+17+21).

Así, además de indicar cuántos casos (o qué porcentaje de ellos) tiene determinados valores de la variable, resulta de interés mostrar cuantos (y también que porcentaje) tienen valores *iguales o menores* a uno determinado. Esto va a ser indicado por las **frecuencias acumuladas**, que responden a la pregunta por la cantidad de casos que hay por debajo de una categoría de la variable. Pero solo para variables medidas a escala ordinal o superior, porque con variables nominales no se pueden hacer juicios de orden, como decir que una categoría es mayor o menor que otra. El cálculo de las frecuencias acumuladas consiste en contar las frecuencias de la categoría que interesa y sumarla a las frecuencias de las categorías anteriores a ella. En el ejemplo de la distribución de P4 (edades):

P4	f	f'	F	F'
17	16	0,11	16	0,11
18	17	0,11	33	0,22
19	21	0,14	54	0,36
20	18	0,12	72	0,48
21	17	0,11	89	0,59
22	12	0,08	101	0,67
23	10	0,07	111	0,74
24	16	0,11	127	0,85
25	16	0,11	143	0,95
26	7	0,05	150	1,00
Total	150	1,00		

Se agregaron dos columnas más, las frecuencias acumuladas absolutas (F) y relativas (F'). Las primeras se obtuvieron sumando a la frecuencia absoluta de cada categoría, las frecuencias absolutas de las categorías anteriores a ella. Así, la primera categoría tiene frecuencia acumulada igual a la absoluta simple, porque no hay ningún caso por debajo de 17 años; la segunda es 33, que proviene de contar los 17 de la segunda categoría y sumarle los 16 de la anterior y del mismo modo se construyen las siguientes. La última categoría tiene por frecuencia absoluta acumulada al total de casos (en el ejemplo 150), porque todos (los 150) están en esa categoría o por debajo de ella, es decir, todos tienen de 26 años para abajo. La lectura que hacemos de estas frecuencias es que, por ejemplo, "hay 72 alumnos que tienen 18 años o menos."

La **frecuencia absoluta acumulada** de cada valor de la variable es la cantidad de casos que asumen ese valor y todos los valores menores a él. Se indica *F*.

La última columna de la tabla es la transformación en relativas de las frecuencias absolutas acumuladas y se logra con el mismo procedimiento que se usó para las relativas simples; el de dividir por el total de casos. Se denominan **frecuencias acumuladas relativas**. La lectura de una de estas frecuencias es, por ejemplo, que el 48% de los alumnos que respondieron tiene 20 años o menos. Notemos la diferencia con la frecuencia relativa simple: el 12% de los alumnos tiene exactamente 20 años. La frecuencia relativa simple es la fracción de casos que tienen una determinada categoría (o valor) de la variable, la frecuencia relativa acumulada es la fracción de casos que tiene un valor de la variable o cualquiera de los anteriores a ese valor. Por eso la lectura del ejemplo es "20 años" en la simple y "20 años o menos" en la acumulada.

La **frecuencia relativa acumulada** de cada valor de la variable es la proporción de casos que asumen ese valor y todos los valores menores a él. Se indica *F'*.

Recategorización

Como se señaló al final del capítulo 1, hay dos situaciones en que se apela a la presentación de los valores de la variable en forma agrupada, es decir que se

recategoriza la variable en intervalos: si se trata de una variable discreta con muchas categorías (como la edad) o si es una variable continua.

Variable discreta con muchas categorías

La construcción de intervalos es una elección; podríamos optar por mostrar todas las categorías, con lo que quedaría una tabla grande, pero muy detallada; o bien agrupar para ganar en sencillez de presentación. Es muy común optar por la construcción de intervalos, de manera de mantener la cantidad de categorías entre cinco y diez. En tablas en que se precisa mostrar mucho detalle, se opta por la enumeración de todas las categorías. La condición de exclusión mutua se logra terminando una categoría en un valor y comenzando la siguiente en el correlativo, como cuando se construyen grupos quinquenales de edad: 0-4, 5-9, 10-14, etc.

Variable continua

Si la variable es continua la recategorización es necesaria, porque no es posible mostrar “todas las categorías” de una variable continua, ya que éstas son, en teoría, infinitas¹². Para resolver el problema de la exclusión mutua no es posible pasar de un valor al siguiente, por lo que se utiliza un criterio de intervalos abiertos o cerrados. Esto quiere decir que si una categoría es 1,75 – 1,85, se entiende que entran en el intervalo todos quienes tengan estatura superior a 1,75 (excluido este valor) hasta 1,85 (incluido). Se dice que este intervalo es abierto a la izquierda (excluye al valor inicial) y cerrado a la derecha (incluye al valor final). Una persona de 1,75 se contará en el intervalo anterior: 1,65 – 1,75, que sí incluye al 1,75 y excluye al 1,65.

Se utilizan tres criterios para recategorizar variables: intervalos iguales, intervalos proporcionales e intervalos teóricos.

Intervalos iguales:

Se organizan los valores de la variable para lograr que el campo de variación quede dividido en tantos intervalos como se desee siendo ellos de igual amplitud. Si es una variable discreta y la cantidad de categorías originales no es múltiplo de número de intervalos que se desean, la cantidad de valores en cada uno no será idéntica, sino aproximadamente igual. La variable P4 del cuestionario, con cinco categorías queda, según este criterio, así:

Grupos de edades	f
17-18	33
19-20	39
21-22	29
23-24	26
25-26	23
n	150

Con dos valores de la variable en cada categoría. Pero si se solicitan tres intervalos, estos resultan:

¹² La cantidad de valores depende de la precisión con que se haga la medición

Grupos de edades	f
17-20	72
21-23	39
24-26	39
n	150

Con cuatro valores en el primer intervalo y tres en cada uno de los otros dos.

Criterio proporcional

Este criterio busca que los intervalos incluyan aproximadamente a la misma cantidad de casos, por lo que su amplitud puede ser diferente. En el capítulo siguiente se verá que los puntos para establecer los cortes de intervalos, se llaman percentiles. Por ahora interesa que con este criterio se logran grupos homogéneos en términos de cantidad de observaciones. P4 con tres intervalos resulta así categorizada:

Grupos de edades	f
17-19	54
20-22	47
23-26	49
n	150

El último intervalo es de mayor amplitud porque hay menos alumnos de esas edades, esto quedará más claro en el próximo capítulo.

Criterio teórico

Aquí la decisión por el lugar donde establecer los puntos de corte para definir los intervalos es del investigador y debe estar fundamentada. Si se considera que la edad esperada de los alumnos observados es entre 19 y 20 años, se pueden hacer tres intervalos con quienes tienen menos de esa edad, quienes tienen la edad esperada y quienes tienen más de esa edad. Los intervalos resultan así:

Grupos de edades	f
17-18	33
19-20	39
21-26	78
n	150

El modo en que se haga la recategorización de una variable depende de una elección del investigador, que debe estar adecuadamente fundamentada. El video *categorización* muestra el modo de hacerlo en este último caso con Infostat®.

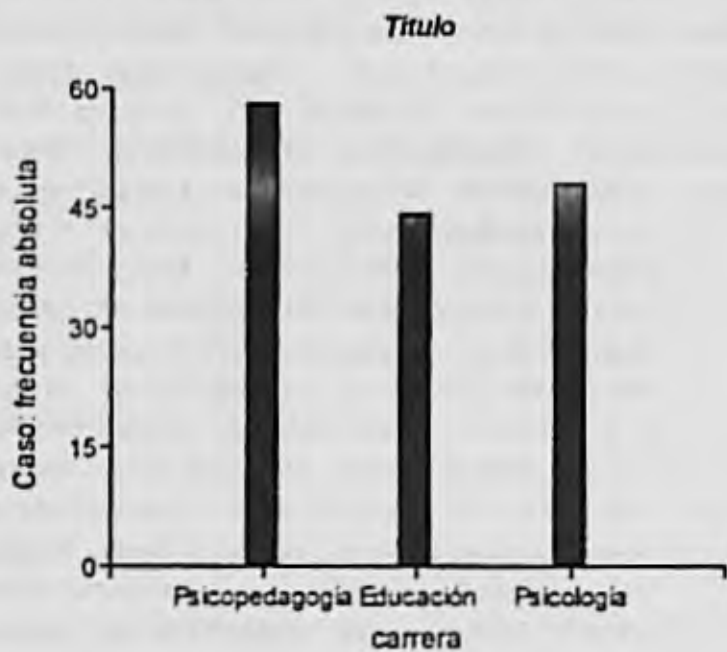
La presentación gráfica de los resultados

En la misma dirección de ofrecer una presentación de los datos recogidos que sea accesible para la interpretación, se muestran a continuación las representaciones gráficas que más se usan para describir información cuantitativa. Nuevamente

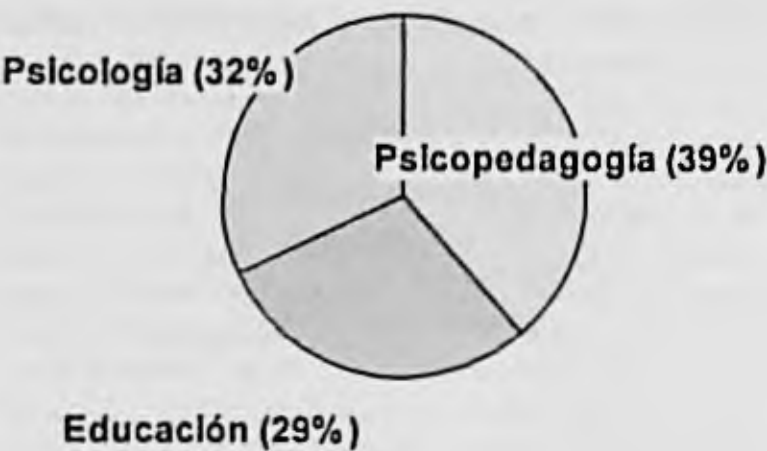
aquí se debe sacrificar la cantidad de información que se ofrece, en aras del impacto visual y facilidad de lectura que proveen los gráficos. Cuando se trata de variables nominales, normalmente con pocas categorías, son adecuados los **gráficos de barras** o los **diagramas de sectores circulares** (o “de torta”). Veamos un ejemplo para la tabla de la “carrera que cursa” que reproducimos a continuación:

Carrera que cursa	f	f ^r
Psicología	48	0,32
Educación	44	0,29
Psicopedagogía	58	0,38
Total	150	1,00

El paquete InfoStat® presenta el gráfico de barras así:



Y del siguiente modo los gráficos de sectores:

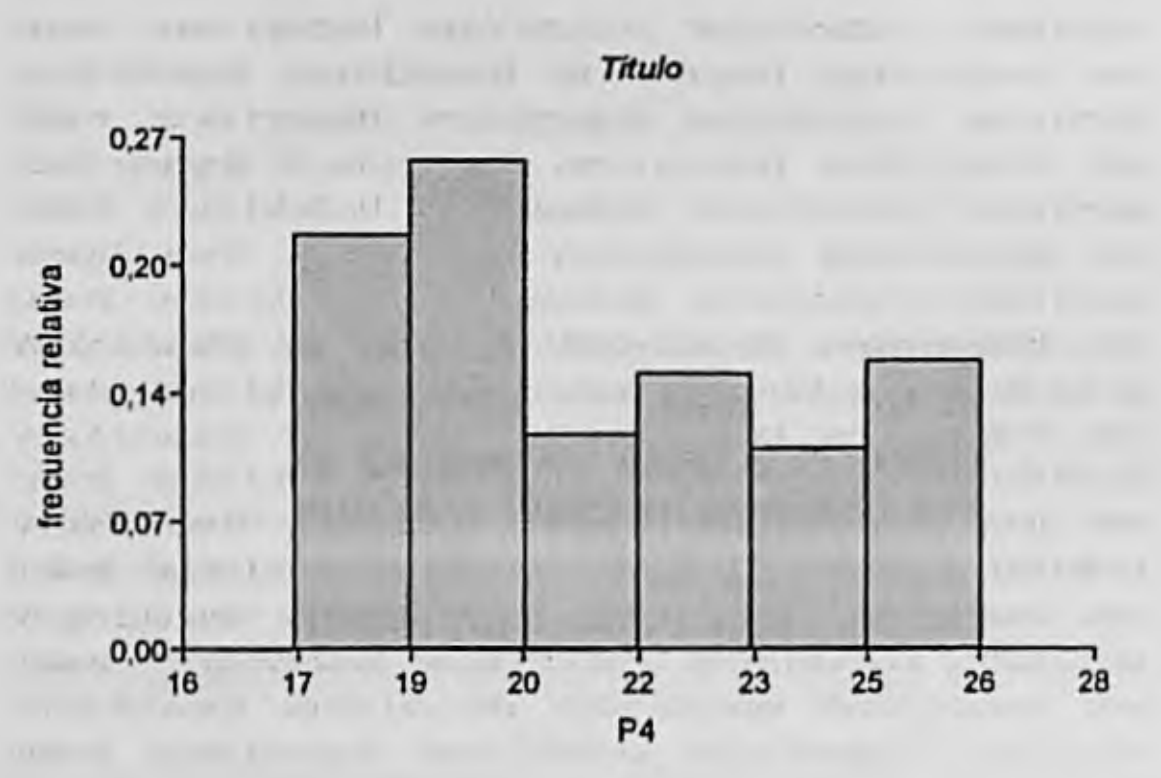


Este último gráfico solo es recomendable si la variable tiene pocas categorías (no más de tres) y las frecuencias son claramente diferentes. Esto es porque el ojo humano no es capaz de distinguir pequeñas diferencias de ángulos, como sí lo es para reconocer diferentes alturas de barras. En este ejemplo, si no estuviera el rótulo con el porcentaje, sería difícil ver la diferencia entre los sectores que

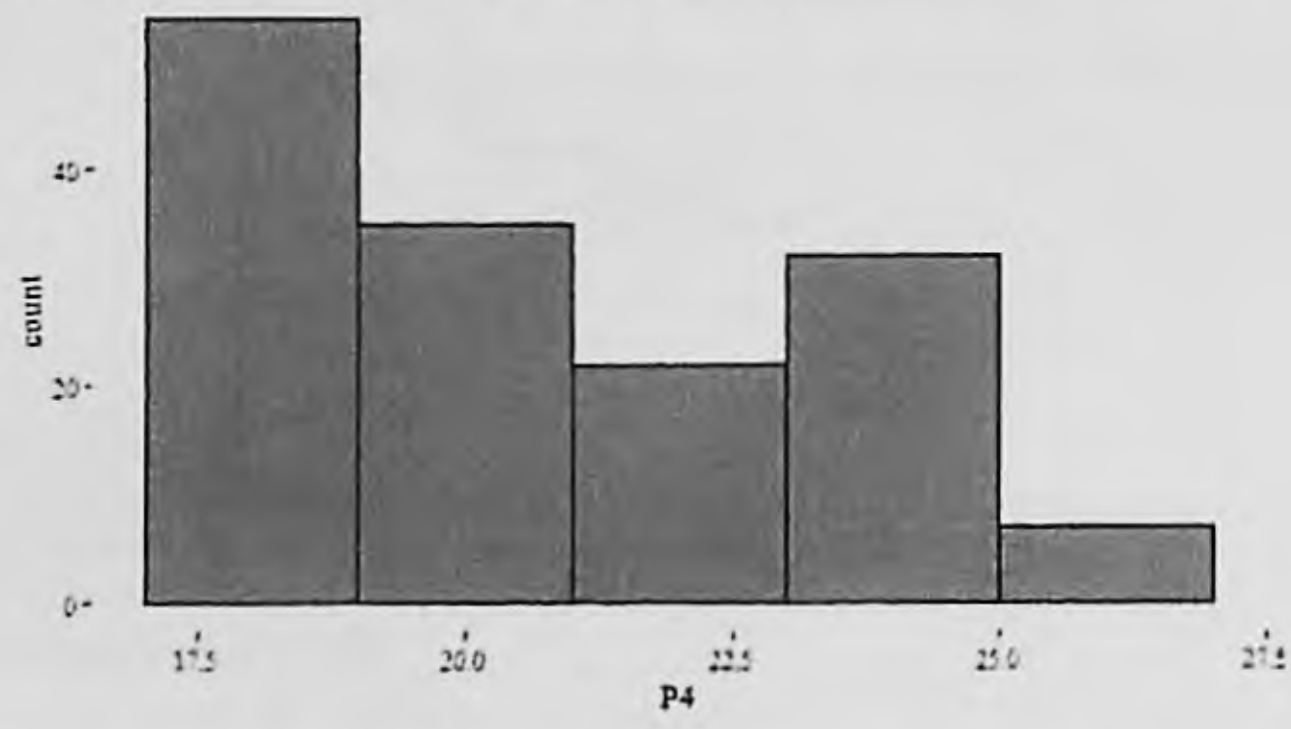
corresponden a Psicología y a Educación, mientras que en el gráfico de barras, eso se ve bien.

En los casos en que la variable tiene categorías cuantitativas (intervalar o proporcional) se utiliza un gráfico llamado **histograma**, que no es igual al de barras, que se usa con variables nominales.

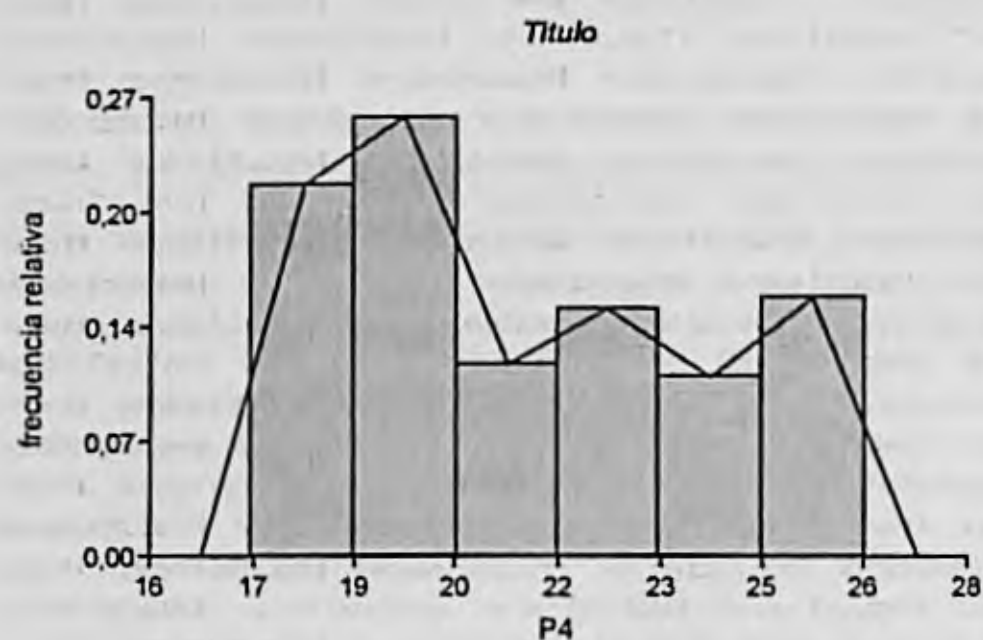
La presentación de InfoStat® para las edades de la base2018 es:



El lugar donde dice “título” es un espacio editable, para escribir el título del gráfico que elijamos. Sin embargo, los gráficos no son un punto fuerte de Infostat®, con una hoja de cálculo se logran mejores presentaciones, otros programas son más adecuados para graficar, por ejemplo R, con el que se construyó este histograma para la misma variable:



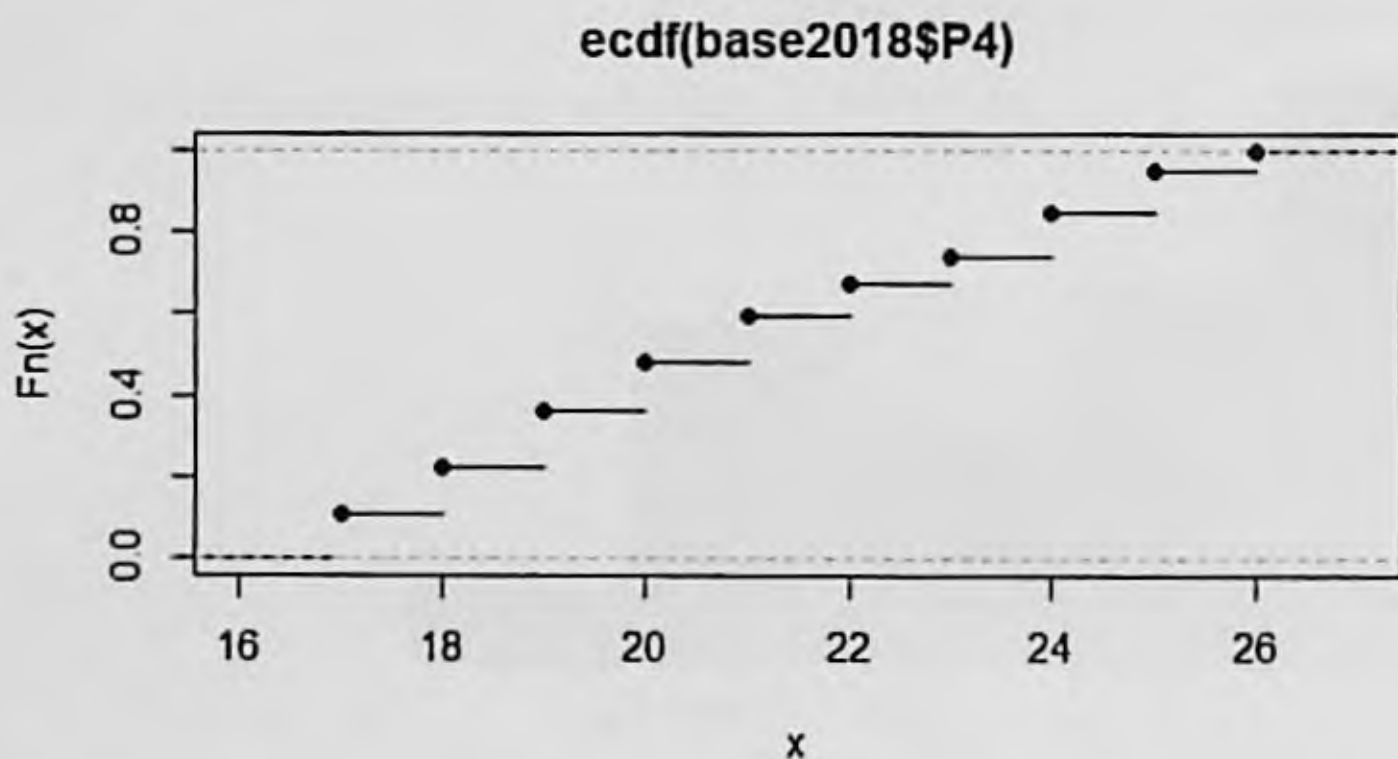
Los histogramas pueden transformarse en **polígonos de frecuencias** uniendo los puntos medios de cada intervalo como se muestra a continuación:



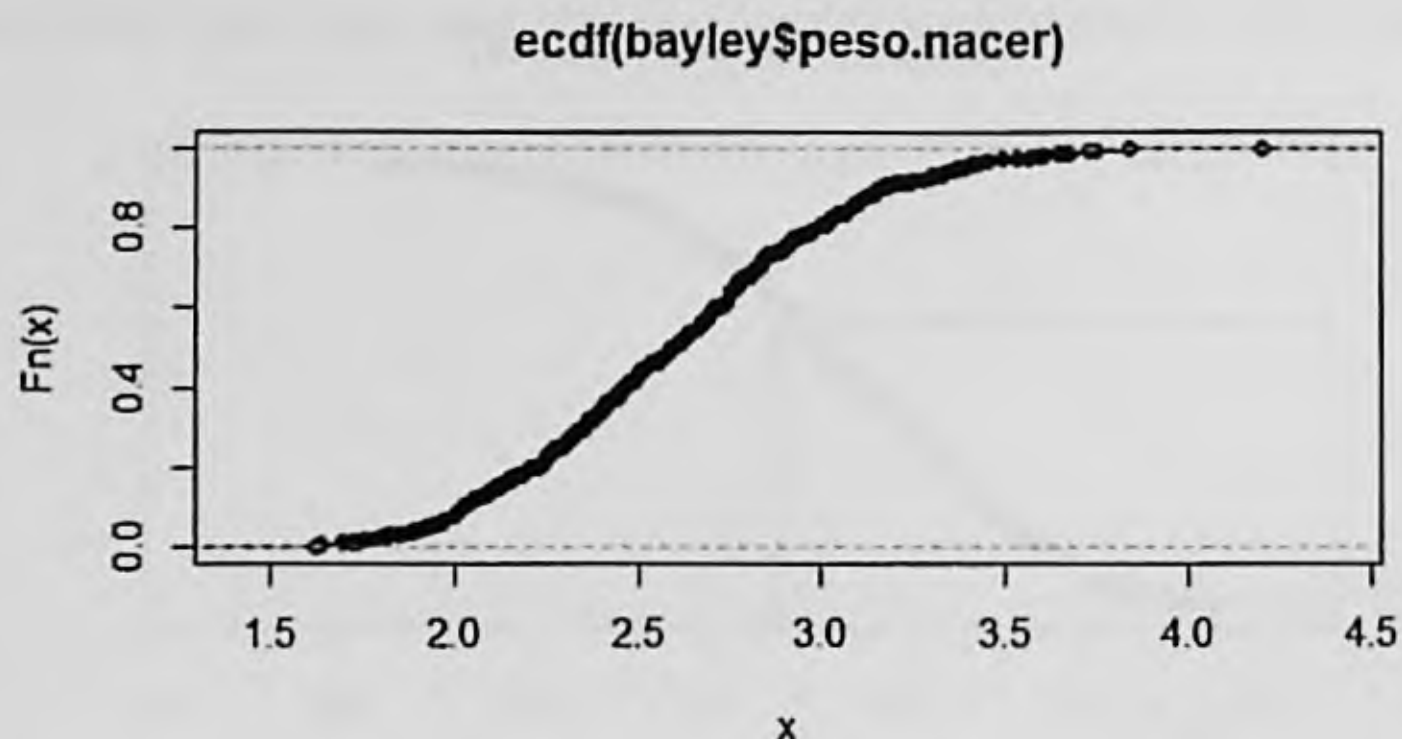
En este gráfico se agregaron dos intervalos, uno anterior al primero y uno posterior al último, cuyas frecuencias son cero, con el objetivo de “cerrar” el polígono sobre el eje horizontal.

El área que queda bajo este polígono es igual a la que encierran los rectángulos del histograma, y valdrá n si se grafican frecuencias absolutas ó 1 si son las relativas, como en este ejemplo y como más comúnmente se hace, ya que permite comparar distribuciones de frecuencia que tengan diferente número de casos.

En este tipo de variables (intervalares o proporcionales) es posible calcular frecuencias acumuladas, por lo que también ellas pueden representarse gráficamente. Si la variable es discreta, cada valor aporta su frecuencia, que “salta” en el valor siguiente, por eso el gráfico tiene forma escalonada. Para las edades de la base2018 es:



En el que el eje horizontal se indican los valores de la variable discreta edad y en el vertical las frecuencias acumuladas de cada categoría (de cada valor discreto). Si la variable es continua, las frecuencias se van acumulando gradualmente a medida que aumenta el valor de la variable, el siguiente gráfico muestra las frecuencias acumuladas de los pesos al nacer de un conjunto grande de niños:

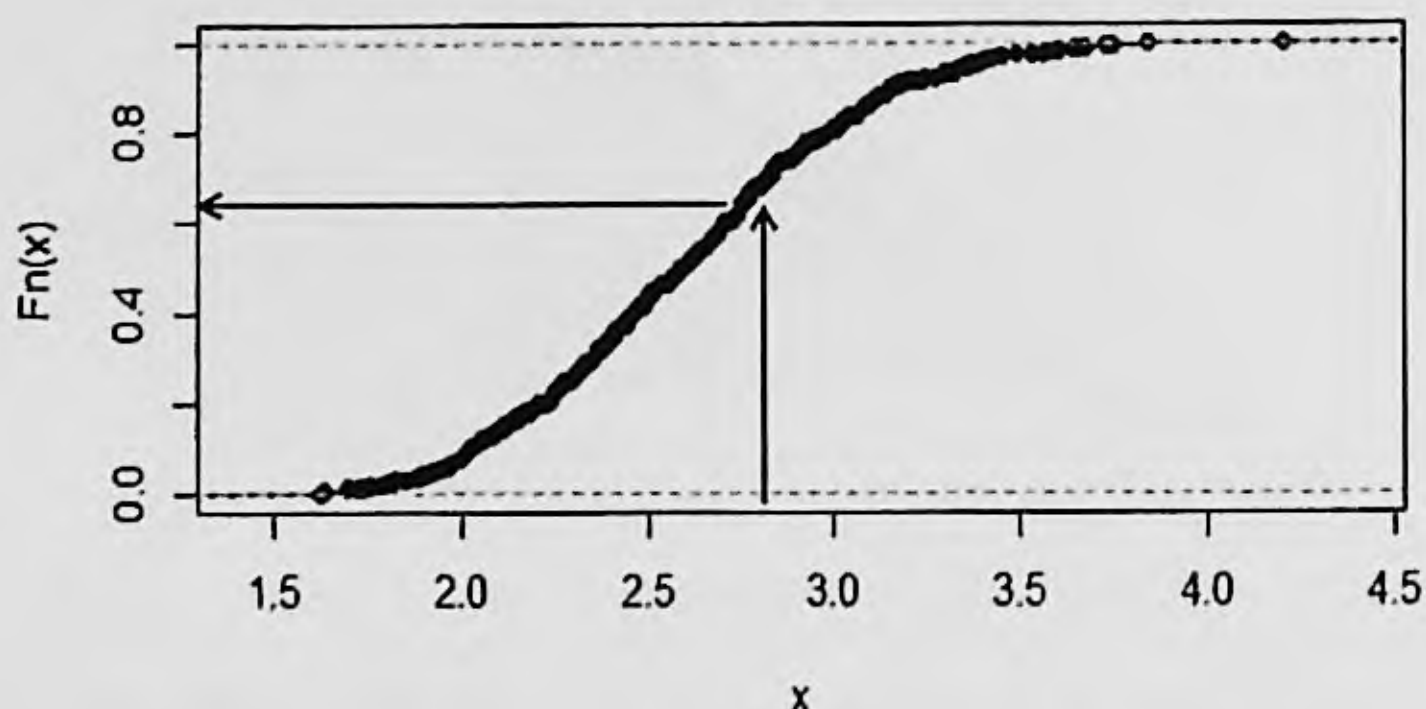


Este gráfico se llama **ojiva de Galton**¹³ y tiene otra virtud además de la claridad visual, ya que permite **interpolar** valores no observados, o que no aparecen en la tabla. Así, con el gráfico podemos responder a la pregunta ¿Qué proporción de niños nació con 2,8 kg o menos? La respuesta consiste en buscar el valor 2,8 kg e identificar la frecuencia acumulada que le corresponde.

¹³El nombre proviene de la forma arquitectónica del arco ojival, y fue presentada por primera vez por Francis Galton en 1875. Se la denomina así a pesar que su forma recuerda más al arco conopial que al ojival:

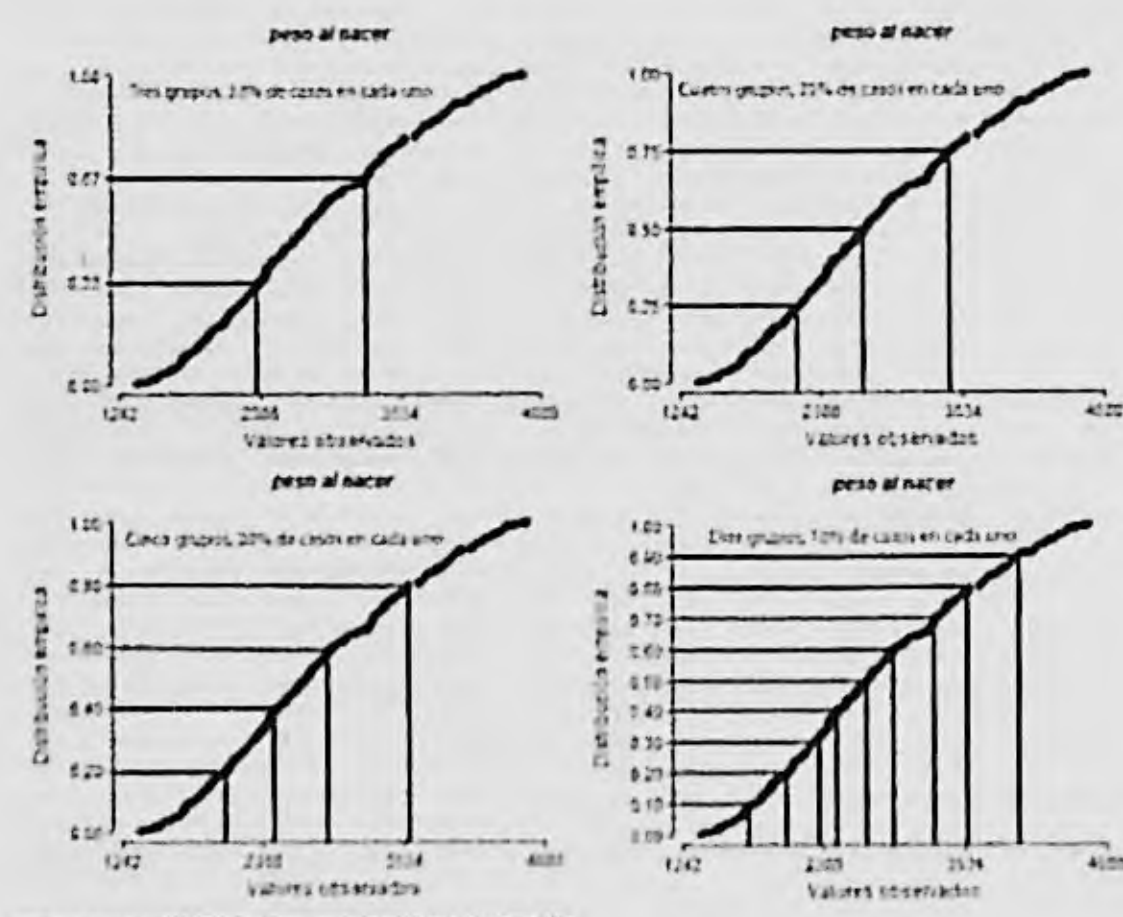
Arco ojival	Arco conopial
Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/Arco_apuntado	Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/Arco_conopial

ecdf(bayley\$peso.nacer)



En este ejemplo, la ordenada (valor en el eje vertical) correspondiente a los 2,8 kg es aproximadamente 0,7, este resultado se lee diciendo que, de esta muestra, el 70% de los niños nació con 2,8 kg o menos. En los capítulos siguientes veremos otras aplicaciones útiles de este procedimiento.

Además, el establecimiento de los límites de los intervalos según el criterio proporcional, puede realizarse en base a este gráfico. Según cuántos intervalos se quiera construir, se ubican los puntos correspondientes a las frecuencias acumuladas en el eje vertical y se buscan los valores de la variable (eje horizontal), que delimitan los intervalos. Por ejemplo, para cuatro intervalos, cada uno debe contener aproximadamente el 25% de los casos. Se ubican las frecuencias acumuladas de 25, 50 y 75%. Los siguientes gráficos ilustran el uso de la ojiva de Galton para establecer 3, 4, 5 y 10 puntos de corte en una variable continua (pesos al nacer).



Obsérvese que la amplitud de los intervalos (en el eje horizontal) es diferente, pero la proporción de casos que cada uno contiene (eje horizontal), es la misma.

Resumen de definiciones

Frecuencia	Símbolo	Significado	Nivel en que tiene interpretación
Absoluta simple	f	Cantidad de observaciones en cada categoría de la variable	Todos
Relativa simple	f'	Proporción de observaciones en cada categoría de la variable	Todos
Absoluta acumulada	F	Cantidad de observaciones en cada categoría de la variable y en todas las anteriores a ella	Ordinal o superior
Relativa acumulada	F'	Proporción de observaciones en cada categoría de la variable y en todas las anteriores a ella	Ordinal o superior

O, de manera más compacta:

	Simple (en la categoría)	Acumuladas (en la categoría y las anteriores)
Absolutas (cantidad de casos)	f	F
Relativas (proporción de casos)	f'	F'

Capítulo 3 La expresión resumida de la información

La segunda etapa en la descripción de datos consiste en calcular medidas que los resuman, que los expresen de manera sintética. Esta etapa implica un nuevo alejamiento de la información bruta, ya que se pierde de vista no solo a los individuos —presentes en la matriz de datos—, sino también a las distribuciones de frecuencia. La ventaja de resumir es la posibilidad de presentar la información de modo muy sintético; con unas pocas medidas descriptivas se ofrece bastante información sobre los datos que se han recogido.

Estas medidas requieren operaciones de diferente nivel de complejidad, por lo que apelan a diferentes propiedades de las escalas de medición, entonces no serán las mismas las medidas que se puedan calcular en una escala nominal que en una ordinal, intervalar o proporcional.

El objetivo de describir el conjunto de datos se logrará indicando tres tipos diferentes de medidas. En primer lugar, haremos referencia a las medidas de **posición**. Estas medidas indican en torno a qué valores se distribuyen las observaciones. Dentro de las medidas de posición, definiremos las medidas **centrales**, (también llamadas de **centralidad** o de **tendencia central**), y las **no centrales**. En segundo lugar, mencionaremos las medidas de **dispersión** (conocidas también como de **variabilidad**), que muestran si los datos están concentrados alrededor de las medidas de centralidad o si están alejados de esas medidas centrales. En tercer lugar, se describe la **forma** que toma la distribución, medida con dos indicadores: **simetría** y **curtosis**.

A los fines de la notación usada para referirse a cada una de estas medidas descriptivas, asumiremos que trabajamos sobre datos provenientes de una muestra, de la que n representa la cantidad de casos observados.

Medidas de posición

Como las operaciones que pueda hacerse entre las categorías dependen del nivel de medición de las variables, las medidas que se puedan calcular también dependerán del nivel de medición. Por eso las presentaremos separadamente para cada nivel, siempre recordando que las operaciones que son válidas a un determinado nivel de medición también son válidas para niveles más altos. Por ejemplo: lo que pueda hacerse con variables nominales, vale también para ordinales y métricas, con los ajustes de casa caso.

Medidas de centralidad

Son las que indican alrededor de qué valores se ubican las observaciones de una distribución de frecuencias.

Variables nominales: proporciones

Cuando se trabaja con una variable de nivel nominal, una manera sintética de presentar la información que ofrece la tabla de distribución de frecuencias es indicando la **proporción** de casos que se encuentran en una determinada categoría. Se trata de la frecuencia relativa simple (f) de una categoría particular. Sea la siguiente una clasificación de los diagnósticos dados por un psicólogo a un conjunto de pacientes:

Tabla 1		
Diagnóstico	f	f ^r
Psicosis	10	0,125
Neurosis	50	0,625
Perversión	20	0,250
Total	80	1,000

Podemos indicar la proporción de casos diagnosticados como psicosis, como $p=0,125$, que puede también expresarse como 12,5%. La elección de cuál categoría se elige para indicar la proporción solo depende de los objetivos de la descripción. Al elegir una categoría se llama la atención sobre ella, se la destaca, ya que la proporción restante incluye a todas las demás categorías, los “otros”. Esa proporción restante se obtiene restando de 1 (uno) la proporción indicada, o restando de 100 (cien) si ha expresado como porcentaje. En nuestro ejemplo, diremos que 0,875 (que proviene de hacer $1-0,125$) es la proporción de *otros diagnósticos* o bien que éstos representan el 87,5% ($100-12,5$).

La **proporción** es la frecuencia relativa correspondiente a una categoría particular. Usualmente se expresa como porcentaje. Se indica como p .

Esta medida descriptiva se usa a menudo cuando la variable nominal tiene solo dos categorías (variable dicotómica), ya que se presenta la proporción de una de ellas e inmediatamente se sabe que el complemento es la proporción de la otra. Si se trata de pacientes que consultan a un servicio de admisión psicológica en un hospital, ellos pueden ser clasificados como sigue:

Tabla 2		
Resultado de la entrevista de admisión	f	f ^r
Admitido como paciente	150	0,75
No admitido	50	0,25
Total	200	1,00

Eligiendo como categoría de referencia “Admitido como paciente”, resulta ser $p=0,75$, que dice que la proporción de pacientes admitidos es de 0,75, o del 75%. Si se resume la tabla diciendo que “el 75% de las personas que consultan es admitido”, se sabe de inmediato que el 25% restante no es admitido.

Esta medida ya apareció al definir la proporción como el cociente entre la frecuencia propia de la categoría y el total de casos. Esta proporción puede también indicarse en variables de nivel de medición superior al nominal, pero no resulta de interés cuando hay gran cantidad de categorías. Así, por ejemplo, si se trata de la distribución de las notas de un parcial, no se estila indicar cuál es la proporción de cada calificación e indicar algo como “el 20% sacó 8” (lo que se vería en una tabla de distribución de frecuencias de las notas). Por el contrario, es común construir variables nominales a partir de las notas y es de mucho interés indicar, por ejemplo, la proporción de *promocionados*, o la proporción de quienes *quedaron libres*.

Variables nominales: tasas

Se define habitualmente como **tasa** a la frecuencia relativa de un fenómeno en referencia a una población total, con la característica de tener en cuenta un periodo de tiempo. También es común el uso del término cuando se trata de hechos de poca incidencia, es decir que su frecuencia es pequeña. En esos casos se la suele expresar cada 1.000, cada 10.000, o inclusive cada 100.000 casos. Por ejemplo, la tasa de mortalidad por accidentes de vehículos de motor de personas entre 25 y 34 años de edad en México, en 1972¹⁴, es de 12,6 por 100.000. La lectura de este dato debe hacerse considerando que el total sobre el que se calcula corresponde al total de personas de ese grupo de edad. Se obtienen dividiendo la cantidad de ocurrencias (muertes, nacimientos, casos nuevos de enfermedad, etc.) en una población dada en un momento especificado.

Variables nominales: razones

La palabra **razones** se usa a menudo para referirse a cocientes calculados entre conjuntos que no tienen elementos en común. Por ejemplo, se llama razón de masculinidad a la cantidad de hombres por cada 100 mujeres que hay en una población. Se obtiene dividiendo el total de varones por el total de mujeres (y luego multiplicando por 100), que son dos conjuntos que no se superponen. Esta medida se conoce también como índice de masculinidad.

Por ejemplo: el grupo de estudiantes que cursó Estadística en Psicología en 2010 estuvo compuesto por 1050 mujeres y 280 varones, por lo que la razón de masculinidad es de 27 (que resulta de $280/1050 \cdot 100$), al que leemos como 27 varones por cada 100 mujeres.

En la población general de la ciudad de Córdoba, según el censo de 2010, la razón (o índice) de masculinidad es de 91,9 varones cada 100 mujeres. La diferencia entre una razón y una tasa es que en la primera, el numerador no está incluido en el denominador. También se la indica como **ratio**.

Variables nominales: el modo

El **modo**, o **moda**, o **valor modal** es el valor de la variable (la categoría) que tiene la mayor frecuencia. Dicho de otra manera, el valor de la variable más frecuentemente observado¹⁵. Esta medida no requiere ningún cálculo, no exige ninguna propiedad de la escala de medición, por lo tanto se puede indicar en variables desde el nivel nominal, es decir en todos los niveles de medición.

La variable *carrera que cursa*, tiene la siguiente distribución:

carrera	f	f _r
Educación	44	0,29
Psicología	48	0,32
Psicopedagogía	58	0,39
Total	150	1,00

El modo es Psicopedagogía, que es la categoría de mayor frecuencia. Debe cuidarse de no cometer el error de señalar la frecuencia 58 como el modo; el modo no es la

¹⁴ Tomado de Guerrero et al (1986). Material bibliográfico de la Cátedra de Psicología Sanitaria.

¹⁵ Esta es la idea que transmite el lenguaje coloquial: cuando algo es "la moda", es lo que más comúnmente (frecuentemente) se ve.

frecuencia más alta, sino la categoría de la variable que tiene mayor frecuencia. Para hallarlo, se identifica la más alta de las frecuencias y se señala la categoría que le corresponde.

Si se trata de una variable de mayor nivel de medición, no hay ninguna diferencia. La variable *concepto que los docentes asignan a los alumnos* tiene la distribución de frecuencias siguiente:

concepto	f
Excelente	150
Muy bueno	350
Bueno	200
Satisfactorio	120
No satisfactorio	50
Total	870

En este ejemplo, 350 es la frecuencia más alta, por lo tanto, la categoría que a ella corresponde es el modo: el modo de la distribución es "Muy bueno".

El **modo** es la categoría —o el valor— de la variable que tiene mayor frecuencia.
Se indica M_o

Cuando se trabaja sobre variables intervalares o proporcionales discretas no hay diferencia en la identificación del modo de la distribución. El *número de materias que tienen aprobadas alumnos que han terminado de cursar el primer año de su carrera* se distribuye así:

Cantidad de materias aprobadas	f
0	30
1	150
2	200
3	300
4	250
5	200
6	20
Total	1150

En esta distribución, el modo es 3 materias aprobadas ($M_o=3$), que es la categoría que tiene mayor frecuencia. Expresamos esto como "la mayor cantidad de alumnos que terminaron de cursar primer año han aprobado tres materias".

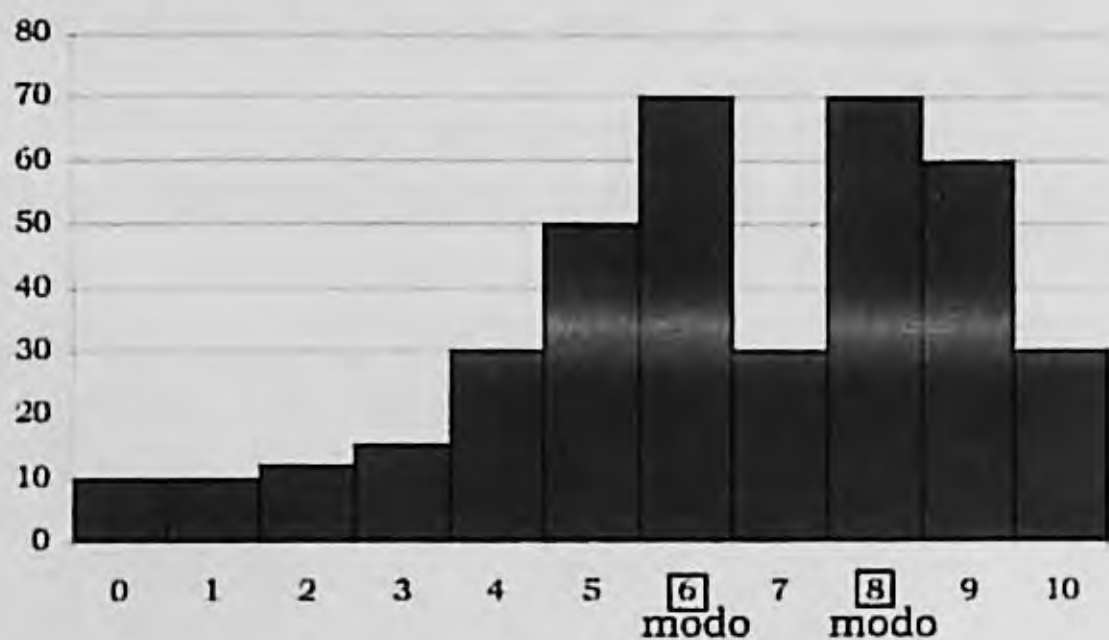
Puede suceder que en una distribución no haya una única categoría de mayor frecuencia, sino que dos o más compartan la mayor frecuencia. Para 160 alumnos clasificados según la facultad en que cursan su carrera, tenemos:

Facultad a la que pertenece	f
Arquitectura	50
Ingeniería	40
Psicología	50
Filosofía	20
Total	160

Vemos aquí que hay dos categorías que presentan la mayor frecuencia: Arquitectura y Psicología. Decimos en este caso que la distribución es **bimodal** que quiere decir que tiene dos modos.

Una distribución es **bimodal** cuando dos categorías tienen la mayor frecuencia. Si son más las categorías que comparten la mayor frecuencia, la distribución se denomina **multimodal**

Una representación gráfica de una distribución bimodal, para la variable *número de respuestas correctas en una prueba de opción múltiple*, la siguiente



La moda tiene el inconveniente de ser independiente de la mayor parte de los datos, por lo que es sensible a cambios en los valores de la distribución. En efecto, las siguientes dos muestras de 130 escuelas tienen la misma moda (M_o =Pública), aunque son muy dispares:

Gestión de la escuela	f	Gestión de la escuela	f
Pública	50	Pública	100
Privada laica	45	Privada laica	20
Privada confesional	35	Privada confesional	10
total	130	total	130

Variables ordinales: la mediana

Como ya hemos visto, cuando las categorías de la variable están ordenadas pueden hacerse juicios como “mayor que” (>) o “menor que” (<), y el nivel de medición es ordinal. En este tipo de variables puede calcularse otra medida de centralidad, que usa esa propiedad: la del orden entre categorías. Se trata de la **mediana**, que se podrá también calcular para escalas superiores (intervalar y proporcional) pero no para escalas nominales, en las que el orden entre categorías no está presente.

Esta medida se define como el valor de la variable que deja por debajo la mitad del total de observaciones. Se trata de la mitad de los casos y no la mitad de las categorías. La siguiente distribución presenta en serie simple ordenada el número de sesiones de psicoterapia que recibieron 9 pacientes internados en un hospital:

2, 2, 3, 5, 7, 10, 15, 19, 50

La mediana de estos datos es 7, porque es el valor que deja cuatro casos por debajo y también cuatro casos por encima. Atención a que la serie simple debe estar ordenada para poder identificar a la mediana.

Si la cantidad de observaciones fuera par como por ejemplo:
2, 2, 3, 5, 7, 10, 15, 19

El punto de corte correspondiente a la mitad de las observaciones se ubica entre 5 y 7, en este caso, la mediana es el promedio entre los dos valores centrales, que es 6.

Cuando hay valores repetidos en la parte central no resulta posible indicar la mediana, por ejemplo si la serie fuera:
2, 3, 7, 7, 7, 10, 15, 19

No puede señalarse a 7 como la mediana, porque es superado por tres valores (10, 15 y 19) pero supera solo a dos (2 y 3).

La mediana es una medida muy adecuada cuando se necesitan resumir datos que provienen de escalas ordinales o de nivel superior. Sin embargo, su cálculo no aporta nada en series simples con pocos casos (como los que acabamos de ver) ya que allí es más sencillo mostrar el conjunto completo de datos y no usar medidas resumen. Los ejemplos sirven para ilustrar el concepto, pero no es usual en la práctica. Las operaciones de resumen se justifican cuando se tiene un conjunto grande de datos.

Se denomina **mediana** al valor de la variable que deja por debajo a la mitad de las observaciones. La mediana deja la misma cantidad de casos por debajo y por encima de ella. Se indica M_{dn} .

Veamos la forma de reconocer a la mediana cuando los datos están presentados en una distribución de frecuencias. La siguiente es una clasificación de hogares por nivel socioeconómico:

Nivel socioeconómico	f (número de hogares)	F
Marginal	40	40
Bajo	100	140
Medio-bajo	120	260
Medio	150	410
Alto	30	440
Total	440	

La mitad del número total de casos es 220, que resulta de dividir por dos los 440 casos del total ($440/2$, equivalente a $(1/2)*440$). Entonces, para hallar la mediana, se debería identificar al caso (al hogar en el ejemplo) que ocupa el lugar 220. Según la tabla, hasta la categoría “medio-bajo” se acumulan 260 hogares y hasta la categoría anterior hay 140 acumulados. De manera que el hogar que ocupa el lugar 220 es uno de los que se encuentran en la categoría “medio-bajo”. Diremos así que la mediana de esta distribución es “medio-bajo”. Como puede verse, esta categoría no acumula exactamente la mitad de las observaciones, pero

es la que contiene a la observación que supera a la mitad y es superada por la otra mitad. Por esa razón la leemos como la mediana, diciendo que la mitad de los hogares tiene un nivel socioeconómico medio-bajo o inferior a ese.

La imprecisión señalada en este ejemplo también aparece si se trata de una variable cuantitativa discreta. Si la variable es el *número de síntomas* a partir de los cuales fueron diagnosticados de esquizofrenia un conjunto de pacientes¹⁶:

Cantidad de síntomas	f (número de pacientes)	F
2	30	30
3	60	90
4	70	160
5	90	250
Total	250	

La mitad del número total de casos es de 125 ($250/2$ ó $(1/2)*250$), ¿cuál es el caso que ocupa ese lugar? Vemos que hasta 3 síntomas se acumulan 90 pacientes y 160 hasta los 4. El paciente que ocupa el puesto 125 en la serie simple ordenada es uno de los que fueron diagnosticados a partir de 4 síntomas. Por esa razón indicamos a la mediana con ese valor: 4, $M_{dn}=4$. Nuevamente encontramos que no es exactamente el valor que acumula la mitad, sino uno de los que están en la categoría dentro de la cual se acumula la mitad de los casos. La primera categoría que tenga una frecuencia acumulada superior al 50% será la que contenga a la mediana. Es así porque la clase anterior no alcanza a acumular la mitad de las observaciones. La lectura del resultado es que la mitad de los pacientes fue diagnosticada de esquizofrenia en presencia de cuatro síntomas o menos.

Sea la variable *número de materias aprobadas*:

Número de materias aprobadas	f	F
0	30	30
1	150	180
2	200	380
3	300	680
4	250	930
5	200	1130
6	20	1150
Total	1150	

La mitad de 1150 es 575, la primera frecuencia acumulada que supera a 575 es 680, que corresponde al valor 3. La mediana de esta distribución es entonces tres materias aprobadas y diremos que el 50% de los alumnos aprobó tres materias o menos.

¹⁶ El manual DSM IV indica como síntomas característicos a dos (o más) de los siguientes, cada uno de ellos presente durante una parte significativa de un periodo de 1 mes: ideas delirantes, alucinaciones, lenguaje desorganizado (p. ej., descarrilamiento frecuente o incoherencia), comportamiento catatónico o gravemente desorganizado, síntomas negativos, por ejemplo, aplanamiento afectivo, alogia o abulia.

Cuando se trata de variables de nivel intervalar o proporcional y con categorías agrupadas, el cálculo anterior puede refinarse. Así, primero se identifica la categoría (el intervalo) en que se encuentra la mediana, igual que en los dos ejemplos anteriores y luego se interpola dentro del intervalo para encontrar su valor exacto.

Tiempo de reacción (en segundos)	f	F
1,0-1,5	5	5
1,5-2,0	7	12
2,0-2,5	6	18
2,5-3,0	3	21
3,0-3,5	8	29
3,5-4,0	5	34
Total	34	

La mitad de las 34 observaciones es 17, por lo que debe encontrarse una observación que tenga frecuencia acumulada de 17. Ese valor no aparece en la F, el primero que lo supera es 18, entonces la mediana estará en el intervalo 2,0-2,5. Esto es así porque hasta 2,0 se acumulan 12 casos (la F de la categoría anterior) y hasta 2,5 se acumulan 18. Nuestros 17 casos se acumulan para un valor de la variable que está entre 2,0 y 2,5.

Debemos ahora encontrar qué valor exactamente es la mediana, dentro del intervalo 2,0-2,5. La fórmula para este procedimiento es la siguiente:

$$M_{dn} = l_i + i * \left(\frac{\frac{n}{2} - F}{f_p} \right)$$

En la que:

l_i indica el límite inferior del intervalo en que se encuentra la mediana, en este caso es 2,0.

i es la amplitud del intervalo, es decir la diferencia entre los límites 2,0-2,5 = 0,5

$\frac{n}{2}$ es la mitad del número total de observaciones, en este caso, 17

F_d es la frecuencia acumulada por debajo de la categoría que contiene la mediana, en esta tabla es 12

f_p es la frecuencia propia del intervalo en que se encuentra la mediana. Es la frecuencia absoluta (no la acumulada), en este ejemplo es 6.

Reemplazando resulta:

$$M_{dn} = 2,0 + 0,5 * \left(\frac{17 - 12}{6} \right) = 2,0 + 0,5 * \left(\frac{5}{6} \right) = 2,42$$

Conviene detenerse en el orden en que se realizaron las operaciones. El signo más (+) separa términos, por lo que debe primero resolverse el segundo de ellos y luego recién sumar 2,0. Un error frecuente es el de sumar 2,0+0,5 y luego multiplicar por el resultado del paréntesis, eso es incorrecto.

Por cierto que debe verificarse que el valor encontrado se ubique dentro del intervalo; en este ejemplo, la mediana no podría ser menor que 2,0 ni mayor que 2,5. Observemos también que el número de categorías de la variable, que es de 6,

no participa en el cálculo de la mediana, de ningún modo se trata de una categoría que esté "al medio".

El resultado obtenido nos dice, según la definición de la mediana que "el 50% de los sujetos experimentales reaccionó en un tiempo de 2,42 segundos o inferior". Es muy importante la última parte de la lectura, porque cuando decimos "o inferior" incluimos los valores por debajo del indicado.

La mediana encontrada, de 2,42, es un valor razonable a partir de la observación de la tabla: la categoría de la mediana acumulaba 18 casos, que es apenas más que la mitad de las observaciones (17), por lo que era de esperar que la mediana apareciera cerca del límite superior del intervalo, que es lo que sucedió.

Este procedimiento para calcular la mediana es impreciso, porque supone que los valores están distribuidos de manera uniforme dentro de cada intervalo. Si los 6 valores que contiene el intervalo 2,0 – 2,5, fueran todos iguales a 2,01, por ejemplo, la mediana sería un número bastante menor al que se calculó con este método. El uso de la interpolación solo se justifica en situaciones en que la única información disponible es la tabla con los valores agrupados; por el contrario, si se cuenta con la matriz de datos, el cálculo debe hacerse usando todos los valores observados de la variable. Como esto es largo para hacer manualmente, se solicita a un software especializado.

Variables métricas: la media o promedio

Si se ha alcanzado un nivel de medición intervalar o proporcional, es posible hacer uso de las propiedades¹⁷ que estas escalas tienen. Recordemos que además de designar y ordenar, las escalas intervalares conservan las distancias entre observaciones, y las proporcionales agregan la proporcionalidad de los valores absolutos y el carácter absoluto del cero. En este nivel los números que representan las categorías (o valores) pueden tratarse como tales y se puede operar con ellos. Antes de dar una definición de la media o promedio, veamos la idea intuitiva que tenemos, ya que se trata de una medida de mucho uso. Cuando queremos calcular un promedio "sumamos y dividimos por la cantidad de casos". Así, si tres personas cometen 5, 8 y 12 errores cada uno, el promedio de esa variable (número de errores) es $\frac{5+8+12}{3} = \frac{25}{3} = 8,33$. Usaremos la expresión $\bar{x}$ para referirnos a la media, con lo que el resultado se escribe: $\bar{x} = 8,33$ errores.

¿Cómo extenderemos esta forma de cálculo al caso en que la variable no está presentada en serie simple sino en distribución de frecuencias? Recordando que la frecuencia indica la cantidad de veces que cada valor se repite, por lo que habrá que considerar cada valor tantas veces como lo indique su frecuencia absoluta simple. Veamos un ejemplo en el que se cuenta el número de materias aprobadas:

¹⁷Propiedades que se agregan a las de las escalas de menor nivel, por lo que modo y mediana pueden calcularse e interpretarse también en las escalas métricas.

Número de materias aprobadas	f
0	30
1	150
2	200
3	300
4	250
5	200
6	20
Total	1150

El valor 0 (cero) está repetido 30 veces, lo que indica que hay 30 alumnos que no han aprobado aún ninguna materia. Del mismo modo, 150 alumnos aprobaron 1 materia, etc., por lo que si estuvieran presentados en serie simple, se sumarían los 1150 valores (30 veces el 0, 150 veces el 1, etc.) y esa suma se dividiría por 1150. Para hacerlo sobre la distribución de frecuencia, se multiplica cada valor de la variable por su frecuencia (que es equivalente a sumarlo tantas veces como aparece) y se divide por el total de casos. Resulta:

$$\bar{x} = \frac{0 \cdot 30 + 1 \cdot 150 + 2 \cdot 200 + 3 \cdot 300 + 4 \cdot 250 + 5 \cdot 200 + 6 \cdot 20}{1150} = 3.10$$

La expresión formal de este cálculo es:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i \cdot f_i}{n}$$

En la que x_i es cada valor de la variable, f_i es su frecuencia absoluta simple, k es el número de categorías y n es el total de observaciones. La fórmula indica que cada valor de la variable (x_i) se multiplica por su frecuencia (f_i), se suman desde el primero ($i=1$) hasta el último (k) y el resultado se divide por el total de casos (n).

Veamos que no se trató como podríamos haber pensado rápidamente, de sumar desde el cero hasta el seis y dividir por siete. Haber hecho eso habría implicado dos errores: el primero es el de no considerar cuántas veces está repetido cada valor (su frecuencia absoluta simple), el segundo es el de confundir el número de casos (1150) con el número de categorías (7). Este último error puede provenir de una confusión entre la presentación en serie simple o en distribución de frecuencias. Cuando se observa una serie simple, los valores "sueltos" de la variable coinciden con sus categorías, pero cuando se agrupa, cada categoría incluye cierta cantidad de casos que tienen el mismo valor, lo cual está indicado en la frecuencia de cada categoría.

En el ejemplo anterior entonces, el número promedio de materias aprobadas es 3,10. Este número no es entero y no es un valor que se pueda observar; nadie tiene 3,10 materias aprobadas. Sin embargo, es valioso para caracterizar a la distribución completa y para hacer comparaciones. Por ejemplo, si en un grupo de alumnos la media es de 3,10 materias aprobadas y en otro de 3,90; puede decirse que en el segundo grupo los alumnos han aprobado —en promedio—, más materias; aunque ninguno haya aprobado 3,10 ni 3,90 materias.

Por el momento ofreceremos una definición operacional de la media, más adelante podrá darse una definición conceptual, basada en sus propiedades.

La **media** (o promedio) es un valor de la variable obtenido sumando todas las observaciones multiplicadas por su frecuencia absoluta y dividiendo el resultado en el número total de casos. Se indica como $\bar{x}$ (equis media).

Cuando la distribución de frecuencias presenta los datos agrupados, aparece el problema de no tener un único valor en cada categoría. Por ejemplo y nuevamente en el caso de los tiempos de reacción:

Tiempo de reacción (en segundos)	f
1,0-1,5	5
1,5-2,0	7
2,0-2,5	6
2,5-3,0	3
3,0-3,5	8
3,5-4,0	5
Total	34

Aquí no hay un valor único en cada categoría, sino un intervalo que incluye diferentes valores. Esto se resuelve considerando, para cada intervalo, su **marca de clase** (el punto medio), que es el promedio de los extremos de cada intervalo. La siguiente tabla agrega las marcas de clase de cada intervalo, indicadas como x' :

Tiempo de reacción (en segundos)	x'	f
1,0-1,5	1,25	5
1,5-2,0	1,75	7
2,0-2,5	2,25	6
2,5-3,0	2,75	3
3,0-3,5	3,25	8
3,5-4,0	3,75	5
Total		34

Ahora puede usarse el método anterior para calcular la media, tomando las marcas de clase como los valores de la variable:

$$\bar{x} = \frac{1,25 * 5 + 1,75 * 7 + 2,25 * 6 + 2,75 * 3 + 3,25 * 8 + 3,75 * 5}{34} = 2,5$$

Resulta así que el tiempo promedio de reacción es de 2,5 segundos. Este procedimiento es impreciso, porque asigna a todos los casos que están dentro de cada categoría el mismo valor (el centro del intervalo) y se justifica en situaciones en que la única información disponible es la tabla con los valores agrupados; si se cuenta con la matriz de datos, el cálculo debe hacerse usando todos los valores observados de la variable, recurriendo a un software especializado cuando sean muchos datos.

Si bien la media es una medida muy valiosa para resumir un conjunto de datos, a veces se hace un uso abusivo de ella, al aplicarla a variables que no tienen el nivel de medición adecuado para autorizar su uso. Un ejemplo de esto es el caso

de las calificaciones escolares, que solo permiten ordenar a los alumnos según los resultados, pero que no implican la proporcionalidad de los valores (quien obtiene 10 no sabe el doble que quien obtiene 5). Aun así, es habitual que se calcule incorrectamente el “promedio de las notas”.

Medidas no centrales

Los cuartiles

Si la variable tiene un nivel de medición ordinal o superior, entonces podemos usar el mismo razonamiento con el que definimos la mediana para hacer cortes más finos en una distribución de frecuencia. Así, si la mediana nos indica el valor de la variable que deja por debajo la mitad de los casos, es lícito preguntar también por el valor que deja por debajo un cuarto de los casos, o también el que deja por debajo las tres cuartas partes de las observaciones. Estos puntos de corte se denominan respectivamente: primer cuartil y tercer cuartil.

El primer cuartil es el valor de la variable que deja por debajo un cuarto, o el 25% del total de observaciones.

El tercer cuartil es el valor que deja por debajo las tres cuartas partes o el 75% del total de observaciones. Como se ve, tanto el modo de cálculo como la interpretación son análogos a la mediana. Veamos su aplicación a los ejemplos anteriores:

Número de materias aprobadas	f	F
0	30	30
1	150	180
2	200	380
3	300	680
4	250	930
5	200	1130
6	20	1150
Total	1150	

Para encontrar el primer cuartil será ahora necesario buscar un cuarto del total de casos: 287,5 $((1/4) \cdot 1150)$. La pregunta ahora es ¿cuál es la primera frecuencia acumulada que supera a 287,5? se trata de 380, que corresponde al valor 2 y éste es entonces el primer cuartil. Leemos así que un cuarto del total de alumnos tiene dos materias aprobadas o menos. También puede decirse que el 25% de los alumnos aprobó dos materias o menos. Si se toma la cantidad de materias aprobadas como un indicador del ritmo más rápido o más lento de avance en la carrera, aquí se lee que el 25% que avanza con más lentitud no llegó a aprobar tres materias

El **primer cuartil** es el valor de la variable que deja un cuarto (25%) de los casos por debajo y tres cuartos (75%) por encima. Se indica Q_1 .

Idéntico razonamiento seguimos para calcular el tercer cuartil: las tres cuartas partes del total es 862,5 $((3/4) \cdot 1150)$. Buscamos luego la primera frecuencia acumulada que supera a ese valor y hallamos que es 930 y que su categoría correspondiente es 4. Entonces el tercer cuartil es 4 materias aprobadas. La

lectura será: las tres cuartas partes (o el 75%) de los alumnos aprobó cuatro materias o menos. Esto último implica que el 25% restante aprobó más de cuatro materias. Así, el grupo que avanza más rápido en la carrera aprobó más de cuatro materias en su primer año.

El **tercer cuartil** es el valor de la variable que deja tres cuartos (75%) de los casos por debajo y un cuarto (25%) por encima. Se indica Q_3 .

Cuando se trata de distribuciones con categorías agrupadas, procedemos como antes con una leve modificación en la fórmula:

Tiempo de reacción (en segundos)	f	F
1,0-1,5	5	5
1,5-2,0	7	12
2,0-2,5	6	18
2,5-3,0	3	21
3,0-3,5	8	29
3,5-4,0	5	34
Total	34	

Para el primer cuartil debe hallarse la primera frecuencia que supera a un cuarto de las observaciones, de las 34, un cuarto es 8,5 y la primera frecuencia mayor que ese número es 12, por lo que el primer cuartil se encuentra en la categoría 1,5-2,0. Para interpolar en valor exacto usamos una expresión equivalente a la de la mediana:

$$Q_1 = l_i + i * \left(\frac{\frac{n}{4} - f_d}{f_p} \right)$$

En la que se cambia $\frac{n}{2}$ por $\frac{n}{4}$ y lo demás mantiene el mismo significado. Aplicándola a estos datos resulta:

$$Q_1 = 1,5 + 0,5 * \left(\frac{8,5 - 5}{7} \right) = 1,5 + 0,5 * (0,5) = 1,75$$

Leemos en resultado como: el 25% de los sujetos reaccionó en un tiempo de 1,75s o menos.

Para el tercer cuartil la fórmula se transforma en:

$$Q_3 = l_i + i * \left(\frac{\frac{3 \cdot n}{4} - f_d}{f_p} \right)$$

Cuyo cambio consiste en que va $\frac{3 \cdot n}{4}$ en lugar de $\frac{n}{4}$ y manteniendo el resto de los símbolos con el mismo significado.

Usando esta expresión, verifique el lector que para la distribución de los tiempos de reacción, el tercer cuartil es 3,28.

No hemos hecho mención a un “segundo cuartil”, que sería el valor de la variable que acumula las dos cuartas partes de los casos, pero como las dos cuartas partes es la mitad, se trata simplemente de la mediana $Q_2 = M_{dn}$.

Los percentiles

Por el mismo camino pueden definirse cortes en otros puntos de la distribución, los más frecuentemente usados, por su generalidad, se conocen como percentiles. Se trata de valores de la variable que dejan por debajo (acumulan) distintos porcentajes de casos.

El **percentil r** de una distribución es el valor de la variable que deja el r por ciento de los casos por debajo de él y $(1-r)$ por ciento de los casos por encima. Se indica P_r .

Así por ejemplo, el percentil 10 (indicado como P_{10}) es el valor de la variable que acumula el 10% de las observaciones. Se representa de modo general un percentil dado como P_r en el que r indica el porcentaje del que se trata. La expresión para el cálculo de cualquier percentil es:

$$P_r = l_i + i * \left(\frac{\frac{r}{100} * n - f_d}{f_p} \right)$$

Son fáciles de observar las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} Q_1 &= P_{25} \\ M_{dn} &= P_{50} \\ Q_3 &= P_{75} \end{aligned}$$

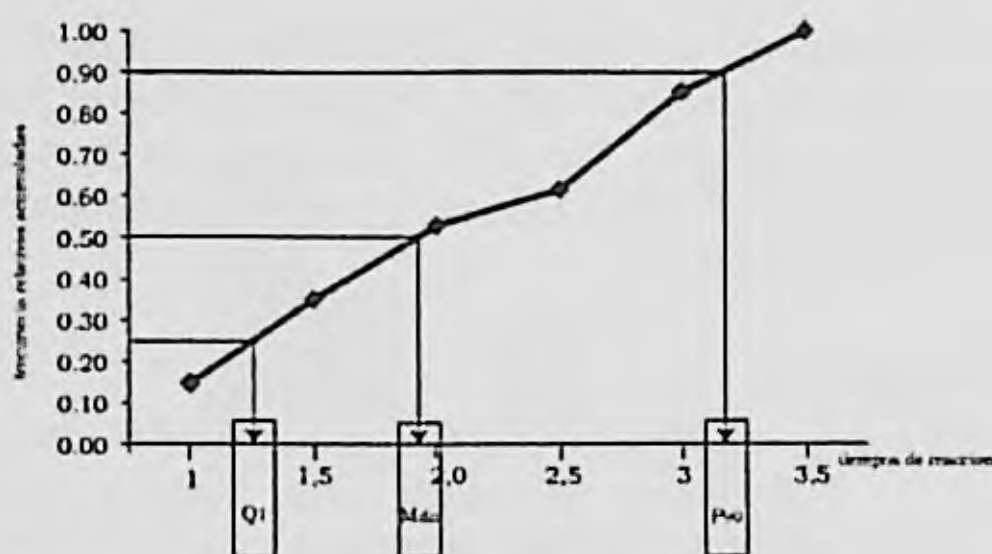
También suelen mencionarse, en algunas publicaciones, otros puntos de corte, como por ejemplo los quintiles. Esta medida representa valores que acumulan quintos (20%) de la distribución. La equivalencia es la siguiente:

Quintil:	Equivale a:
Primero	P_{20}
Segundo	P_{40}
Tercero	P_{60}
Cuarto	P_{80}

Para los cálculos con la fórmula de interpolación se reemplaza el $\frac{n}{2}$ de la mediana por $\frac{r}{100}$ para el percentil r . Esta manera de calcular los percentiles tiene la misma limitación mencionada para la mediana.

Obtención gráfica de los percentiles

Todas las medidas que hacen uso de las frecuencias acumuladas (mediana, cuartiles, percentiles) pueden obtenerse de manera aproximada a través del gráfico de frecuencias acumuladas, la ojiva de Galton. Veamos la forma de identificar el primer cuartil, la mediana y el percentil 90 en el ejemplo de los tiempos de reacción:



En el gráfico se ve que, si se ubica en el eje de las ordenadas la frecuencia relativa acumulada de 0,25 (un cuarto) y desde allí se llega hasta la ojiva, entonces en el eje horizontal (valores de la variable) se encuentra el primer cuartil. Para hallar la mediana se empieza ubicando en el eje vertical la frecuencia relativa acumulada de 0,50 (la mitad) y luego se la identifica en el eje horizontal. Del mismo modo con el percentil 90, ubicando ahora la frecuencia relativa acumulada de 0,90.

Obtención informática de las medidas de posición

Cuando se dispone de la matriz de datos, no se utilizan las fórmulas para interpolar, sino que se solicitan a un software que hace las operaciones sobre el conjunto completo de datos. El paquete estadístico InfoStat® obtiene estas medidas de tendencia central directamente desde los datos sin que sea necesario mostrar la distribuciones de frecuencia aunque se pueden pedir para mostrar más detalles sobre la variable que se observa. Los videos *descriptivos primera parte* y *descriptivos segunda parte* ilustran el modo de pedir estas medidas a Infostat®. Por ejemplo, para el número de errores cometidos por un conjunto de 1339 personas al responder a una prueba de diez preguntas, se obtiene la siguiente salida:

Medidas resumen

Resumen	numero de errores
n	1339
Media	3,18
Mín	0,00
Máx	8,00
Mediana	3,00
Q1	2,00
Q3	5,00
P(05)	0,00
P(10)	1,00
P(90)	6,00
P(95)	7,00
Percentil99	8,00

Esta descripción de los datos puede leerse del siguiente modo:
 Cuando 1339 personas respondieron a una prueba de diez preguntas, el número promedio de preguntas respondidas de manera equivocada fue de 3,18. La cantidad de errores cometidos fue desde cero hasta ocho. La mitad de los

participantes cometió tres errores o menos, el 25% cometió dos o menos y el 75% hasta cinco. El 5% no cometió ningún error, el 10% cometió uno o ninguno. El 90% cometió seis errores o menos, el 95% cometió siete o menos. También decirse, usando el P_{90} , que solo el 10% cometió más de seis errores, o con el P_{95} , que solo el 5% cometió más de siete.

La forma de la distribución

La media es una medida muy completa como resumen de los datos, ya que los considera a todos con la frecuencia de cada uno. Opera como un punto de equilibrio en un conjunto de datos. Sin embargo esto puede ser una dificultad en algunos tipos de distribución. Consideremos el siguiente ejemplo simple:

x	f
3	16
4	7
6	6
10	3
total	32

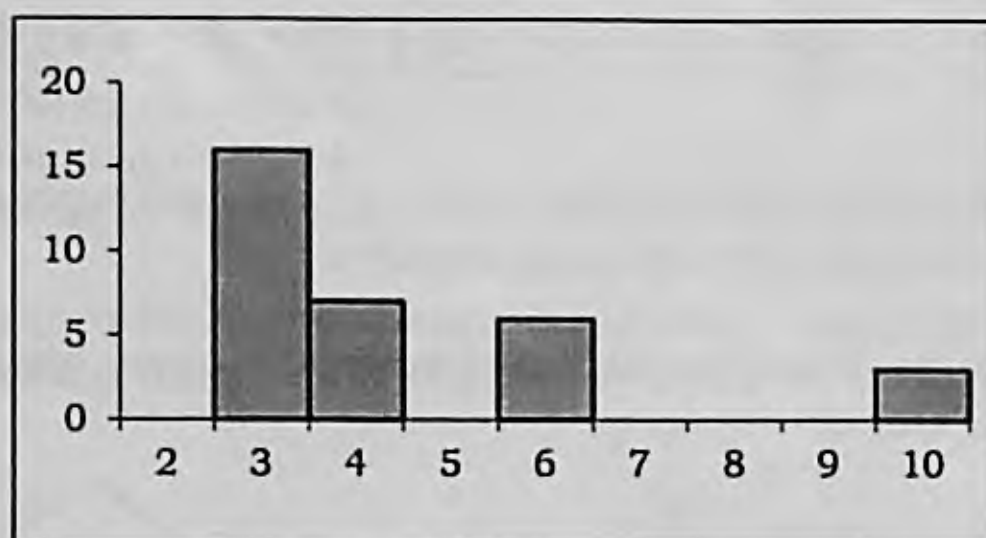
Estos datos muestran una marcada concentración en el valor 3, donde se encuentra la mitad de las observaciones. El resto de los valores son superiores y hay uno extremo, el 10, que tiene poca frecuencia: hay solo tres observaciones con ese valor. Veamos cuál es el efecto de esta forma de distribuirse de los datos. La media es:

$$\bar{x} = \frac{3 * 16 + 4 * 7 + 6 * 6 + 10 * 3}{32} = 4,44$$

A pesar de la concentración en 3 que se observa, la media es superior a 4, que es un resultado contrario a lo que intuitivamente esperaríamos, porque habríamos supuesto que se ubicaría más cerca de 3, ya que 3 parece ser un valor muy “representativo” de esta distribución, sin embargo, la media da un número bastante más grande. Esto se debe a la presencia de valores extremos, en este ejemplo el 10. Aunque este número tiene poca frecuencia, su efecto es de “tirar de la media” hacia valores más grandes. Esto sucede siempre con la media y proviene de su característica de tener en cuenta todos los valores de la distribución. Por esa razón, cuando la distribución se presenta como la anterior, la media no es una buena medida de centralidad.

Este inconveniente de la media aparece a menudo en las discusiones salariales por sectores. A menudo se escucha que no se justifica un aumento porque el salario promedio de todos los empleados del sector es de X pesos. Argumento al que se contrapone (expresado de diferentes maneras) que ese promedio incluye al personal que tiene salarios muy altos. Se trata de distribuciones asimétricas, que tienen la mayor parte de los casos con salarios bajos o intermedios y unos pocos casos con salarios muy superiores, por eso cuando se calcula la media se obtiene un resultado que representa mal al conjunto de datos.

El histograma siguiente muestra la forma de la distribución anterior:



En el gráfico se ve el carácter atípico del valor 10, que aparece muy alejado de la parte principal de la distribución. Decimos en este caso que la distribución es **asimétrica**.

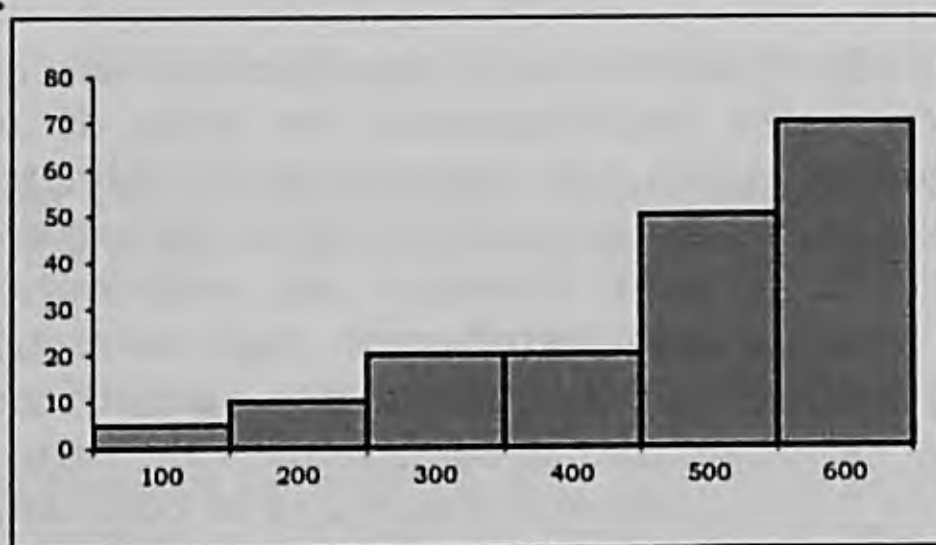
Asimetría

La **asimetría** de una distribución se indica señalando hacia dónde se sitúan los valores extremos. Si, como en este ejemplo, los valores extremos son mayores que la mayor parte de los datos, la asimetría es **hacia la derecha**.

La asimetría puede ser en sentido opuesto, si hay observaciones particularmente pequeñas y en ese caso se tratará de una distribución **asimétrica hacia la izquierda**. Como en el ejemplo siguiente:

X	F
100	5
200	10
300	20
400	20
500	50
600	70
Total	175

Cuyo histograma es:



Aquí los valores extremos se encuentran por debajo del grupo principal de datos y la media se inclinará hacia los valores más pequeños. Así, aunque la mayoría de los casos se encuentra entre 500 y 600, la media es:

$$\bar{x} = \frac{100 * 5 + 200 * 10 + 300 * 20 + 400 * 20 + 500 * 50 + 600 * 70}{175} = 477,14$$

Un resultado que está por debajo de esos valores que concentran muchos casos. Decimos ahora que la asimetría es hacia la izquierda.

Las siguientes curvas de distribución de frecuencia, son ejemplos de formas posibles en cuanto a simetría:



El primer gráfico corresponde a una distribución asimétrica a la izquierda, el segundo derecha y el tercero muestra una distribución simétrica.

La asimetría puede evaluarse directamente a partir de las medidas de centralidad, ya que la posición relativa de la media y la mediana indican hacia dónde ésta sucede. Cuando la media y la mediana coinciden, la distribución es simétrica, es decir carece de asimetría. Si la media supera a la mediana, se trata de una distribución asimétrica a la derecha y si la media es menor que la mediana, la asimetría será hacia la izquierda.

Posición relativa de la media y la mediana:	Asimetría de la Distribución:
$\bar{x} = M_{dn}$	Simétrica
$\bar{x} > M_{dn}$	Asimétrica a la derecha
$\bar{x} < M_{dn}$	Asimétrica a la izquierda

Una distribución es **simétrica** si la media coincide con la mediana. La distribución se llama **asimétrica a la derecha** si la media es mayor que la mediana, y **asimétrica a la izquierda** si la media es menor que la mediana.

Hay otras maneras de medir la asimetría de una distribución, que la cuantifican y facilitan la comparación entre distribuciones, se trata de los *coeficientes de asimetría*. Estos coeficientes miden dos aspectos de la asimetría: hacia qué lado sucede y cuán acentuada es. Su signo positivo indica asimetría hacia la derecha y negativo hacia la izquierda. El valor absoluto del coeficiente indica si es muy asimétrica o poco. Por ejemplo, una distribución cuya asimetría vale 1,5 es más asimétrica que una con coeficiente 1,2, y ambas son asimétricas hacia la derecha. Cuando la distribución es simétrica, el coeficiente vale cero, no es positivo ni negativo. Uno de los más frecuentemente usados es el coeficiente de asimetría de Fisher¹⁸, que se calcula como:

$$g_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3 * f_i}{n * s^3}$$

¹⁸ Otros coeficientes de asimetría son: el de Pearson, que compara la ubicación de la media y del modo, y el de Bowley, que compara los cuartiles y la mediana.

Y cuya interpretación es:

$g_1 = 0$ La distribución es simétrica.

$g_1 > 0$ Asimétrica hacia la derecha.

$g_1 < 0$ Asimétrica hacia la izquierda.

En la práctica, es improbable que el coeficiente valga exactamente cero, por lo que se considera simétrica a una distribución cuyo coeficiente esté entre -0,5 y 0,5.

Curtosis

Además de la simetría, disponemos de otro indicador de la forma de la distribución, una medida de cuán “puntiaguda” es la curva, se denomina curtosis y distingue distribuciones con forma estrecha y elevada de que tienen forma amplia y baja. Como en los siguientes gráficos:



Las distribuciones con forma semejante a la primera se llaman leptocúrticas, las que se parecen al segundo gráfico, platicúrticas y las que tienen forma como la tercera, mesocúrticas.

Estos tres ejemplos corresponden a distribuciones simétricas, pero también pueden ser asimétricas.

La curtosis se mide con un coeficiente específico, que vale cero para distribuciones mesocúrticas, es negativo para las platicúrticas y positivo para las leptocúrticas. Su cálculo es:

$$g_2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4 * f_i}{n * s^4} - 3$$

Su interpretación es:

$g_2 = 0$ La distribución es mesocúrtica

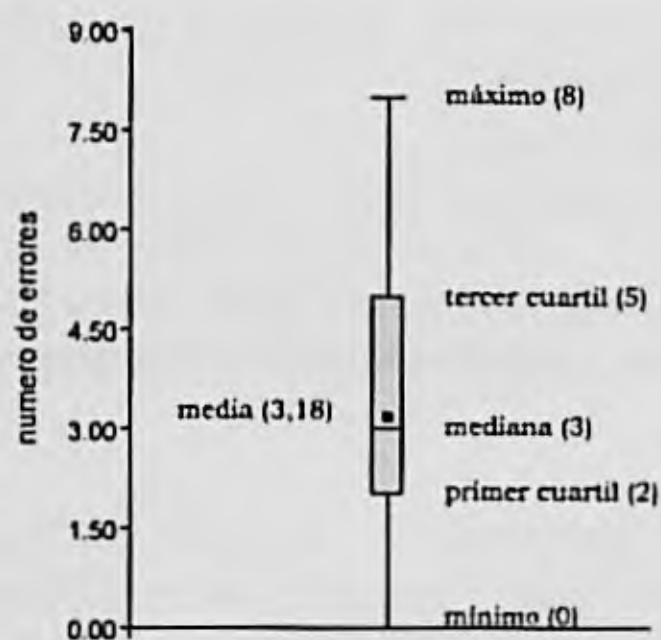
$g_2 > 0$ Leptocúrtica

$g_2 < 0$ Platicúrtica

Con datos reales, muy raramente el valor será exactamente cero, por lo que se trata como mesocúrtica a una distribución cuyo coeficiente se encuentre entre -0,5 y 0,5.

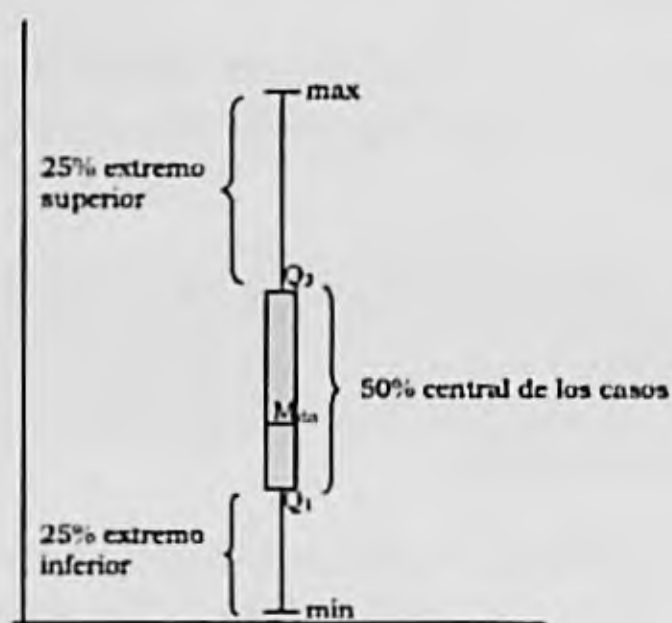
Box-plots

Un gráfico que puede resumir de manera muy compacta la información sobre una distribución de frecuencias es el que se llama **diagrama de caja**, o también **diagrama de caja y bigotes** o **box-plot**, que fue propuesto por John Tukey en 1977. Aplicado al ejemplo de la variable *número de errores*, relevada sobre 1339 casos, que mostramos antes, ofrece.



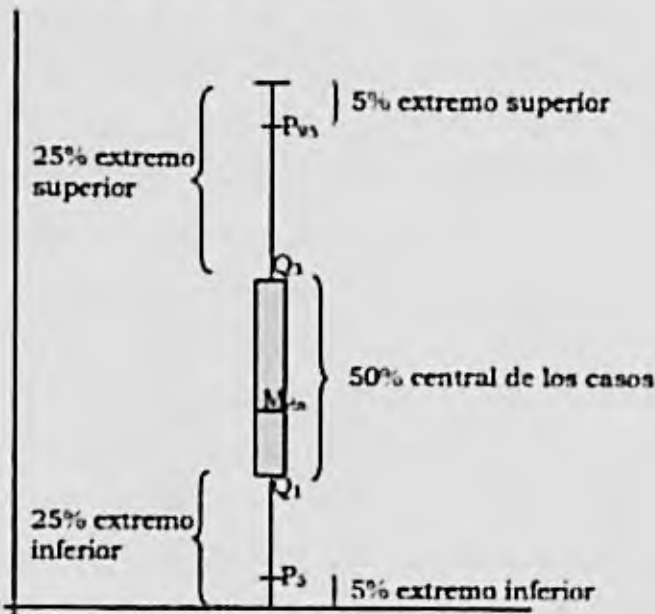
Este gráfico representa sobre el eje vertical los valores de la variable y muestra una “caja” delimitada por los cuartiles 1 y 3. Según la definición de los cuartiles, esa caja contiene al 50% central de los casos. Dentro de la caja se muestra la mediana en la línea horizontal y la media, con un punto; según la posición relativa de ellas, tendremos una idea gráfica de la asimetría de la distribución. Además de la caja, se ven dos segmentos que se extienden hasta los valores máximo y mínimo de la distribución. Estos segmentos (llamados a veces “bigotes”) muestran el campo completo de variación de la variable y completan la idea acerca de la asimetría de la distribución¹⁹.

De manera general entonces, el box-plot permite apreciar gráficamente la distribución de los casos:



¹⁹ Este gráfico tiene siempre la misma manera de definir la caja central; el extremo inferior es el percentil 25, el superior el percentil 75 y una línea dentro de la caja indica la posición de la mediana. Sin embargo, hay diferencias en la forma de construir los bigotes (McGill; Tukey y Larsen, 1978), aquí los hemos extendido desde el primer cuartil hasta el mínimo valor observado y desde el tercer cuartil hasta el máximo observado, para representar el campo completo de variación de los datos. Esta no es la única opción, más adelante veremos una versión más elaborada de este gráfico, que ayudará a identificar valores excepcionalmente altos o bajos.

En InfoStat®, también pueden pedirse los percentiles 5 y 95, con lo que la información que ofrece el gráfico es más rica:



La evaluación exploratoria de los datos puede usarse también de manera comparativa. Por ejemplo, las notas del primer parcial de Psicoestadística en 2009 y 2010 son descriptas en la siguiente salida InfoStat®:

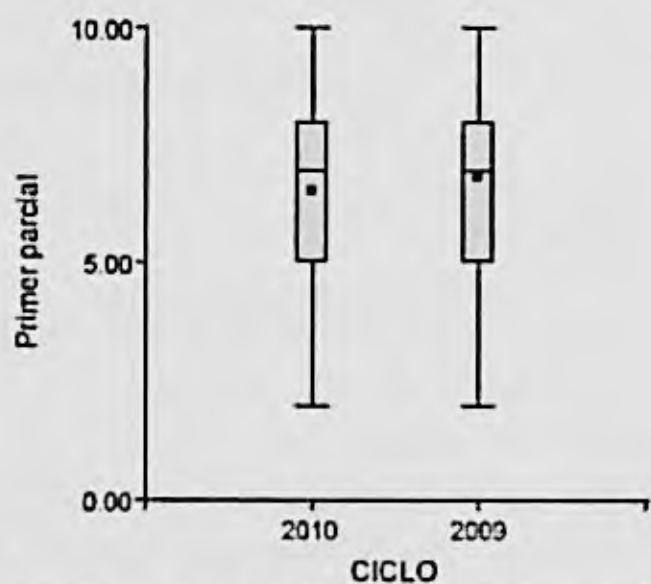
Medidas resumen		
CICLO	Resumen	primero
2009	n	1345
2009	Media	6.82
2009	Mín	2
2009	Máx	10
2009	Mediana	7
2009	Q1	5
2009	Q3	8
2009	Asimetría	-0.42
2009	Kurtosis	-0.69
2010	n	1210
2010	Media	6.51
2010	Mín	1
2010	Máx	10
2010	Mediana	7
2010	Q1	5
2010	Q3	8
2010	Asimetría	-0.24
2010	Kurtosis	-0.68

Leemos esta descripción como: en 2009 rindieron el primer parcial 1345 alumnos, la nota promedio del grupo fue de 6.82. La mínima nota que alguien obtuvo fue un dos y la máxima un 10. La mitad de los alumnos sacó de 7 para abajo, el 25% que obtuvo los peores resultados estuvo de 5 para abajo y el 25% de notas más altas se concentra por encima de 8 (entre 8 y 10). Sobre la forma de la distribución, ésta tiene asimetría hacia la izquierda, pero es muy pequeña

(menos a 0.50) por lo que se la puede tratar como simétrica. Además, es platicúrtica. De manera equivalente se lee la descripción de las notas del 2010.

La variable *ciclo* es la que separa los dos grupos que se comparan y corresponde a quienes cursaron en 2009 y 2010.

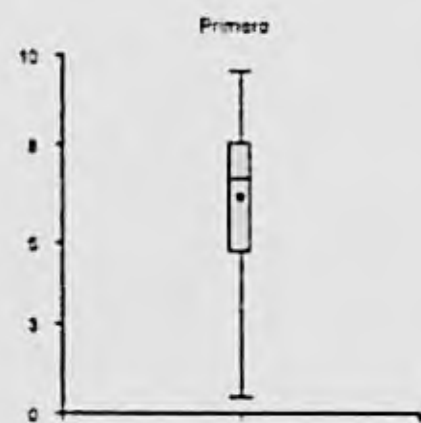
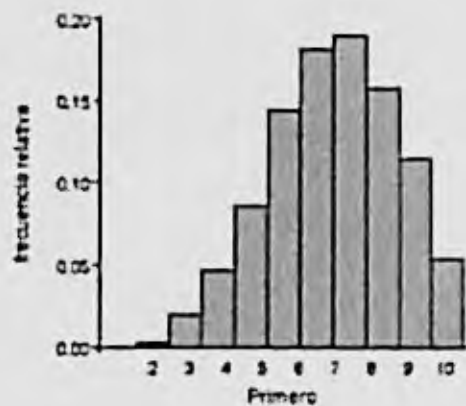
La representación gráfica de esta descripción, a través de box-plots, es la siguiente:



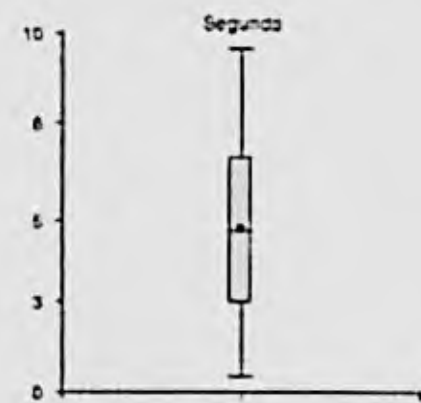
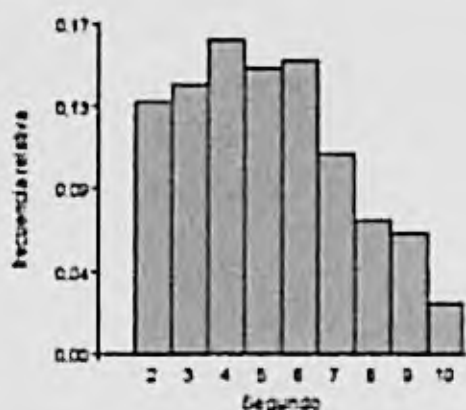
En el que se aprecia la gran similitud en los resultados obtenidos por los alumnos.

Para comparar las formas de representación de los resultados, a continuación vemos el histograma junto al box-plot de las notas de los dos primeros parciales del año 2010:

Resumen	Primero
n	1010
Media	6,52
Min	2
Máx	10
Mediana	7
Q1	5
Q3	8



Resumen	Segundo
n	1231
Media	5,07
Min	2
Máx	10
Mediana	5
Q1	3
Q3	7



Se puede observar la diferente asimetría de las dos distribuciones expresada en el sesgo de los histogramas y en la distinta longitud de los bigotes en los box-plot.

Medidas de dispersión

Además de indicar alrededor de qué valores se distribuyen los datos, también es necesario indicar si se encuentran concentrados alrededor de esos valores (si son cercanos a ellos) o dispersos (si están alejados). Por ejemplo, un promedio de 20 sesiones de psicoterapia puede provenir de cuatro casos que utilizaron 18, 19, 21 y 22 sesiones o de otros cuatro que hayan insumido 5, 10, 30 y 35 sesiones. En la primer situación las cuatro observaciones son cercanas a la media, están concentradas a su alrededor, mientras que en la segunda están lejos, dispersas. Diremos que en el primer caso la distribución es homogénea o que presenta poca dispersión y en el segundo que es heterogénea o que presenta mucha dispersión. Conocer esto tiene importancia para poder evaluar la calidad de las medidas de centralidad, en particular de la media. Esto es así porque en una distribución muy dispersa, la media será un promedio de valores muy diferentes entre sí y no será tan fiel a los datos como si estos valores fueran similares. La media de 20 sesiones del primer ejemplo es una mejor medida resumen que la misma media de 20 del segundo, porque la primera representa mejor los datos de origen. Debido a esto, decimos que en la primera de las situaciones del ejemplo, la media es más *representativa* de los datos de los que proviene.

Nos ocuparemos ahora del modo en que puede medirse esa dispersión, cómo transformarla en una medida resumen que indique brevemente si los datos están dispersos o concentrados.

Recorrido

Una primera aproximación al problema es la de considerar la distancia que hay entre los valores extremos, entre el más pequeño y el más grande. Si usamos este procedimiento en el ejemplo anterior vemos que en la primera distribución hay 4 unidades entre la primera y la última observación (de 18 a 22) y en la segunda hay 30 unidades de extremo a extremo (de 5 a 35). Por lo que ésta sería una medida de la dispersión. Esta medida se llama recorrido, se indica con la letra R y la expresión formal de su cálculo es:

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

Donde $x_{\max}$ y $x_{\min}$ representan a los valores máximo y mínimo respectivamente. En las distribuciones del ejemplo, los recorridos son $R=4$ y $R=30$ respectivamente, que resumen la mayor dispersión de la segunda.

Se llama **recorrido** de una distribución a la diferencia entre los valores máximo y mínimo de la variable. Se indica R .

Cuando la distribución tiene más casos, el recorrido es insuficiente como medida de dispersión, ya que está determinado solo por los valores extremos. Por ejemplo, las dos siguientes series tienen la misma media, igual a 8:

$$\begin{array}{c} 2, 8, 8, 8, 8, 8, 14 \\ 7, 8, 8, 8, 8, 8, 9 \end{array}$$

El recorrido vale 12 para la primera ($R=14-2$) y 2 para la segunda ($R=9-7$) es una diferencia muy acentuada aunque las dos distribuciones solo difieren en los valores extremos. Dicho de otra manera, si sucede que hay un caso (o unos pocos) que tiene un valor excepcionalmente alto (o bajo), el recorrido dará un valor alto, indicando gran dispersión, lo que nos puede hacer pensar que todos

los datos están dispersos. Por esa razón se dice que es una medida “gruesa” de la variabilidad de los datos.

Amplitud intercuartílica

Un modo de afinar la calidad de esta medida es la de tomar la distancia que hay, no ya entre los valores extremos, sino entre los cuartiles primero y tercero. La medida que usa esta distancia se llama amplitud intercuartílica y es simplemente la diferencia entre el tercer cuartil y el primero:

$$AIQ = Q_3 - Q_1$$

Si bien tampoco es ésta una medida que considere todas las observaciones —ya que solo tiene en cuenta los dos cuartiles—, es mejor que el recorrido, porque deja de lado los valores extremos, aquellos que pertenecen al 25% más bajo y al 25% más alto de la distribución.

La **amplitud intercuartílica** es la diferencia entre los cuartiles tercero y primero. Se indica *AIQ*.

Gráficamente, esta medida es la altura de la caja del Box-plot. Algunos autores prefieren informar como medida de dispersión a la mitad de la distancia entre los cuartiles 1 y 3, a la que se denomina *semi recorrido intercuartilar*, y se abrevia *SRIC*.

El **semi recorrido intercuartilar** es la mitad de la amplitud intercuartílica. Se indica *SRIC*.

Que en el Box-plot representa al mitad de la altura de la caja.

$$SRIC = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

Medidas de dispersión basadas en la media

Las medidas de variabilidad que más se usan son las que tienen en cuenta todas las observaciones, es decir aquellas que están basadas en la media. Una manera de ver si el conjunto de datos está concentrado o disperso, consiste en observar la distancia de la media a la que se encuentra cada observación, luego esas distancias individuales pueden promediarse y tener una idea global de qué tan lejos están los casos del promedio. Intentemos hacer eso y veamos qué limitación aparece.

Tomemos un conjunto pequeño de datos, presentado en serie simple:

5, 7, 9, 11

La media es 8, como lo es la mediana. Aunque no hay modo, ya que todos los valores tienen frecuencia igual a uno, la distribución es simétrica. Hemos elegido así el ejemplo solo para darle simplicidad, no es una condición necesaria para lo que sigue.

Consideremos las distancias desde cada observación hasta la media, restando a cada una de ellas el valor 8 (la media):

x_i	$x_i - \bar{x}$
5	-3
7	-1
9	1
11	3

Las distancias positivas corresponden a valores superiores a la media y las negativas a los inferiores, si un valor acertara en la media, su distancia sería cero. Si sumamos todas las diferencias $x_i - \bar{x}$, el resultado es cero (-3-1+1+3=0); además, éstas son simétricas, como efecto de la forma de la distribución original. Pero el hecho que la suma sea cero no depende de la forma de la distribución, sino que es una propiedad de la media. Por ser la media un punto de equilibrio entre las observaciones, las que se distancian por encima de ella están compensadas por las que lo hacen por debajo²⁰.

Los valores $x_i - \bar{x}$ se llaman desvíos, que indican cuánto se aleja cada observación de la media. Como vemos pueden ser positivos o negativos según se trate de observaciones que superen a la media o que estén por debajo de ella. Acabamos de ver también que su suma vale cero, es decir que $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$ y que esta es una cualidad de la media, que no depende de los datos²¹. Tan importante es esta propiedad que la usaremos para dar una definición más completa de la media:

La **media** es el valor de la variable que anula la suma de los desvíos en torno suyo.

En el tema que nos ocupa en este momento, el de medición de la variabilidad del conjunto de casos, la consecuencia de esta propiedad es que no será posible usar la suma de los desvíos como indicador de dispersión, ya que da siempre cero, con datos homogéneos o heterogéneos. A fin de resolver este problema vamos a eliminar el signo, usando el hecho que todo número elevado a una potencia par es positivo, sin importar el signo que haya tenido el número. Elevaremos entonces al cuadrado cada una de los desvíos y así se perderá su signo y ya no será cero la suma de todos ellos.

Varianza

Usando ese recurso, definimos la varianza²², a la que simbolizaremos como $V(x)$ o más frecuentemente como s^2 de la siguiente forma:

²⁰ Para ver esto, comparemos con el caso de la serie: 3, 4, 6, 7, 23, 45 con media 14,7. Las diferencias entre cada observación y la media son las siguientes:

x	3	4	6	7	23	45
$x_i - \bar{x}$	-11,7	-10,7	-8,7	-7,7	8,3	30,3

En este caso las diferencias no son simétricas, pero es igualmente cierto que su suma es igual a cero, es decir que están compensadas las diferencias por encima y por debajo de la media.

²¹ Puede verse que es así haciendo: $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \bar{x}$, como $\bar{x}$ es una constante, el segundo término es $n \cdot \bar{x}$, igual que el primero, según la definición operativa de la media. Por lo tanto la diferencia es cero, cualquiera sea el conjunto de datos.

²² En este punto aparece la primera diferencia entre cálculos hechos sobre datos de una muestra o de una población. Si estuviésemos trabajando sobre toda la población, la varianza (a la que indicariamos con otra letra) tendría denominador n , en lugar de $n-1$. No

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

Se llama **varianza** de una distribución a la suma de los cuadrados de los desvíos alrededor de la media, dividida por el total de observaciones menos uno. Se indica s^2 .

Es una medida muy valiosa de la dispersión que tiene un conjunto de datos, cuanto mayor es, tanto más dispersos éstos se encuentran, es decir, son más heterogéneos. No puede ser negativa, porque es una suma de cuadrados y solo es cero si todos los desvíos son cero, es decir si todas las observaciones coinciden con la media²³.

Hay tres propiedades de la varianza que señalaremos porque serán necesarias más adelante:

-La varianza de una constante es cero. Esto resulta claro ya que la varianza mide la dispersión y si todas las observaciones son iguales no hay dispersión:

$$V(k) = 0$$

-La varianza de una constante que multiplica a una variable es la constante elevada al cuadrado multiplicada por la varianza de la variable:

$$V(k * x) = k^2 * V(x)$$

-La varianza de la suma de dos variables independientes es la suma de las varianzas de cada una de ellas:

$$V(x + y) = V(x) + V(y)$$

A los fines de la interpretación, la varianza presenta dos inconvenientes. Uno es que sus unidades están elevadas al cuadrado; por lo que, si medimos *número de errores*, la varianza quedará expresada en *número de errores al cuadrado* una entidad que no tiene significado, como tampoco lo tienen *hijos al cuadrado* o *segundos al cuadrado*, para los tiempos de reacción.

El otro inconveniente es que no tiene límite superior, puede ser muy grande y no tenemos con qué compararla para saber si indica una gran variabilidad o si es grande porque los valores de la variable lo son.

Desviación estándar

Para resolver el primer inconveniente, definiremos una medida derivada de la varianza, que se denomina desviación estándar (en algunos textos y programas de análisis de datos es llamada desviación típica). Esta medida, indicada con la letra s es la raíz cuadrada de la varianza:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

O más simplemente:

podemos explicar la razón de esto aún, habrá que esperar al capítulo de estimación. En algunos manuales, a la varianza calculada con denominador $n-1$ se la llama *cuasivarianza* o también *seudovarianza*.

²³ En este caso no hay variabilidad, y en consecuencia, no hay variable, porque el valor asumido es siempre el mismo. Se trata de una constante.

$$s = \sqrt{s^2}$$

La **desviación estándar** es la raíz cuadrada de la varianza. Se indica s .

Ahora, por el sencillo trámite de introducir una raíz cuadrada, las unidades de s son las mismas que las de la variable original y no hay problemas con la interpretación del valor.

Coefficiente de variación

Para hacer frente al problema de la magnitud de la varianza —que sigue siéndolo para la desviación estándar—, definimos una medida relativa de la dispersión: el coeficiente de variación, indicado como CV como el cociente entre la desviación estándar y la media:

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} * 100$$

Esta medida carece de unidades, porque la media tiene las mismas que las de la desviación estándar, por lo que se trata de una medida relativa de la dispersión. Indica la importancia relativa de la desviación estándar respecto de la media. El factor 100 que acompaña al cociente cumple la función de expresarlo como porcentaje, por comodidad para la lectura.

El **coeficiente de variación** expresa de manera relativa la dispersión, midiendo el peso de la desviación estándar comparado con la media. Se indica CV.

Conocer la dispersión de una distribución de frecuencias es muy necesario para poder decidir si la media es una medida adecuada para resumir los datos, y esto no sucede si hay mucha dispersión. Para aclarar esto veamos un ejemplo: sea un grupo de seis alumnos que hacen una prueba y que obtienen las siguientes notas: 2, 2, 2, 2, 10, 10. Si calculamos la media obtenemos 4,7. Este número no representa lo que sucede con los seis alumnos, quienes tuvieron resultados muy dispares: cuatro de ellos obtuvieron 2 y los otros dos, 10. Si calculamos el CV, resultado es 100%, un valor muy elevado, indicativo que la media no es una medida adecuada para sintetizar al conjunto de datos. Muchas de las críticas mal fundadas hacia la Estadística se equivocan por ignorancia, porque calculan la media cuando no corresponde usarla.

En la práctica se considera que si el coeficiente de variación es menor al 10% (algunas referencias ponen como límite al 15%), la distribución tiene poca dispersión y entonces podemos confiar en la media como medida de centralidad y tratarla como representativa de los datos que resume. Más allá de estos valores del CV, la media no alcanza para resumir los datos y es necesario acompañarla de otras medidas, como la mediana, los cuartiles, el mínimo y máximo.

Calcularemos por única vez las medidas de dispersión de manera manual para un pequeño conjunto de datos, a fin de seguir de cerca las operaciones que involucra. Se trata de seis pacientes diagnosticados de depresión a partir de cinco

o más de los síntomas que indica el manual DSM IV²⁴ y que para cada uno de ellos observamos (como variable) el número de síntomas que llevaron al diagnóstico:

Paciente	x_i (número de síntomas)	$x_i - \bar{x}$ (desvíos)	$(x_i - \bar{x})^2$ (cuadrados de los desvíos)
1	5	-2	4
2	6	-1	1
3	6	-1	1
4	8	1	1
5	8	1	1
6	9	2	4

$$\bar{x} = \frac{5 + 6 + 6 + 8 + 8 + 9}{6} = 7$$

$$\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})^2 = 4 + 1 + 1 + 1 + 1 + 4 = 12$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})^2}{n - 1} = \frac{12}{6 - 1} = 2,4$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{2,4} = 1,55$$

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} * 100 = \frac{1,55}{7} * 100 = 22,13\%$$

²⁴ Presencia de cinco (o más) de los siguientes síntomas durante un período de 2 semanas, que representan un cambio respecto a la actividad previa; uno de los síntomas debe ser:

1. Estado de ánimo depresivo la mayor parte del día, casi cada día según lo indica el propio sujeto (p. ej., se siente triste o vacío) o la observación realizada por otros (p. ej., llanto). En los niños y adolescentes el estado de ánimo puede ser irritable
2. Disminución acusada del interés o de la capacidad para el placer en todas o casi todas las actividades, la mayor parte del día, casi cada día (según refiere el propio sujeto u observan los demás)
3. Pérdida importante de peso sin hacer régimen o aumento de peso (p. ej., un cambio de más del 5 % del peso corporal en 1 mes), o pérdida o aumento del apetito casi cada día. Nota: En niños hay que valorar el fracaso en lograr los aumentos de peso esperables
4. Insomnio o hipersomnia (sueño excesivo) casi cada día.
5. Agitación o enlentecimiento psicomotores casi cada día (observable por los demás, no meras sensaciones de inquietud o de estar enlentecido)
6. Fatiga o pérdida de energía casi cada día
7. Sentimientos de inutilidad o de culpa excesivos o inapropiados (que pueden ser delirantes) casi cada día (no los simples autorreproches o culpabilidad por el hecho de estar enfermo)
8. Disminución de la capacidad para pensar o concentrarse, o indecisión, casi cada día (ya sea una atribución subjetiva o una observación ajena)
9. Pensamientos recurrentes de muerte (no sólo temor a la muerte), ideación suicida recurrente sin un plan específico o una tentativa de suicidio o un plan específico para suicidarse

La lectura de este resultado es que para el conjunto de seis personas a las que se observa, el número promedio de síntomas a través de los cuales es diagnosticada la depresión es de siete. Sin embargo este número de síntomas es bastante variable según los pacientes y, seguramente también según los terapeutas.

Obtención informática de medidas de dispersión

Si la serie de datos del ejemplo anterior es cargada en InfoStat®, las medidas descriptivas se solicitan en el menú: Estadísticas, Medidas resumen. Luego de seleccionar la variable que se describirá, se eligen las medidas, el formato de la salida es el siguiente:

Estadística descriptiva

Variable	n	Media	D.E.	Var(n-1)	CV
NUMERO DE SINTOMAS	6	7,00	1,55	2,40	22,13

En la salida, *n* es la cantidad de casos, *D.E.* se refiere a la desviación estándar, *Var(n-1)* es la varianza, en la que la indicación *(n-1)* señala que se ha calculado con denominador *(n-1)*, por lo que se trata de la varianza muestral. *CV* el coeficiente de variación, expresado como porcentaje. Esta salida puede leerse “Sobre un total de seis pacientes diagnosticados como depresivos, el número promedio de síntomas presentes en que se basó el diagnóstico fue de 7. Las observaciones son levemente heterogéneas, ya que el coeficiente de variación es superior al 20%. De aquí puede concluirse que el número de síntomas que apoyan el diagnóstico de depresión es bastante variable entre los pacientes.”

La medida relativa de la variabilidad es adecuada para comparar variables que tienen diferentes unidades, por ejemplo para responder ¿qué es más variable, el peso o la estatura de los niños? Es decir, ¿en cuál de esas dos medidas se diferencian más? Las siguientes son las salidas descriptivas

Variable	n	Media	D.E.	Var(n-1)	CV	Mín	Máx
peso	32	9,55	0,94	0,88	9,80	7,90	11,23
talla	32	73,43	2,89	8,36	3,94	65,80	80,00

Se trata de 32 niños de la misma edad, evaluados en dos aspectos; su peso y su talla, el primero en kilos y la segunda en centímetros. La comparación de las varianzas o de las desviaciones estándar no da información sobre la diferente variabilidad, porque dependen de esas unidades de medida. Por el contrario, los coeficientes de variación, (casi 10% para el peso y casi 4% para la talla) indican que hay más diferencias entre los pesos que entre las estaturas.

Box-plots y dispersión

La observación del diagrama de caja (box-plot) nos da también indicios acerca de la dispersión de la variable que se analiza. Cuando la caja es larga estamos en presencia de distribuciones muy dispersas en la parte central, los cuartiles están lejanos, hay mucha amplitud intercuartilar. Mientras que si la caja es corta, se trata de una concentración de datos en la parte central de la distribución. La longitud de los bigotes señala la mayor o menor concentración de los datos en las zonas extremas. Como dijimos antes, el box-plot es un gráfico que ayuda a explorar los datos, a hacerse una idea inicial de la distribución y esto puede ser

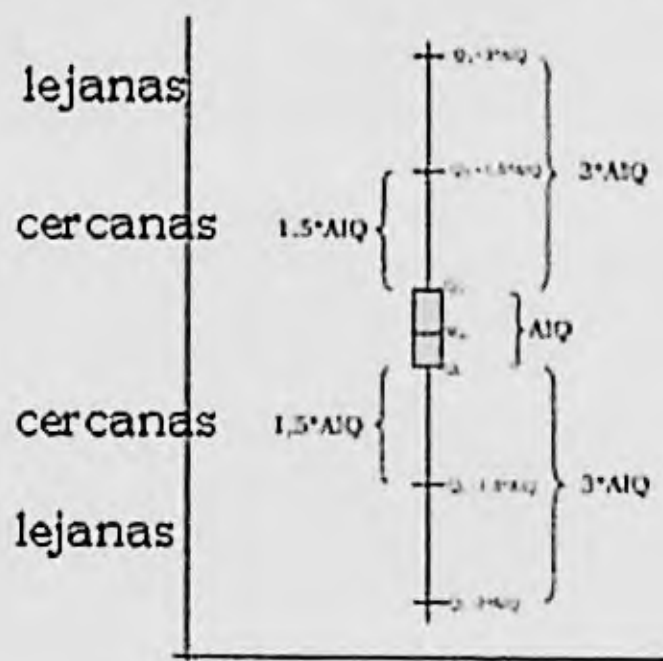
muy valioso cuando se trata de interpretarlos, porque permite sugerir hipótesis que expliquen la distribución que se observa.

Haciendo uso de la amplitud intercuartílica estableceremos criterios para detectar valores que destaquen por alejarse sustancialmente del grupo mayoritario. Se trata de mediciones atípicas o excepcionalmente extremas, ya porque sean excesivamente grandes o pequeñas. La identificación de estos valores es importante en la etapa exploratoria de los datos porque obliga a mirarlos en detalle. Puede tratarse de un error de medición o bien de un sujeto (o unos pocos) que se aparta de manera excepcional del grupo y que merece un análisis más detallado y particularizado.

Tukey (1977) analiza la distancia de los casos a los cuartiles y sugiere tratar como "lejanas" a las observaciones que se encuentren a más de una amplitud intercuartílica y media ($1,5 \cdot \text{AIQ}$) por debajo del primer cuartil o por encima del tercero, pero a menos de tres veces la amplitud intercuartílica ($3 \cdot \text{AIQ}$). Además, aquellas observaciones que estén más allá de tres AIQ por debajo del primer cuartil o por encima del tercero se denominan "muy lejanas". Este criterio determina entonces zonas en las que pueden hallarse las observaciones y según en cuál de ellas se encuentren, se las identifica como "cercanas", "lejanas" o "muy lejanas". Las zonas son las siguientes:

1. Cercanas: Entre Q_1 y $Q_1 - 1,5 \cdot \text{AIQ}$ o entre Q_3 y $Q_3 + 1,5 \cdot \text{AIQ}$
2. Lejanas: Entre $Q_1 - 1,5 \cdot \text{AIQ}$ y $Q_1 - 3 \cdot \text{AIQ}$ o entre $Q_3 + 1,5 \cdot \text{AIQ}$ y $Q_3 + 3 \cdot \text{AIQ}$
3. Muy lejanas: Menores que $Q_1 - 3 \cdot \text{AIQ}$ o mayores que $Q_3 + 3 \cdot \text{AIQ}$

La división en zonas puede verse más claramente en un box-plot:



En este esquema hemos tomado la distancia entre los cuartiles tercero y primero (la amplitud intercuartílica) como unidad de medida, y consideramos una vez y media esa medida ($1,5 \cdot \text{AIQ}$) y tres veces esa medida ($3 \cdot \text{AIQ}$) como puntos de corte para decidir cuándo una observación se aleja excepcionalmente del grupo.

Medida de la dispersión cuando no hay distancias

Todo lo indicado hasta el momento acerca de la variabilidad ha necesitado de la medición de la distancia entre las observaciones: desde el comienzo hablamos de cercanía o lejanía entre los datos. Por lo tanto estas medidas, desde el recorrido

hasta el coeficiente de variación, solo tienen sentido si la variable es de nivel intervalar o proporcional. Si la variable tiene nivel nominal u ordinal habrá que medir su variabilidad de otra forma. En estos casos cambia un poco el significado de la variabilidad, ya que estaremos en presencia de una variable más dispersa cuanto más *equitativamente* se distribuya el total de observaciones entre las distintas categorías. Por ejemplo, si 100 individuos son clasificados según cómo sea su rendimiento en: muy bueno, bueno, regular, insatisfactorio; la distribución tendrá más dispersión si 25 de ellos se encuentran en cada categoría que si la gran mayoría está en una sola. La distribución:

Rendimiento	f	f'
Muy bueno	25	0,25
Bueno	25	0,25
Regular	25	0,25
Insatisfactorio	25	0,25
Total	100	1,00

Tiene más dispersión que esta otra:

Rendimiento	f	f'
Muy bueno	5	0,05
Bueno	80	0,80
Regular	5	0,05
Insatisfactorio	10	0,10
Total	100	1,00

¿Por qué? Porque en la segunda, los casos están muy concentrados en una categoría (bueno), mientras que en la primera se dispersan entre todas. Notemos que ahora habrá más dispersión cuanto más parecidas sean las frecuencias entre sí. Esto puede parecer contradictorio con lo indicado para variables cuantitativas, pero allí la mayor dispersión viene dada por la mayor disparidad entre los valores de las variables, que no puede evaluarse con variables nominales u ordinales. Esta forma de considerar la dispersión equivale a la idea de incertidumbre. Supongamos que conocemos que la distribución del rendimiento es como lo muestra la primera tabla y que debemos “adivinar” cuál es el rendimiento de una persona elegida al azar. No tenemos ninguna razón para creer de manera preferencial que la persona sea de rendimiento muy bueno, bueno, regular o insatisfactorio; ya que todos son igualmente posibles. En esta situación, la incertidumbre es completa. Por el contrario, si supiéramos que la distribución es la que muestra la segunda tabla, tenderíamos con justa razón a creer que hay más chances que la persona elegida al azar tenga rendimiento bueno, ya que es bastante más probable que pertenezca a esa categoría que a otra. Diremos que aquí tenemos menos incertidumbre.

La medida para expresar de manera sintética esta dispersión es:

$$H(x) = - \sum_{i=1}^k f_i' \cdot \log f_i'$$

El cálculo consiste en multiplicar cada frecuencia relativa por su propio logaritmo y sumar para todas las categorías. El resultado de la sumatoria siempre es negativo, por lo que la fórmula incluye un signo menos para volverlo positivo.

Este coeficiente expresa en un solo número la magnitud de la dispersión. Cuanto más pequeña sea esta medida, tanto menos dispersa (o más concentrada) será la distribución de la variable que se analiza.

Aplicado a las dos tablas de más arriba resulta, para la primera:

$$H(x) = -(0,25 * \log 0,25 + 0,25 * \log 0,25 + 0,25 * \log 0,25 + 0,25 * \log 0,25) = -(-0,60) \\ = 0,60$$

Y, para la segunda:

$$H(x) = -(0,05 * \log 0,05 + 0,80 * \log 0,80 + 0,05 * \log 0,05 + 0,10 * \log 0,10) = -(-0,31) \\ = 0,31$$

Así, a la distribución en la que las frecuencias están más concentradas, es decir la que tiene menor dispersión, le corresponde un menor valor de $H(x)$.

El individuo en relación a su grupo

Un uso muy frecuente en evaluación psicológica y educativa de las medidas que acabamos de ver es que permiten decidir si un *valor particular* está cerca o lejos del promedio, o bien si se sitúa o no en los extremos de una distribución. Un valor particular en este caso se refiere al valor de la variable en un *caso*, en un *individuo*, por ejemplo, el puntaje que un sujeto obtiene en una prueba. Así formulado el problema puede parecer muy elemental, porque puede “verse” si un número está cerca o lejos de otro. Si sabemos que una persona tiene dos metros de estatura, no necesitamos hacer cuentas para saber que es alto, más alto que la mayoría de las personas. Sin embargo, en el caso de medidas menos familiares, y como veremos en los ejemplos siguientes, a veces resulta difícil hacer juicios de distancia sobre valores absolutos.

Si sabemos que en una prueba de memoria con un puntaje máximo de 100 puntos, una persona logró 80 puntos, ¿estamos autorizados para decir que obtuvo un puntaje alto? La respuesta es no, porque no sabemos qué puntajes obtuvieron las demás personas que hicieron la prueba. Si la media del grupo completo hubiese sido 60 puntos, entonces 80 sería un valor elevado, pero si la media hubiese sido de 85, entonces el caso que estamos considerando se encontraría por debajo del promedio. Más aún, si el promedio fuese 60 y la mayoría de los evaluados hubiese obtenido puntajes cercanos a 60 (poca variabilidad), entonces el valor 80 podría considerarse como muy elevado. Solo conocer su puntaje individual no nos dice nada acerca de la posición de un sujeto particular.

Otro ejemplo: nos informan que un niño obtuvo un puntaje bruto de 85 en la escala de desarrollo infantil de Bayley (2006), no tenemos, en principio ningún criterio para decidir si ese puntaje es alto o bajo.

Para situaciones como éstas, muy frecuentes en evaluaciones psicométricas, será necesario conocer cuál es la posición *relativa* que un puntaje ocupa respecto del conjunto completo de observaciones.

Supongamos que se aplica una prueba de ortografía a una muestra de alumnos de tercer grado y que el promedio de errores es 10 ($\bar{x} = 10$ errores) y que la desviación estándar es de 4 ($s = 4$ errores). Si un alumno comete 6 errores ($x = 6$ errores), podemos decir que cometió menos errores que el promedio del grupo. El cálculo de la

diferencia entre x y $\bar{x}$ da -4 errores ($x - \bar{x} = 6 - 10 = -4$), este resultado nos informa que este alumno se ubica a 4 errores por debajo del promedio (por debajo queda expresado en el signo menos el resultado). Ésta es una medida concreta, ya que expresa el número de errores que separan al alumno del comportamiento resumido del grupo (expresado en la media); dicho de otra manera, estamos considerando los valores absolutos. Si ahora a esta diferencia la dividimos por la desviación estándar obtenemos -1 (procedente de $\frac{-4}{4}$), que ya no tiene unidades, es un número abstracto. Como la desviación estándar es de 4 puntos y el alumno se encuentra a cuatro puntos de la media, esto equivale a decir que el alumno se encuentra "a una desviación estándar por debajo del promedio". La operación que hemos hecho ha sido la de restar al valor particular (de ese alumno) la media y dividir el resultado en la desviación estándar, hemos calculado lo siguiente:

$$\frac{x - \bar{x}}{s}$$

Este número, que como dijimos no tiene unidades, es diferente para cada valor de x , y mide la distancia a la que se encuentra una observación particular (x) de la media ($\bar{x}$), expresada como fracción de la desviación estándar (s). Decimos que se trata de una medida *estandarizada* del alejamiento que tiene una observación particular del promedio del conjunto de observaciones.

Hemos así expresado la posición del alumno respecto del grupo al que pertenece de manera relativa, en términos de desviaciones estándar.

La variable que resulta de esta operación se llama **desvío estándar**, ya que se trata de un desvío (calculado en la diferencia $x - \bar{x}$) expresado como cantidad de desviaciones estándar. Se utiliza la letra z para indicarla, así:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

Debido a que la letra z se utiliza de manera universal para indicar este valor, es también conocido como **puntaje z** o **puntuación z** . Esta nueva variable tiene media igual a cero y desviación estándar igual a uno²⁵.

Volvamos sobre el ejemplo del número de síntomas en que se basa el diagnóstico de depresión, cuya media fue de 7 y su desviación estándar de 1,55.



²⁵ Dado que $\bar{x}$ y s son constantes, aplicando las propiedades de la media, resulta:

$$\bar{z} = \overline{\left(\frac{x - \bar{x}}{s}\right)} = \frac{\bar{x} - \bar{x}}{s} = 0.$$

También haciendo uso de las propiedades de la varianza, la de z es:

$$V(z) = V\left(\frac{x - \bar{x}}{s}\right) = \frac{1}{s^2}(V(x) - V(\bar{x})) = \frac{1}{s^2}(V(x) - 0) = \frac{1}{s^2}V(x) = 1,$$

ya que la media es constante por lo que tiene varianza nula, y $V(x) = s^2$

Paciente	x_i (número de síntomas)	$x_i - \bar{x}$ (desvíos)	z (desvíos estándar)
1	5	-2	-1,29
2	6	-1	-0,65
3	6	-1	-0,65
4	8	1	0,65
5	8	1	0,65
6	9	2	1,29

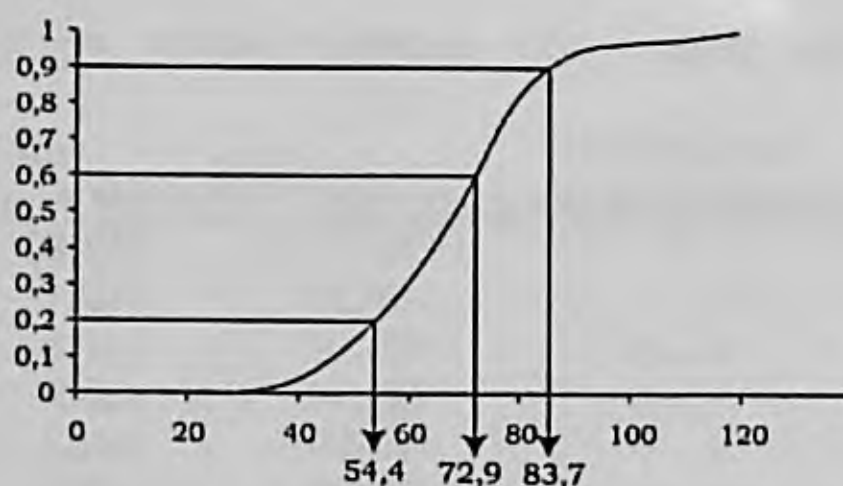
La última columna proviene de haber dividido cada desvío en la desviación estándar (1,55). Los desvíos indican a cuántas unidades de la variable (en este caso *número de síntomas*) se ubica cada caso del promedio. Los desvíos estándar indican a cuántas desviaciones estándar se encuentra cada caso del promedio. El primer paciente está a 1,29 desviaciones estándar por debajo del promedio, el tercero está a 0,65 desviaciones estándar por debajo del promedio, etc.

Cuando se trata de variables de nivel ordinal también es posible ubicar de manera relativa cada valor de la variable, aunque no puedan medirse distancias. Es así porque en esas variables podemos calcular percentiles e indicar a qué percentil corresponde cada valor. Antes vimos el modo de señalar gráficamente la ubicación de los percentiles, allí buscamos de identificar el valor de la variable que corresponde, por ejemplo, al percentil 90 ó a cualquier otro. Podemos hacer ahora el recorrido inverso: dado un valor de la variable ¿a qué percentil corresponde?

Consideremos los siguientes puntajes brutos obtenidos en una prueba psicológica administrada a una muestra de 310 personas:

x	f	F	F'
20-29	0	0	0,00
30-39	10	10	0,03
40-49	30	40	0,13
50-59	50	90	0,29
60-69	70	160	0,52
70-79	90	250	0,81
80-89	40	290	0,94
90-99	10	300	0,97
100-109	5	305	0,98
110-119	5	310	1,00
Total	310		

Los percentiles de esta distribución pueden obtenerse gráficamente usando la ojiva de Galton. Por ejemplo, hallamos los percentiles 20, 60 y 90:



Procediendo del mismo modo, hacemos la siguiente correspondencia de puntajes brutos a percentiles:

Percentil	X
10	47,0
20	54,4
30	60,4
40	64,9
50	69,3
60	72,9
70	76,3
80	79,8
90	87,3

La tabla nos informa sobre los valores de la variable donde se divide cada 10% del total de casos. Usando la definición de los percentiles diremos que:

- El 10% de los sujetos obtuvo 47 puntos o menos
- El 20% obtuvo 54,4 puntos o menos y así para el resto.

Con esta información sabemos que si una persona obtuvo 50 puntos, tiene un puntaje muy bajo, porque supera a menos del 20% del grupo. O dicho de otra manera, más del 80% de las personas alcanzaron puntajes más altos que él. Por el contrario si alguien obtuvo 88 puntos, tiene un puntaje muy alto, ya que supera al percentil 90, con lo que menos del 10% del grupo lo supera. O bien, él supera a más del 90%.

De este modo, la construcción de una tabla en la que se indica el valor de la variable (el puntaje en la prueba) correspondiente a cada percentil, permite conocer si un puntaje dado se ubica en algún extremo de la distribución (si es excepcionalmente elevado o bajo) o si es un valor intermedio.

Estas tablas de correspondencia entre valores absolutos (o puntajes brutos) y los correspondientes valores relativos pueden también construirse a partir de los desvíos estándar, para lo que se debe transformar cada valor observado en su puntuación z . Para el ejemplo anterior se debe calcular la media y la desviación estándar, que dan: $\bar{x} = 68,4$ y $s = 15,7$. Con esto se indican los puntajes z que corresponden a cada puntaje bruto, con la transformación $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$.

Para la marca de clase del primer puntaje bruto (25), el puntaje z que le corresponde es:

$$z = \frac{25 - 68,4}{15,7} = -2,8.$$

Al repetir esta operación para cada puntaje bruto se obtiene la tabla de correspondencias:

Intervalo de puntajes brutos	Puntaje z
20-29	-2,8
30-39	-2,1
40-49	-1,5
50-59	-0,9
60-69	-0,2
70-79	0,4
80-89	1,1
90-99	1,7
100-109	2,3
110-119	3,0

Una tabla de ese tipo (ya sea construida a partir de los percentiles o bien de los puntajes z) se conoce como **baremo** y es absolutamente necesario para cualquier tipo de evaluación psicológica o educativa ya que posibilita decidir en qué lugar se encuentra un sujeto dado, respecto de su grupo de referencia, Esto se requiere porque, por ejemplo, para una prueba de inteligencia, un puntaje que es normal para la edad de 13 años, no lo es para los 16; los puntajes de alguien de 13 años se comparan con los puntajes de otras personas de 13 años. El baremo provee la transformación de puntajes absolutos en puntajes relativos.

Un **baremo** es una tabla de valores transformados que permiten ubicar a un sujeto en relación a su grupo de referencia.

Aplicación a un estudio local

Dentro de la materia Técnicas Psicométricas (segundo año de la Licenciatura en Psicología, UNC), los alumnos han realizado una toma de la escala general del Test de Raven²⁶ a una muestra de alumnos secundarios y universitarios de la ciudad de Córdoba. Con esos datos, un grupo de alumnos coordinado por un ayudante de la cátedra, se interesó en actualizar el baremo del test, puesto que no existían en ese momento baremos locales y actualizados. Se tomó muestra de 551 alumnos de nivel secundario y universitario, con edades entre 16 y 17 años, de ambos sexos.

A continuación, los protocolos fueron clasificados por rangos, para cada uno de los cuales se calcularon los percentiles y los puntajes z teniendo en cuenta el puntaje total y el de cada serie y se construyeron los baremos. A continuación se presentan en dos versiones, como rangos percentilados y como puntajes z:

²⁶O test de matrices progresivas, es una prueba desarrollada por John Raven 1936 y dirigida a medir las dos componentes principales de la inteligencia general, que Spearman había definido años antes.

Puntaje Total (bruto)	Percentil	Intervalo de puntaje bruto	Puntaje z
28	5	0	-5,83
39	10	1 – 2	-5,64
43	25	3 – 4	-5,38
46	40	5 – 6	-5,13
48	50	7 – 8	-4,88
49	60	9 – 10	-4,63
50	70	11 – 12	-4,37
51	75	13 – 14	-4,12
52	80	15 – 16	-3,87
54	90	17 – 18	-3,61
55	95	19 – 20	-3,31
58	99	21 – 22	-3,10
		23 – 24	-2,86
		25 – 26	-2,61
		27 – 28	-2,35
		29 – 30	-2,10
		31 – 32	-1,85
		33 – 34	-1,59
		35 – 36	-1,35
		37 – 38	-1,09
		39 – 40	-0,84
		41 – 42	-0,59
		43 – 44	-0,36
		45 – 46	-0,06
		47 – 48	0,17
		49 – 50	0,42
		51 – 52	0,68
		53 – 54	0,93
		55 – 56	1,18
		57 – 58	1,43
		59 – 60	1,68

Resumen de medidas descriptivas

			Nivel de medición mínimo requerido
Medidas de posición	Centrales	Modo	Nominal
		Mediana	Ordinal
		Media	Intervalar
	No centrales	Cuartiles	Ordinal
		Quintiles	
		Percentiles	

			Nivel de medición mínimo requerido
Medidas de dispersión	Entre extremos	Recorrido	Intervalar
	Basada en el orden	Amplitud intercuartílica	Intervalar
	Basadas en la media	Varianza	Intervalar
		Desviación estándar	
		Coficiente de variación	
	De incertidumbre	Coficiente de incertidumbre	Nominal

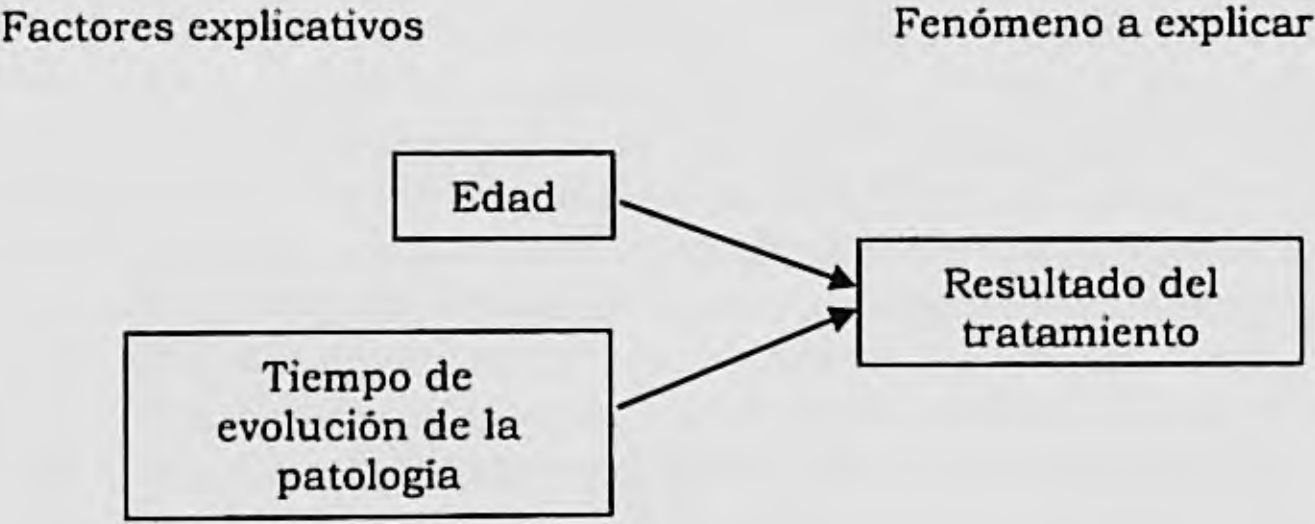
Capítulo 4 Relación entre variables: los fundamentos

Hasta este punto se han descrito variables observadas o medidas a través de instrumentos de a una por vez. Ahora, el objetivo se acerca más al modo de hacer investigación en Ciencias Sociales. Es así porque en este capítulo y el siguiente se trata con *relaciones* entre variables: no ya describir cada variable por separado sino reunir las en relaciones de dos como mínimo, pero que puede incluir a una gran cantidad. Buscar relaciones entre variables es comenzar a transitar el camino de la explicación de los fenómenos que observamos.

Si nos preguntamos, por ejemplo: ¿por qué un tratamiento es exitoso con algunos pacientes diagnosticados de depresión y con otros no? Formularemos hipótesis sobre la respuesta: quizás la edad influya, puede suceder que con pacientes más jóvenes se obtenga mejor resultado que con los de más edad. Razonando así, introducimos otra variable, la *edad*, que aportaría a explicar la razón de los diferentes resultados del tratamiento. La hipótesis está formulada como una relación entre dos variables: se trata de indagar por el efecto que la *edad* (primera variable) tendría sobre el *resultado del tratamiento* (segunda variable). La edad podría ser un **factor explicativo** del resultado del tratamiento.

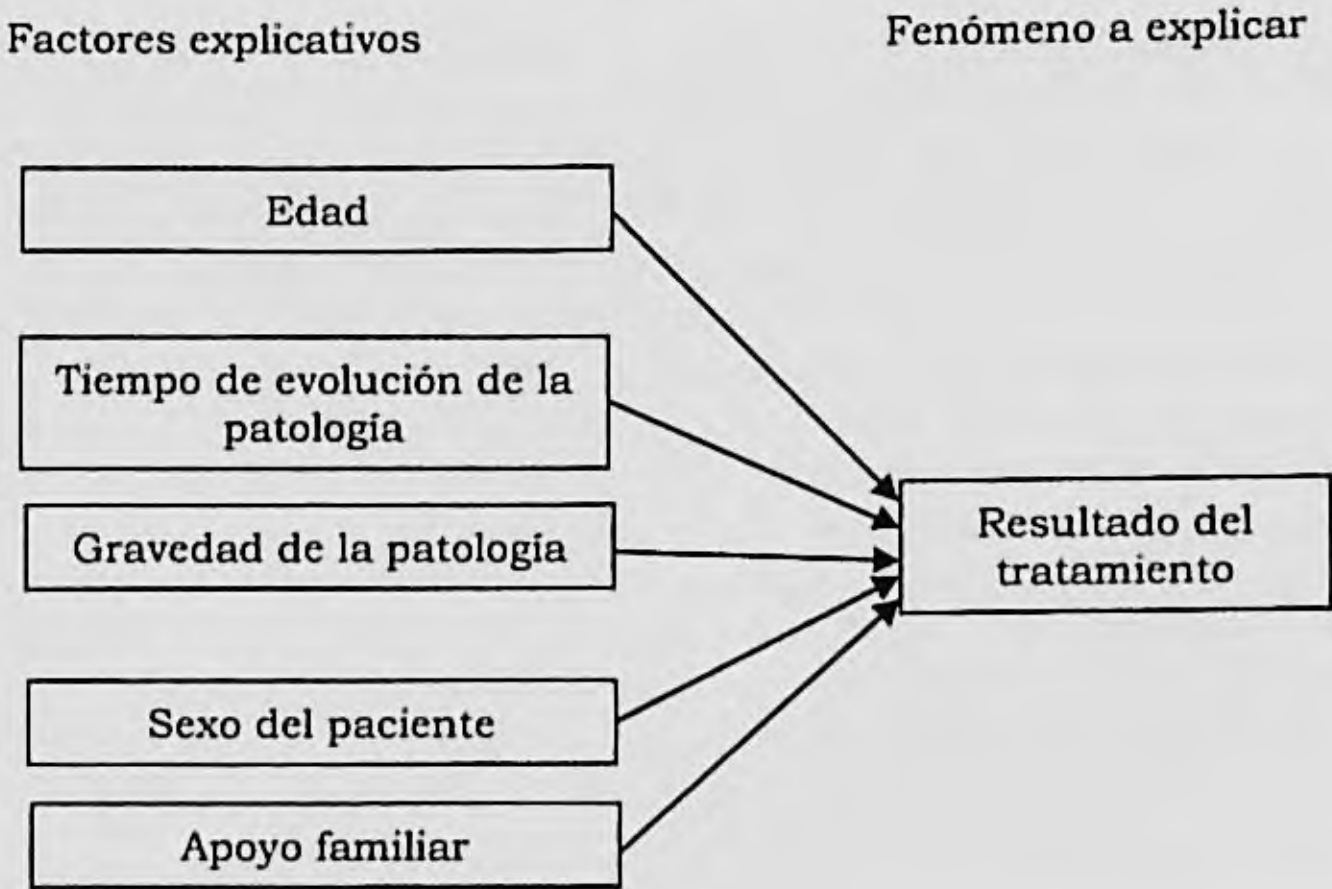
Dentro del mismo ejemplo, también podemos sospechar que quienes han sido diagnosticados más precozmente pueden aprovechar el tratamiento mejor que quienes traen una dolencia de larga data. Aquí la variable que viene a explicar el resultado es el *tiempo de evolución de la enfermedad*. Ahora el *tiempo de evolución de la enfermedad* podría ser otro factor explicativo del *resultado del tratamiento*. Notemos el acento en “podría ser”: estas relaciones son hipotéticas, nuestro objetivo será analizar la evidencia que haya a su favor o en su contra. Esquemáticamente la relación se plantea de la siguiente manera:

Relación hipotética entre dos factores explicativos y el resultado de un tratamiento para la depresión



Estas dos variables son parte de la hipótesis para explicar las diferencias en los resultados que ofrece un determinado tratamiento sobre pacientes diagnosticados de depresión. Puede haber más variables: la gravedad de la depresión, el sexo del paciente (quizás el resultado no sea igual en mujeres que en hombres), el apoyo familiar que el paciente reciba, etc. Tendríamos entonces un esquema explicativo más completo:

Esquema simplificado²⁷ de la relación hipotética entre cinco factores explicativos y el resultado de un tratamiento para la depresión



Jamás agotaremos el conjunto de todos los factores explicativos de un fenómeno, porque en última instancia cada caso es único. Los fenómenos que observamos son multicausados, por lo que no puede decirse que una variable *X* sea la causa de otra variable *Y*²⁸. Pero lo que sí puede hacerse es analizar la importancia relativa de los diferentes factores explicativos; saber en qué grado aporta cada uno a las diferencias que se observan.

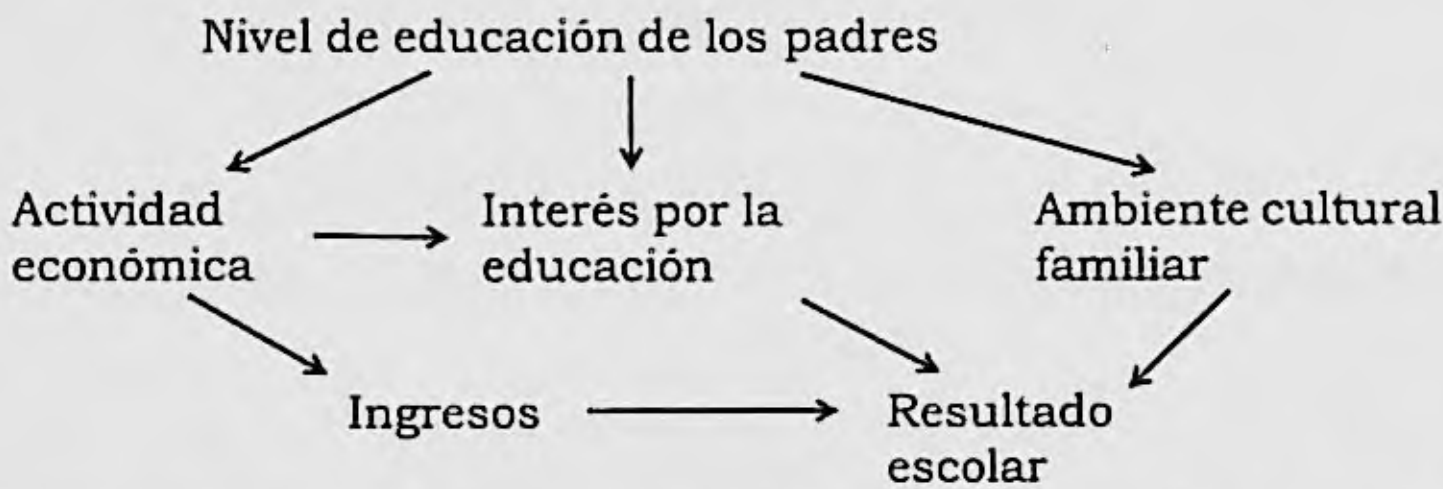
Ilustremos esto con otro ejemplo: el resultado escolar que alcanzan los alumnos. No hay dudas que cada niño tiene una trayectoria única, que depende de su historia, de su contexto familiar, etc. Supongamos que analizamos el resultado escolar obtenido en primer grado y observamos que algunos cursos tienen docentes tradicionales, que usan los mismos métodos estandarizados de enseñanza desde hace muchos años. Otros cursos tienen docentes que invitan a los alumnos participar, que innovan en los métodos de enseñanza. Luego comparamos el rendimiento de los alumnos en los dos cursos y vemos que los alumnos del primer grupo aprenden más lentamente que los del segundo y que además, los primeros dicen que se aburren yendo a la escuela y los otros no. Esto no sucede con todos los niños: habrá en el primer grupo algunos que aprenden más rápido y que se divierten, así como algunos del segundo grupo tardarán más en aprender. Pero, en general, en promedio, podríamos hallar mejores resultados entre los alumnos que tienen docentes innovadores. Esto nos lleva a indicar que

²⁷ El esquema está simplificado porque, solo a los fines de la presentación, suponemos que cada una de las variables de la izquierda influye individualmente sobre el resultado. Sin embargo, es de esperar que la edad esté relacionada con el tiempo de evolución de la patología y éste con la gravedad de los síntomas, por lo que el esquema real tendría más flechas vinculando las variables.

²⁸ Salvo en el caso de diseños experimentales que permitan tener control sobre el conjunto de variables que participan en el resultado que se observa.

hay evidencia para creer que los docentes innovadores obtienen con sus alumnos mejores resultados que los docentes tradicionales. Pero esto no es para todos los alumnos, sino para la mayoría de ellos. De eso se trata la búsqueda de factores explicativos: en este ejemplo diremos que, de los múltiples factores que explican por qué a algunos chicos les va bien en la escuela y a otros les va mal, el tipo de docente es parte de la explicación.

Las hipótesis son respuestas tentativas a la pregunta formulada como problema de la investigación. Como tales, consisten en el planteamiento de una relación entre, al menos, dos variables. Recordemos que las hipótesis constituyen afirmaciones que se derivan del modelo de análisis que el investigador ha propuesto para explicar una situación dada. Las hipótesis son consecuencias deductivas de la teoría, cuya verificación no es suficiente para validar la teoría, aunque sí para “aportar evidencia en su favor”. Además, las hipótesis como tales, rara vez pueden ponerse a prueba de manera directa, son sus consecuencias observables las que permiten la verificación empírica. En cualquier modelo explicativo hipotético participa un número de variables mayor a dos, sin embargo de las hipótesis pueden deducirse relaciones más simples, inicialmente solo de dos variables. Un último ejemplo de un esquema que muestra la relación entre varias variables que aportan a explicar las diferencias en el rendimiento escolar, desde la perspectiva de las condiciones familiares.



El esquema muestra una hipótesis según la cual, los padres con más educación tienden a tener ocupaciones de mayor jerarquía, lo que implica de mejores ingresos y esto puede ayudar a crear condiciones adecuadas para el estudio, como disponer de un lugar para estudiar o tener acceso a otras fuentes de aprendizaje (visitas a museos, viajes, etc.). También los padres con mayor educación probablemente valoren más el estudio y así ofrezca mayor apoyo a sus hijos en la escuela. Por último, sería de esperar que los padres con más educación generen un ambiente con hábitos de lectura y discusiones que transmitan a sus hijos el valor de la educación.

Esto es más cercano a la realidad, en la que las variables se relacionan de manera más compleja que la simple $x \rightarrow y$. Sin embargo la base para analizar estas relaciones complejas, son las relaciones bivariadas, es decir, entre solo dos variables.

Establecer de manera hipotética una relación entre dos variables equivale a afirmar que, por alguna razón, los cambios de una de ellas van acompañados de cambios en la otra. Pero esto puede suceder de maneras muy diferentes, por ejemplo, el trueno sucede al relámpago, los síntomas de tuberculosis coinciden con la detección del bacilo de Koch, los movimientos sociales se incrementan en

tiempos de deterioro económico, las personas abusadas en la infancia son más propensas a la depresión. En algunos de estos ejemplos puede identificarse una secuencia cronológica, señalando cuál de los dos eventos sucede primero, en otros esta distinción no es segura, a veces una variable es la que incide sobre la otra, otras veces es solo una contribución, por último, hay casos en que su ocurrencia conjunta o sucesiva se debe a otras razones. Evitaremos, por ahora hablar de relaciones de causalidad, llegaremos a este concepto hacia el final del capítulo y veremos que debe tratarse con suma cautela.

Con el objetivo de ordenar la gran variedad de formas que pueden asumir las relaciones entre variables, estableceremos algunos criterios de clasificación que, sin ser exhaustivos, nos ayudarán a verlas desde diferentes ópticas.

El modo más usado para observar relaciones entre dos variables consiste en presentar el comportamiento conjunto de ellas a través de tablas o gráficos. Las primeras son más adecuadas para variables con pocas categorías (usualmente nominales), mientras que los gráficos son más pertinentes para mostrar relaciones entre variables métricas. Veamos un ejemplo para ilustrar el primer modo de representación: creemos que los niños que han crecido en diferentes tipos de hogar (solo con su madre, solo con su padre, con ambos o con otros parientes) tienen diferentes formas de relacionarse con sus compañeros (con relaciones de liderazgo, sumisión o rebeldía). En el lenguaje de las relaciones entre variables, estaríamos proponiendo que existe **asociación** entre el tipo de hogar en que el niño crece (con las cuatro categorías mencionadas) y el tipo de relación que mantiene con sus pares. La presentación conjunta de esas dos variables es:

Tipo de hogar → Relación con los pares

Disposición de las variables y sus categorías para analizar la relación entre dos variables

Tipo de hogar	Relación con los pares		
	Sumisión	Rebeldía	Liderazgo
Monoparental materno			
Monoparental paterno			
Nuclear			
Extendido			

Tablas de contingencia

Cuando se distribuyen los datos en las celdas, se obtiene una **tabla bivariada** (porque contiene dos variables), que también se llama **tabla de contingencia** o **tabla de distribución conjunta** o también **tabla de doble entrada**. Las celdas del interior de la tabla llevarán, cuando los datos sean recolectados, la cantidad de niños que se encuentren en cada coincidencia de categorías. Si nuestra hipótesis afirmara que los niños provenientes de hogares nucleares son más propensos a ser líderes, esperaríamos una concentración relativa de casos en la celda correspondiente a “hogar nuclear” – “liderazgo”, hipótesis que luego deberemos confrontar con la información recogida.

Una **tabla bivariada** o **tabla de contingencia** o **tabla de distribución conjunta** es un arreglo con tantas filas (horizontales) como categorías tenga una de las variables y tantas columnas (verticales) como categorías tenga la otra variable.

Por oposición, las tablas que se mostraron en los capítulos anteriores, así como las medidas descriptivas que se calcularon, se denominan **univariadas**. A este arreglo se agrega una fila y una columna adicionales que corresponden a los totales de cada categoría. A los fines de usar un lenguaje común, en la tabla llamaremos filas a la líneas horizontales y columnas a las verticales e identificaremos la **dimensión** de la tabla indicando cuántas filas tiene y cuántas columnas, en este orden. En el ejemplo anterior, la dimensión de la tabla es cuatro por tres, porque tiene cuatro filas y tres columnas correspondientes a la cantidad de categorías de cada una de las dos variables.

La **dimensión** de la tabla se indica como $f \times c$, donde f es el número de categorías de la variable que está en las filas y c es el número de categorías de la variable que está en las columnas.

La celda en la que, bajo la hipótesis indicada, esperaríamos una mayor concentración *relativa* de casos corresponde entonces a la tercera fila y tercera columna. Con f indicaremos la frecuencia y con el subíndice la celda a que corresponde, así, f_{ij} será la cantidad de casos en la celda que corresponde a la fila i y a la columna j simultáneamente. La frecuencia de la celda de “nuclear-liderazgo” será indicada entonces como f_{33} . Para aclarar la presentación de la tabla, se agregan una fila y una columna en la que se indica el total de casos de cada una de ellas, que se llaman **marginales** de fila y de columna. La notación será:

- f_i (“efe i-punto”) para los marginales de fila
- f_j (“efe punto-jota”) para los de columnas
- $f_{..}$ (“efe punto-punto”) para el total general.

Con esa notación, $f_{3.}$ indica el total de niños que crecieron en hogares nucleares y $f_{.2}$ el total de quienes se vinculan con rebeldía con sus compañeros, la tabla anterior resulta:

Disposición de las frecuencias para el análisis de la relación entre dos variables.

Tipo de hogar	Relación con los pares			
	Sumisión	Rebeldía	Liderazgo	Total
Monoparental materno	f_{11}	f_{12}	f_{13}	$f_{1.}$
Monoparental paterno	f_{21}	f_{22}	f_{23}	$f_{2.}$
Nuclear	f_{31}	f_{32}	f_{33}	$f_{3.}$
Extendido	f_{41}	f_{42}	f_{43}	$f_{4.}$
Total	$f_{.1}$	$f_{.2}$	$f_{.3}$	$f_{..}$

Si hemos recogido datos sobre estas características de los niños, la tabla podría quedar así:

Tabla 1: Alumnos de escuelas primarias por relación con sus pares según tipo de hogar.

Tipo de hogar	Relación con los pares			Total
	Sumisión	Rebeldía	Liderazgo	
Monoparental materno	20	30	50	100
Monoparental paterno	10	40	15	65
Nuclear	5	10	25	40
Extendido	30	20	10	60
Total	65	100	100	265

Esta tabla dice que se han observado un total de 265 niños y se ha registrado el tipo de hogar en que crecieron y la forma en que se relacionan con sus compañeros. De los 265:

100 provienen de hogares monoparentales maternos: $f_{1.}$,

65 de monoparentales paternos: $f_{2.}$,

40 de nucleares: $f_{3.}$ y

60 de hogares extendidos: $f_{4.}$.

Los mismos niños se relacionan con sus compañeros:

65 de ellos con sumisión: $f_{.1}$,

100 con rebeldía: $f_{.2}$ y

100 con liderazgo: $f_{.3}$.

Todas estas son lecturas de las frecuencias marginales. Marginales de fila las del tipo de hogar y marginales de columna las de la forma de la relación.

Se llama **frecuencias marginales de fila** a las frecuencias absolutas de las categorías de la variable que se ubica en las filas.

Las **frecuencias marginales de columna** son las frecuencias absolutas de las categorías de la variable ubicada en las columnas.

Las frecuencias de las celdas, que se llaman **frecuencias conjuntas** se leen: 20 de los niños observados crecieron en hogares monoparentales maternos y se relacionan con sus compañeros con sumisión (f_{11}), 30 niños se relacionan con liderazgo y provienen de hogares monoparentales maternos (f_{12}), 10 se relacionan con rebeldía y provienen de hogares nucleares (f_{32}) y del mismo modo el resto de las frecuencias conjuntas. Ellas indican la cantidad de casos que reúnen al mismo tiempo las dos condiciones que se indican en la fila y en la columna.

Las **frecuencias conjuntas** indican la cantidad de casos que corresponden simultáneamente a una determinada categoría de la variable de las filas y una categoría de la variable de columnas.

Frecuencias relativas

Del mismo modo en que trabajamos con las tablas de distribución de frecuencia de una sola variable, podemos transformar todas estas frecuencias absolutas en relativas, por el simple procedimiento de dividir las en el total general. Resulta así:

Alumnos de escuelas primarias por relación con sus pares según tipo de hogar, frecuencias relativas

Tipo de hogar	Relación con los pares			
	Sumisión	Rebeldía	Liderazgo	Total
Monoparental materno	0,08	0,11	0,19	0,38
Monoparental paterno	0,04	0,15	0,06	0,25
Nuclear	0,02	0,04	0,09	0,15
Extendido	0,11	0,08	0,04	0,23
Total	0,25	0,38	0,38	1,00

Leemos así las frecuencias que están destacadas en la tabla:

-El 15% del total de alumnos observados proviene de hogares monoparentales paternos y se relacionan con sus pares con rebeldía: Por ser una frecuencia relativa usamos la “prima” en la notación, entonces es f'_{22}

-Un 25% del total se relaciona con sumisión, sin considerar el tipo de hogar del que provengan. Es f'_1

-Un 38% proviene de hogares monoparentales maternos, sin tener en cuenta de qué manera se relacionan con sus pares. Es f'_1

La primera de estas frecuencias relativas es conjunta, las otras dos marginales. Verifique que queda bien clara la notación usada en cada caso y que pueden leerse las demás frecuencias relativas de la tabla.

Una clasificación en referencia al tiempo

Como señalamos al principio hay relaciones en las que resulta posible identificar a una de las variables como previa a la presencia de la otra, o a un evento como anterior a la ocurrencia del otro. Así, el trueno siempre sucede luego del relámpago, si tenemos la oportunidad de oírlo. Aun cuando no podamos establecer la causa de la relación entre los dos eventos, no tenemos dudas en señalar a uno como anterior al otro. Los malos tratos sufridos durante la niñez son anteriores (en la historia del sujeto) a la eventual manifestación adulta de conductas antisociales. De modo que si nos interrogáramos sobre la existencia de una relación entre estos dos eventos, ubicaríamos a los malos tratos como variable anterior, aunque solo fuera porque su manifestación es temporalmente previa. Así sucede también al buscar una relación entre los resultados de un examen de ingreso a la universidad y el rendimiento posterior de los alumnos.

Es importante indicar a esta altura que no estamos suponiendo que la relación exista, nos encontramos en el momento del planteo de las hipótesis; bien puede suceder que, luego del análisis de los datos, encontremos que la relación no es válida, que no se sostiene, en fin, que las observaciones no avalan una asociación entre malos tratos infantiles y conducta antisocial, o que el resultado de examen de ingreso no se relaciona con el desempeño posterior, pero esto no invalida que, en la relación que proponíamos, una variable sea tratada como anterior a la otra. Así como en ciertos casos es posible anticipar el orden (sea lógico o cronológico) en que se presentan las variables que constituyen una relación, hay algunas situaciones en que esto es muy difícil, o imposible y otras en las que no tiene

ningún interés. Una relación que ilustra el primer caso es la relación entre el comportamiento infantil y el trato que recibe de sus padres. Puede interpretarse a los niños revoltosos como respondiendo a la escasa atención que le brindan sus padres, o leer la forma en que los padres tratan a sus hijos como consecuencia de la mala conducta de estos últimos. En este ejemplo se ve que el orden en que se establezcan las variables que se busca relacionar está influido por la posición teórica que el investigador asuma.

Otros casos en los que no tiene interés mencionar qué variable es anterior y cual posterior son típicos de los estudios descriptivos, en los que interesa mostrar cómo se distribuyen ciertas variables, y no qué relación puede haber entre ellas. Así, una distribución de la población por sexo y edad como la de la tabla siguiente:

Tabla 3: Departamento Capital, Provincia de Córdoba. Población por sexo según grupos de edad. Año 2001

Grupos de edad	Sexo		Total
	Varones	Mujeres	
0-4	56.913	55.053	111.966
5-9	57.471	56.073	113.544
10-14	55.564	54.394	109.958
15-19	55.581	55.834	111.415
20-24	67.519	69.727	137.246
25-29	53.736	54.667	108.403
30-34	42.209	43.852	86.061
35-39	36.910	39.894	76.804
40-44	34.681	38.243	72.924
45-49	31.879	36.634	68.513
50-54	30.780	36.187	66.967
55-59	24.485	29.448	53.933
60-64	19.914	25.038	44.952
65-69	16.485	22.387	38.872
70-74	13.858	20.831	34.689
75-79	8.816	15.318	24.134
80-84	4.423	9.471	13.894
85-89	1.827	5.355	7.182
90-94	600	1.906	2.506
95-99	120	448	568
100 y más	8	43	51
Total	613.779	670.803	1.284.582

Fuente: INDEC (2009)

Solo pretende describir a la población y no tiene sentido preguntar qué variable es prioritaria a la otra o cuál depende de cuál.

Las relaciones en que no es posible o no interesa señalar qué variable es anterior, se llaman **simétricas**²⁹ o de variación conjunta o de covariación, con ellas simplemente puede preguntarse si las variables están correlacionadas. Es decir si varían simultáneamente, sin preguntar cuál es la que podría preceder a la otra. Otro ejemplo de este tipo de relaciones es la que puede plantearse entre las calificaciones que los alumnos obtienen en dos materias que cursan simultáneamente; si encontramos que a aquellos alumnos que les va bien en Epistemología también obtienen buenas notas en Biología, no creemos que un resultado incida en el otro, solamente *describiremos* que varían conjuntamente. Si luego nos interesamos por avanzar en un estudio explicativo iremos a buscar otras variables que den cuenta de esta covariación.

Una relación entre dos variables es **simétrica** cuando es de variación conjunta y no puede identificarse a una variable como previa a la otra

Por el contrario, aquellas relaciones en las que puede identificarse a una variable como anterior a otra se denominan **asimétricas**, es decir, no es lo mismo planearlas en un sentido que en otro. Una de las variables (la anterior) se llama antecedente y la otra (posterior) consecuente. En el contexto del diseño experimental, estas variables se denominan, respectivamente independiente y dependiente.

Puede observarse que una variable cambia a continuación de la otra (en sentido temporal) pero esto no nos autoriza a decir que cambia a causa de la otra, como resulta claro en el ejemplo del relámpago y el trueno. Que la relación sea asimétrica no implica que una variable sea ni la causa, ni un factor explicativo, de la otra.

A la inversa, en los estudios explicativos la relación debe ser asimétrica, porque se busca identificar factores que anticipen determinados eventos. Por eso decimos que la asimetría es una condición necesaria de la causalidad, pero no suficiente.

Una relación entre dos variables es **asimétrica** cuando una de las variables precede (lógica o cronológicamente) a la otra y puede identificarse a una como antecedente y a la otra como consecuente.

La dirección de la relación

Cuando las variables que se ponen en juego en una relación tienen un nivel de medición superior al nominal, resulta posible hacer juicios de orden entre sus categorías, con lo que es posible indicar si los valores van creciendo o decreciendo. Ya sea que se trate de una relación simétrica o asimétrica, si las variables tienen nivel ordinal o superior, resulta de interés plantear la **dirección** de la relación. Se trata de otro criterio para clasificar relaciones entre variables: si a cambios ascendentes (crecientes) de una variable se siguen cambios ascendentes de la otra, llamamos a la relación **directa**. Si, por el contrario, un

²⁹ Atención, éste es un uso diferente de los términos simetría y asimetría. La simetría de una distribución (univariada) indica su forma, acá se refiere al tipo de relación entre dos variables. El primer uso caracteriza a una variable, el segundo a una relación.

crecimiento de una de las variables va acompañado de una disminución en los valores de la otra, la denominaremos **inversa**³⁰. Cuando se espera que la relación entre dos variables sea directa o inversa para toda la serie de categorías, decimos que la relación es monótona.

Por ejemplo, puede plantearse, de manera hipotética, la relación entre los años de educación y el salario. Las personas que han asistido más años a instituciones educativas tienden, en promedio, a tener ingresos más altos que quienes asistieron menos tiempo. La hipótesis anticipa una relación directa entre la escolarización y los ingresos.

Una relación entre dos variables medidas a nivel ordinal o superior es **directa** si cuando los valores de una de ella aumentan, también aumentan los de la otra.

Análogamente:

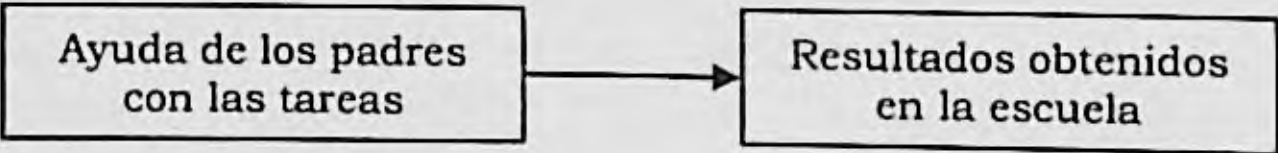
Se llama **inversa** a la relación entre dos variables de nivel ordinal o superior en la que los incrementos en los valores de una de ellas van acompañados de disminuciones en los valores de la otra

La clasificación solo tiene sentido si puede hablarse de aumento o disminución, es decir, si es factible realizar juicios de orden entre las categorías de las variables. Por eso es que este criterio requiere, para su aplicación, que ambas variables tengan por lo menos nivel ordinal.

Por ejemplo, la *calificación* que se obtiene en un examen (variable consecuente, de nivel ordinal) puede tener relación directa con las *horas dedicadas* a estudiarla (variable antecedente, de nivel proporcional). Lo que equivale a decir que quienes estudian más horas tenderían a obtener calificaciones más altas.

Si en otro ejemplo, se formula como hipótesis que el *tipo de escuela* secundaria (variable antecedente, de nivel nominal) a la que los alumnos asistieron tiene relación con el *rendimiento* que alcanzan en su carrera universitaria (variable consecuente, de nivel ordinal), no es posible establecer la dirección de esta relación, porque no se cumple que ambas variables sean al menos ordinales.

Ejemplo (datos ficticios): la expresión “si los padres los ayudan con las tareas, a los chicos les va mucho mejor en la escuela” equivale a decir que la ayuda que los padres les dan a sus hijos está relacionada con mucha intensidad con el rendimiento en la escuela. La primera variable, la ayuda es la antecedente, que puede ser de nivel nominal, con categorías: *ayuda*, *no ayuda*; o bien ordinal, con categorías: *ayuda siempre*, *casi siempre*, *pocas veces*, *nunca*. La segunda variable, el rendimiento, es la consecuente, y sus categorías podrían ser: *rendimiento alto*, *medio*, *bajo*. El esquema de la relación será:



³⁰³⁰ No es directamente o inversamente proporcional. La proporcionalidad es otra cosa. Aquí solo se trata de que cambien en la misma dirección (ambas aumentan o ambas disminuyen) o en dirección inversa (una aumenta y la otra disminuye).

Y la tabla que reúna los datos para verificar esta relación podrá tener dimensión 2X3, con forma:

Disposición de las variables para analizar la relación entre la ayuda que los padres dan a sus hijos y el rendimiento que alcanzan en la escuela

Ayuda	Rendimiento			Total
	Alto	Medio	Bajo	
Si				
No				
Total				

O bien, considerando a la ayuda como ordinal, en una tabla de 4X3

Disposición de las variables para analizar la relación entre la ayuda que los padres dan a sus hijos y el rendimiento que alcanzan en la escuela

Ayuda	Rendimiento			Total
	Alto	Medio	Bajo	
Siempre				
Casi siempre				
Pocas veces				
Nunca				
Total				

Planteada de este modo, se trata de una relación asimétrica, ya que suponemos que es la ayuda (antecedente) la que incide sobre el resultado (consecuente). Si vemos el último esquema, puede considerarse la dirección (en el anterior no ¿por qué?) y la formularíamos como directa, es decir que, cuanto mayor sea ayuda que los padres aportan, tanto mejores serán los resultados. Esto está dentro de la hipótesis, aún no hemos recogido datos para avalarla o refutarla. Llegar a conocer si la ayuda de los padres contribuye en gran medida o escasamente a los resultados en la escuela, es un problema de la intensidad de la relación, que solo podrá responderse a posteriori, una vez que los datos están recolectados.

Concepto de riesgo relativo

En las tablas de contingencia de dimensión 2X2, que plantean relaciones asimétricas se suele calcular una medida que resulta de muy accesible interpretación, denominada *riesgo relativo*. Se trata de un cociente entre la proporción de casos que se encuentran en una categoría de la variable consecuente bajo determinado escenario (una categoría de la variable antecedente) y la proporción de casos que se hallan en la misma, bajo el escenario complementario (la otra categoría de la variable antecedente). Es un término que tiene uso regular en epidemiología y tiene la ventaja de la claridad en la comunicación. Por ejemplo, un informe afirma que “El riesgo relativo de cardiopatía isquémica (CI) es 2,5 veces mayor en pacientes hipertensos.” Se interpreta que las personas que son hipertensas tienen dos veces y media mayores chances de sufrir CI que quienes no lo son. El riesgo relativo se usa principalmente (pero no solo) en la relación entre dos variables dicotómicas; en este ejemplo las variables son: ser hipertenso y haber sufrido cardiopatía isquémica, ambas con categorías si – no, la primera es el antecedente y la

segunda el consecuente, porque interesa plantear el posible efecto de la hipertensión sobre la CI. El esquema de la relación hipotética es:

Ser hipertenso $\longrightarrow$ Sufrir cardiopatía isquémica
Y la disposición de las variables para observar la eventual relación es:

		Sufrir cardiopatía isquémica	
		Si	No
Ser hipertenso	Si No		

Ejemplo (datos ficticios): interesados en el efecto que podría tener el hábito de lectura de los alumnos sobre su rendimiento en Lengua, usamos una pregunta de un cuestionario aplicado a estudiantes del último año del secundario, que dice: “Durante los últimos dos meses ¿Leíste o estás leyendo algún libro, además de los que te pidieron en la escuela?” Con categorías de respuesta si – no. Nos interesa analizar la relación de esta variable con el resultado que los alumnos obtienen en la prueba de lengua, para lo cual cortamos los puntajes de esta prueba en dos categorías: altos (50 puntos o más) y bajos (menos de 50 puntos). Para la provincia de Córdoba, en el año 2000 resulta la siguiente tabla:

Durante los últimos dos meses ¿Leíste o estás leyendo algún libro, además de los que te pidieron en la escuela?	Puntaje de la prueba de Lengua		
	Bajos	Altos	Total
Si	2382	10299	12681
No	3530	9821	13351
Total	5912	20120	26032

Fuente ONE 2000

A fin de comparar los puntajes que obtienen quienes leen con los que obtienen los que no leen (para ver si hay alguna diferencia), hacen falta frecuencias relativas. En este caso se calculan según las filas de la tabla:

Durante los últimos dos meses ¿Leíste o estás leyendo algún libro, además de los que te pidieron en la escuela?	Puntaje de la prueba de Lengua		
	Bajos	Altos	Total
Si	18,8%	81,2%	100,0%
No	26,4%	73,6%	100,0%
Total	22,7%	77,3%	100,0%

Fuente ONE 2000

En esta tabla se observa que menos de un cuarto (el 22,7%) obtuvo resultados bajos, pero que este porcentaje es diferente entre quienes lee y quienes no lo hacen: entre quienes dicen que leen, menos del 19% (el 18,8%) tiene bajo puntaje, mientras que entre quienes dicen que no leen, ese porcentaje sube a más del 26 (26,4%). Dado que el resultado bajo se considera como el evento desfavorable, puede hablarse del riesgo de obtenerlo. Así, el riesgo de obtener puntaje bajo en Lengua es 18,8% para quienes dicen que leen y de 26,4% para quienes dicen que

no leen. Estos valores son los que se usan para calcular el riesgo relativo, el cociente entre 26,4 y 18,8 es 1,4, por lo que diremos que hay 1,4 veces más chances de obtener bajos resultados en Lengua entre alumnos que no leen que entre los que sí lo hacen.

La intensidad

Sea que se trate de relaciones simétricas o asimétricas y que pueda o no decidirse sobre la dirección, siempre es posible (y tiene mucho interés hacerlo) evaluar la **intensidad** en que se manifiesta la relación entre las variables a partir de los datos de nuestras observaciones. Esta medida de la relación se corresponde con la idea intuitiva de “X tiene mucha influencia en Y”, la idea de mucha o poca influencia, es la de intensidad de la relación. Cuando hay muchos factores explicativos para un fenómeno, interesa saber qué factores inciden en mayor o menor medida en el fenómeno y a eso se responde indicando la intensidad de cada relación.

La intensidad o grado de la relación puede también aplicarse a relaciones simétricas. En ese caso, la intensidad mide cuán a menudo los cambios de una de las variables se ven acompañados de cambios en la otra, y es un resultado descriptivo, no explicativo.

La **intensidad de una relación**³¹ es una medida de la fuerza con que los cambios en una variable afectan los cambios en la otra (si es una relación asimétrica) o bien, de la frecuencia con que los cambios de una variable acompañan a los de la otra (si se trata de una relación simétrica).

La evaluación de esta intensidad puede lograrse, en una primera aproximación, observando la distribución conjunta de las dos variables. En la medida que cierta combinación de categorías de una y otra variable concentren la mayor parte de los casos, estaremos en presencia de relaciones más fuertes o de mayor intensidad. Los siguientes son resultados de un estudio que relaciona el tipo de docente con el rendimiento de sus alumnos:

Tabla 4: Alumnos primarios por rendimiento según tipo de docente, frecuencias absolutas

tipo de docente	rendimiento			Total
	alto	medio	bajo	
Autoritario	5	35	50	90
Democrático	260	40	10	310
Total	265	75	60	400

InfoStat® ofrece la tabla de contingencia así:

³¹No es posible ofrecer una definición más precisa porque según el modo en que se mida la intensidad, es decir, según el coeficiente que se use, es diferente el aspecto de la relación que se tiene en cuenta.

Tablas de contingencia

Frecuencias absolutas

En columnas: rendimiento

tipo docente	1,00	2,00	3,00	Total
1,00	5	35	50	90
2,00	260	40	10	310
Total	265	75	60	400

En la están codificados los tipos de docente como 1 y 2 y del mismo modo los rendimientos de los alumnos.

Al pedir las frecuencias relativas al total obtenemos:

Tabla 5: Alumnos primarios por rendimiento según tipo de docente, frecuencias relativas al total

tipo de docente	rendimiento			Total
	alto	medio	bajo	
Autoritario	0,01	0,09	0,13	0,22
Democrático	0,65	0,10	0,03	0,78
Total	0,66	0,19	0,15	1,00

Leemos las frecuencias conjuntas y las marginales como en la tabla 2. Por ejemplo:

El 10% de los alumnos tuvo docente democrático y rendimiento medio.

El 15% de los alumnos tuvo rendimiento bajo (sin importar qué tipo de docente tuvo).

El 22% tuvo docente autoritario (sin importar cuál fue su rendimiento).

Observando la distribución de los casos de la tabla 4 (frecuencia absolutas) parece haber una tendencia a que los docentes autoritarios tengan alumnos con menor rendimiento. Supondremos que los alumnos han sido distribuidos al azar entre los docentes de los dos tipos, es decir que no sucedió que a los docentes autoritarios “les tocaron” malos alumnos. Por lo tanto la pregunta es acerca del efecto que tendría el tipo de docente (antecedente) sobre el rendimiento de los alumnos (consecuente).

De los 90 alumnos que tuvieron docente autoritario, la mayor parte (50) muestra bajo rendimiento; por el contrario, de los 310 alumnos que tuvieron docente “democrático”, la mayoría (260) tiene rendimiento alto, por lo que podría afirmarse que no es igual el rendimiento que se observa en alumnos con docentes de un tipo o de otro.

A fin de eliminar los efectos de las cantidades diferentes de alumnos con docentes autoritarios y democráticos, la relación puede verse mejor si se calculan porcentajes en cada celda. Tomando como totales las cantidades de alumnos que tienen docentes autoritarios y que los tienen democráticos; es decir, calculando las frecuencias relativas según los totales de la variable antecedente, se obtiene:

Tabla 6: Alumnos primarios por rendimiento según tipo de docente, frecuencias relativas por filas

Tipo de docente	Rendimiento			Total
	Alto	Medio	Bajo	
Autoritario	0,06	0,39	0,55	1,00
Democrático	0,84	0,13	0,03	1,00
Total	0,66	0,19	0,15	1,00

Sobre esta tabla puede afirmarse que, del total de alumnos que tuvieron docentes autoritarios, un 55% ha tenido bajo rendimiento. Por el contrario solo un 3% de los alumnos con docente democrático acusa rendimiento bajo. En el otro extremo, los autoritarios tienen un 6% de alumnos de rendimiento alto frente a un 84% de los democráticos.

Otra manera de leer los porcentajes es comparando con los marginales: sin considerar el tipo de docente, el 66% de los alumnos tuvo rendimiento alto. Cuando se considera al grupo de alumnos que tuvo docentes democráticos, este porcentaje sube al 84%, mientras que, en el grupo de quienes tuvieron docente autoritario, solo el 6% tuvo alto rendimiento.

La ventaja de usar porcentajes (o frecuencias relativas) es que las comparaciones se hacen sobre los mismos totales, es “como si” hubiese 100 alumnos con docente autoritario y 100 con democrático.

Que haya cierto efecto del tipo de docente (antecedente) sobre el rendimiento de los alumnos (consecuente) no es equivalente a que el tipo de docente sea “la causa” del rendimiento alto o bajo. Así, vemos que hay algunos alumnos con docente autoritario que obtuvieron altos rendimientos (aunque solo sea el 6% del total) y otros que aun con docente democrático, tuvieron rendimiento bajo. Solo podemos afirmar que si el docente es democrático, hay más posibilidades de que los alumnos tengan mejor rendimiento, o que el tipo de docente es uno de los muchos factores que pueden incidir en el rendimiento de los alumnos.

Al comparar la tabla 6 con la 5 vemos que aunque ambas ofrecen frecuencias relativas, la 5 las calcula respecto del total general (los 400 casos) mientras que en la 6 los totales son las frecuencias marginales de cada fila. Son dos resultados muy diferentes, en efecto, la frecuencia de la celda 1,1 en la tabla 5 es 0,01 e indica que el 1% **del total de alumnos** tuvo docente autoritario y tuvo rendimiento alto, La misma celda en la tabla 6 tiene frecuencia de 0,06 y se lee: **de los alumnos con docente autoritario**, el 6% tuvo rendimiento alto. Veamos que la primera de las frecuencias (relativa al total) contiene información simultanea sobre las dos variables, mientras que la segunda (relativa a los totales de fila), fija una categoria para una de las variables: al hablar de los alumnos con docente autoritario, estamos restringiendo el conjunto completo, ya no es un juicio sobre los 400 alumnos del total, sino solo sobre los 90 que cumplen con ese requisito (haber tenido docente autoritario). La frecuencia está condicionada por ese requisito. Esto equivale a decir que las frecuencias relativas cambian cuando se establece una condición como la mencionada. En general, la proporción de alumnos con alto rendimiento es del 66%, pero si agregamos el dato que indica que estamos tratando solo con los que tuvieron docente autoritario, entonces la

proporción decae al 6%. El tipo de docente es una condición que imponemos cuando calculamos estas frecuencias relativas a los totales de fila.

El modo en que se calcularon las frecuencias relativas (o los porcentajes) en la tabla 6 fue tomando como total al número de alumnos con cada tipo de docente. No es ésta la única opción posible, ¿por qué no lo hicimos dividiendo por los totales de cada nivel de rendimiento? Es decir ¿qué hizo que eligiéramos en esta tabla las filas y no las columnas como totales para el cálculo de los porcentajes? En los casos en que tratemos con relaciones asimétricas, como lo es el del ejemplo, siempre elegiremos como denominador a los totales de la variable antecedente, porque queremos ver qué diferencia hay entre los grupos que definen sus categorías. En nuestro caso, el interés se centra en saber si el cambio de docente autoritario a democrático implica diferencia en el rendimiento de los alumnos. No es importante si la variable antecedente se ubica en las filas o en las columnas, son sus totales los que usaremos para el cálculo de los porcentajes.

Con el paso de las frecuencias simples a las relativas, hemos avanzado en la detección de la relación entre las dos variables, pero aun no podemos cuantificar su intensidad. Para ello existe una gran cantidad de coeficientes que se usan para reconocer si se trata de relaciones fuertes, débiles o simplemente inexistentes. Estos coeficientes varían según el nivel de medición de las variables, según el número de categorías, la simetría de la relación y, en especial, en el aspecto que analizan de la relación y el modo en que se interpretan. En este capítulo solo nos detendremos en uno de ellos que es de utilidad para tratar relaciones entre variables que tienen dos categorías cada una, es decir entre dos variables dicotómicas. En los próximos capítulos trataremos con otros coeficientes.

El coeficiente que usaremos para evaluar la intensidad de una relación entre dos variables dicotómicas se denomina *Q de Kendall - Yule* y en su cálculo tiene en cuenta el modo en que las frecuencias se distribuyen entre las cuatro celdas de la tabla.

Para ejemplificar el uso de este coeficiente, transformaremos la relación del caso anterior, dejando de lado a los alumnos de rendimiento medio, con lo que la tabla queda:

Tabla 7: Alumnos primarios por rendimiento según tipo de docente

Tipo de docente	Rendimiento		
	Alto	Bajo	Total
Democrático	260	10	270
Autoritario	5	50	55
Total	265	60	325

La concentración de la mayoría de los casos en las celdas de una de las diagonales de la tabla es una señal de la asociación existente entre las dos variables. El coeficiente Q se calcula operando con esas frecuencias del siguiente modo:

$$Q = \frac{260 \cdot 50 - 5 \cdot 10}{260 \cdot 50 + 5 \cdot 10} = \frac{12950}{13050} = 0,992$$

En el numerador, hemos multiplicado las frecuencias de una de las diagonales (260*50) y le hemos restado el producto de las frecuencias de la otra diagonal (5*10). En el denominador, hemos sumado los mismos dos productos. De manera simbólica, si representamos a las frecuencias de las celdas como A, B, C y D, tenemos

A	B
C	D

$$Q = \frac{A * D - C * B}{A * D + C * B}$$

El cálculo de este coeficiente da un número que puede ser positivo o negativo pero que siempre se encuentra entre -1 y 1.

$-1 \leq Q \leq 1$

En este coeficiente, el signo no tiene interpretación, se consideran iguales, por ejemplo, los valores 0,80 y -0,80. Esto se debe a que el signo que resulta depende del orden (arbitrariamente elegido) con que se hayan dispuesto las filas y las columnas. Si en la tabla 7 cambiamos las filas:

Tabla 7bis: Alumnos primarios por rendimiento según tipo de docente

Tipo de docente	Rendimiento		
	Alto	Bajo	Total
Autoritario	5	50	55
Democrático	260	10	270
Total	265	60	325

La tabla es la misma, pero el coeficiente cambia de signo:

$$Q = \frac{5 * 10 - 260 * 50}{5 * 10 + 260 * 50} = \frac{-12950}{13050} = -0,992$$

Este resultado se interpreta igual que si fuera positivo.

Cuanto más próximo a uno (1) o a menos uno (-1) sea el coeficiente, tanto más intensa es la relación entre las dos variables. Los valores del coeficiente cercanos a cero indican una relación entre las variables que es débil o inexistente. Por lo tanto, el valor obtenido en el ejemplo anterior señala una relación intensa entre las dos variables, pudiendo llevarnos a afirmar que el tipo de docente tiene, según estos datos, mucho que ver con los resultados que los alumnos obtienen. Dicho de otra manera, entre los muchos factores que pueden incidir en el rendimiento de los alumnos, el tipo de docente juega un papel importante. En el caso extremo que el coeficiente sea igual a uno (o a menos uno) diremos que la relación es perfecta. Se trata de un caso ideal, no factible de ser observado en la realidad, pero que sirve para establecer el valor límite del coeficiente. Un ejemplo en que esto sucedería es si las frecuencias de la tabla anterior fueran como las siguientes:

Tabla 8: Alumnos primarios por rendimiento según tipo de docente

Tipo de docente	Rendimiento		
	Alto	Bajo	Total
Democrático	270	0	270
Autoritario	0	55	55
Total	270	55	325

Aquí resulta que todos los alumnos que tuvieron docentes autoritarios tienen bajo rendimiento y todos los que tuvieron docentes democráticos, alto rendimiento. En esta tabla

$$Q = \frac{270 \cdot 55 - 0 \cdot 0}{270 \cdot 55 + 0 \cdot 0} = \frac{14850}{14850} = 1$$

El valor 1 se interpreta entonces indicando que la relación entre el tipo de docente y el rendimiento de los alumnos es perfecta.

El caso contrario es aquél en el que no haya relación alguna entre las variables, allí es cuando el coeficiente alcanza (en valor absoluto) su mínimo valor posible, cero. Otra vez se trata de un caso ideal, porque muy improbablemente se encontrarán en la realidad observaciones que lleven a un coeficiente que sea exactamente cero.

Modifiquemos nuevamente las frecuencias de nuestra tabla para ejemplificar esa situación ficticia:

Tabla 9: Alumnos primarios por rendimiento según tipo de docente

Tipo de docente	Rendimiento		
	Alto	Bajo	Total
Democrático	54	216	270
Autoritario	11	44	55
Total	65	260	325

En este caso los alumnos están distribuidos en las celdas del mismo modo si se trata de docentes autoritarios o democráticos, lo cual puede verse mejor si se calculan las frecuencias relativas por filas, como hicimos antes:

Tabla 10: Alumnos primarios por rendimiento según tipo de docente

tipo de docente	rendimiento		
	alto	bajo	total
democrático	0,20	0,80	1,00
autoritario	0,20	0,80	1,00
total	0,20	0,80	1,00

Aquí encontramos que un 20% de los alumnos tiene rendimiento alto y un 80% bajo, ya sea que hayan tenido docentes autoritarios o democráticos. El cálculo del coeficiente da ahora:

$$Q = \frac{54 \cdot 44 - 11 \cdot 216}{54 \cdot 44 + 11 \cdot 216} = \frac{0}{4752} = 0$$

Este valor indica que no hay relación entre las variables, es decir que, según estos datos, el tipo de docente no hace diferencia alguna en el rendimiento de los alumnos.

El coeficiente Q de Kendall - Yule mide la intensidad de la relación entre dos variables dicotómicas comparando la concentración de frecuencias en las diagonales. Alcanza su valor máximo cuando todos los casos se ubican sobre una diagonal y la relación es perfecta. Alcanza su mínimo valor cuando las frecuencias están distribuidas de manera proporcional entre las celdas y las variables son independientes.

Una limitación importante de este coeficiente aparece cuando la distribución de las frecuencias es “rinconal”. Esto quiere decir que una de las frecuencias es cero, como sucedería si en la tabla 7, no se hubiesen encontrado docentes democráticos con alumnos de bajo rendimiento:

Tabla 11: Ejemplo de distribución rinconal, alumnos primarios por rendimiento según tipo de docente

Tipo de docente	Rendimiento		
	Alto	Bajo	Total
Democrático	54	0	54
Autoritario	11	44	55
Total	65	44	109

En este ejemplo —y siempre que una celda tenga frecuencia cero—, el coeficiente Q dará valor 1 (ó -1) y esto no debe interpretarse como una asociación perfecta.

Terminaremos esta introducción a la relación entre variables con una referencia al problema de la causalidad. El hecho de haber encontrado que, en una relación asimétrica, existe una asociación intensa entre las variables, no nos lleva inmediatamente a suponer que la antecedente sea causa del consecuente. En toda explicación de un fenómeno, en especial de los fenómenos sociales, la causalidad es múltiple, es casi siempre imposible atribuir una causa única a la explicación de un hecho. Desde el sentido común es frecuente enunciar que “todo tiene una causa”, pero en el dominio de la investigación en ciencias sociales los hechos que nos interesa analizar tienen múltiples causas, las cuales compiten entre sí en la explicación. Por lo tanto, descubriendo relaciones entre variables podemos aportar a la inclusión o exclusión de variables como factores explicativos de un fenómeno dado, pero no a “determinar su causa”. Podremos afirmar qué factores hacen más probable la aparición de un fenómeno dado, bajo qué condiciones su ocurrencia es más frecuente, o inclusive indicar cuáles son las variables más importantes para que el fenómeno suceda, pero muy difícilmente lleguemos a afirmaciones del tipo *X es la causa de Y*. Pensemos por ejemplo en fenómenos psicosociales complejos, como la delincuencia juvenil. El tipo de hogar del que las personas provienen puede tener efecto, la relación con los padres, el abandono temprano de la escuela, la estructura familiar actual, y pueden seguir enumerándose factores que contribuirían a explicar que algunas personas desarrollen conductas delictivas y

otras no. Pero no será posible alcanzar una explicación completa del fenómeno, en una expresión ingenua como *la causa de la delincuencia es...*

El concepto de independencia estadística

Formulemos ahora el problema de manera inversa, interrogándonos por las condiciones en que puede decirse que dos variables son independientes. Intuitivamente la independencia entre dos eventos equivale a que la ocurrencia de uno de ellos no tiene efecto en el del otro. Así, las oportunidades que un evento ocurra serán iguales tanto si el otro evento sucedió como si no lo hizo. Cuando decimos que X no tiene efectos sobre Y, indicamos que Y sucede tanto si X está presente como si no lo está. La independencia de dos variables es equivalente a que no haya asociación entre ellas.

Repitamos el cruce de las variables tipo de docente y rendimiento, ahora con frecuencias diferentes.

Tabla 12: Alumnos primarios por rendimiento según tipo de docente, frecuencias absolutas

tipo de docente	rendimiento		
	alto	bajo	total
democrático	170	10	180
autoritario	30	90	120
total	200	100	300

Tabla 13: Alumnos primarios por rendimiento según tipo de docente, frecuencias relativas por filas

tipo de docente	rendimiento		
	alto	bajo	total
democrático	0,94	0,06	1,00
autoritario	0,25	0,75	1,00
total	0,67	0,33	1,00

En la última fila, las frecuencias marginales indican que en la muestra observada hubo un 67% de alumnos de rendimiento alto y 33% de rendimiento bajo, sin tener en cuenta el tipo de docente. Este dato nada dice sobre la relación entre las variables sino que proviene del modo en que resultó la composición de la muestra.

Si el tipo de docente no tuviera efecto en el rendimiento, esperaríamos que haya igual proporción de alumnos con rendimiento alto y bajo entre docentes de diferente tipo. Si del total de alumnos, el 67% tiene rendimiento alto, los docentes democráticos deberían tener un 67% de alumnos con rendimiento alto y también debería ser así para los docentes autoritarios. De modo que, de los 180 alumnos que tuvieron docente democrático, 120 (que constituyen aproximadamente el 67% de 180) deberían haber tenido rendimiento alto. Análogamente, el 67% de 120, (aproximadamente 80 alumnos) son los que debería haber con alto rendimiento y docente autoritario. Las frecuencias de las celdas de los alumnos con bajo rendimiento se obtienen usando ahora el porcentaje del 33% sobre los mismos

totales (180 y 120). Puede entonces construirse una nueva tabla con las frecuencias que se esperaría encontrar si las dos variables fueran independientes, es decir si el tipo de docente no tuviera efecto alguno en el rendimiento de los alumnos.

Tabla 14: Frecuencias esperadas bajo la hipótesis de independencia correspondiente a la tabla 12

tipo de docente	rendimiento		
	alto	bajo	total
democrático	120	60	180
autoritario	80	40	120
total	200	100	300

Observemos algunos detalles de esta tabla. En primer lugar, las frecuencias marginales no han cambiado, los totales son los mismos y solo se trata de un reordenamiento de las frecuencias conjuntas bajo la hipótesis de independencia de las dos variables³².

Tratemos ahora de formalizar las operaciones que condujeron a esta segunda tabla. Los valores 67% y 33% provienen de las proporciones de casos en cada una de las categorías de la variable “rendimiento de los alumnos”, y se calcularon como $\frac{200}{300}$ y $\frac{100}{300}$ respectivamente. Luego esas proporciones se multiplicaron por los totales de casos de cada categoría de la variable “tipo de docente”. De esa operación obtuvimos 120 como $180 \cdot 0,66$, que daría lo mismo como $180 \cdot \frac{200}{300}$.

El valor 80 proviene de $120 \cdot 0,66$ o bien de $120 \cdot \frac{200}{300}$.

60 es $180 \cdot \frac{100}{300}$.

Finalmente, 40 resulta de hacer $120 \cdot \frac{100}{300}$.

De manera general entonces, obtenemos cada una de las frecuencias de la segunda tabla multiplicando la frecuencia marginal de su fila por la de su columna y dividiendo por el total general. En símbolos, las frecuencias esperadas son:

$$f_{ij}^e = \frac{f_i \cdot f_j}{n}$$

Si las dos variables fueran independientes (con más precisión se dice estadísticamente independientes), las frecuencias conjuntas que se esperaría encontrar serían como las que calculamos con este procedimiento. ¿Y qué sería en ese caso de las frecuencias relativas? Dividiendo todo por el total obtenemos:

³² Como consecuencia de ello, de las cuatro celdas solo es necesario calcular una frecuencia, ya que las demás pueden obtenerse restando de los totales de filas y de columnas. Una vez que sabemos que la frecuencia de la celda 1,1 es 120, podemos obtener 60 como lo que resta para llegar a 180 (de la primera fila), 80 como la diferencia con 200 (de la primera columna) y 40 como lo que le falta a 60 para llegar a 100 (segunda columna) o lo que le falta a 80 para alcanzar 120 (segunda fila).

Tabla 15: Frecuencias relativas esperadas bajo la hipótesis de independencia correspondiente a la tabla 12

tipo de docente	rendimiento		
	alto	bajo	total
democrático	0,40	0,20	0,60
autoritario	0,27	0,13	0,40
total	0,67	0,33	1,00

Puede llegarse directamente a las frecuencias relativas, porque la frecuencia absoluta de cada celda es:

$$f_{ij} = \frac{f_i * f_j}{n}$$

Y relativa de esa celda:

$$f'_{ij} = \frac{f_{ij}}{n}$$

Si reemplazamos, nos queda:

$$f'_{ij} = \frac{f_{ij}}{n} = \frac{\left(\frac{f_i * f_j}{n}\right)}{n} = \frac{f_i}{n} * \frac{f_j}{n} = f'_i * f'_j$$

Más brevemente:

$$f'_{ij} = f'_i * f'_j$$

Es decir que, si las variables fueran independientes, cada frecuencia relativa será producto de las correspondientes frecuencias relativas marginales. Ahora podemos dar una definición de independencia estadística.

Dos variables son **estadísticamente independientes** si la frecuencia relativa de cada celda es igual al producto de las frecuencias relativas marginales de la fila y la columna a las que la celda pertenece.

En efecto, cada frecuencia conjunta de la tabla 14 es el producto de las marginales correspondientes.

Como verificación, el coeficiente de Kendall-Yule de la tabla 14 es:

$$Q = \frac{120 * 40 + 80 * 60}{120 * 40 - 80 * 60} = 0$$

Como debe ser por haber construido la tabla con el criterio de independencia.

En este capítulo solo se trató con variables nominales, y en un caso también ordinales, pero aún no se ha dicho nada sobre las variables intervalares y proporcionales. En las distribuciones univariadas se vio que una tabla de distribución de frecuencias no puede listar todas las categorías de una variable de estos niveles, sino que deben construirse intervalos de valores. Eso mismo puede hacerse para construir una tabla bivariada, cuando se analiza la relación entre variables intervalares y/o proporcionales. De ese modo resultaría una tabla como:

Disposición de las variables para analizar la relación entre los años de escolarización y el ingreso mensual individual

Años de escolarización	Ingresos mensuales				
	<1000	1000 a 2000	2000 a 3000	3000 a 4000	>4000
< 5					
5-10					
10-15					
> 15					

Pero en el próximo capítulo veremos que para variables de estos niveles de medición se cuenta con procedimientos más simples y más eficaces que permiten analizar con más detalle sus relaciones.

Capítulo 5 Relación entre variables: el análisis

En el capítulo anterior hemos tratado la relación entre dos variables en escalas nominales, y señalamos que si se trata de variables de nivel superior es posible crear categorías y tratarlas del mismo modo. En cuanto a la medida de la intensidad de la relación, nos hemos limitado al caso de dos variables dicotómicas, es decir, con dos categorías en cada una, con lo que la tabla resultante es de dos por dos y calculamos el coeficiente Q de Kendall - Yule. Ahora se amplía el dominio de nuestro análisis, incorporando herramientas que permiten poner a prueba la hipotética relación entre dos variables de nivel nominal con más de dos categorías cada una y variables de nivel superior (ordinales y métricas).

Variables nominales con más de dos categorías cada una

La distancia entre frecuencias esperadas y observadas

Sobre el final del capítulo anterior presentamos el concepto de independencia estadística y vimos la manera de calcular las frecuencias de las celdas que se esperarían encontrar si las variables fueran independientes. Para hacer esto es suficiente multiplicar las frecuencias marginales correspondientes a cada celda y dividir el resultado por el total de casos. Sea el caso que interese analizar la relación del tipo de violencia³³ con el lugar donde sucede. Aunque estadísticamente equivalente, no es adecuado preguntar si el lugar incide sobre el tipo de violencia, sino más bien si el tipo de violencia difiere según el lugar. Aquí es más pertinente el planteo del problema como una comparación de grupos (los definidos por los diferentes lugares) antes que como una relación entre variables. Lo mismo pasa cuando se comparan los resultados de un examen entre quienes cursan por la tarde o la mañana. Cuando hay control de variables, como en el diseño experimental o en la evaluación de impacto, el paralelismo entre las dos lecturas es más cercano. Así, preguntar si un grupo de niños que recibió un suplemento en su dieta, tiene mejor desarrollo que uno que no lo recibió (planteo en términos de comparación de grupos), equivale a preguntar si el suplemento dietario incide sobre el desarrollo (planteo en términos de relación entre variables). Las operaciones estadísticas que responden a las dos preguntas son las mismas, pero según el caso, una manera de formular el problema puede ser más adecuada que otra.

Para el ejemplo de las diferencias en el tipo de violencia según área geográfica, una muestra de 500 casos provee la siguiente distribución conjunta:

³³ Según la clasificación sugerida por el Informe Mundial sobre la Violencia y la Salud, Organización Panamericana de la Salud, 2003

Tabla 1: Clasificación de diferentes tipos de violencia según área donde se manifiesta

Tipo de violencia	Área			Total
	Ciudades grandes	Ciudades pequeñas	Áreas rurales	
Autoinfligida	100	35	15	150
Interpersonal	110	100	90	300
Colectiva	35	10	5	50
Total	245	145	110	500

Una primera aproximación consiste en calcular frecuencias relativas. Dado que nuestro interés está en comparar el tipo de violencia según las áreas, calcularemos los porcentajes según las columnas de la tabla 1 y resulta:

Tabla 2: Frecuencia relativas por columnas de la clasificación de diferentes tipos de violencia según área donde se manifiesta

Tipo de violencia	Área			Total
	Ciudades grandes	Ciudades pequeñas	Áreas rurales	
Autoinfligida	41%	24%	14%	30%
Interpersonal	45%	69%	82%	60%
Colectiva	14%	7%	5%	10%
Total	100%	100%	100%	100%

Si no consideramos el área, se ve (en la columna de los totales) que la violencia interpersonal es la más frecuente (60%), seguida de la autoinfligida con el 30%. Este patrón de distribución en las distintas formas de violencia se mantiene en las diferentes áreas, pero en más acentuado en las rurales, donde la categoría modal (que sigue siendo interpersonal) alcanza el 82% del total del área. Por el contrario, la violencia autoinfligida, que es el 30% del total, sube al 41% en grandes ciudades y solo representa el 14% de las formas de violencia que se observan en áreas rurales. Así, parecería que hay diferencia en la distribución de los tipos de violencia según las áreas que están considerándose.

Codificando como 1, 2 y 3 las áreas y del mismo modo el tipo de violencia, el programa InfoStat® muestra las frecuencias absolutas y las relativas por columnas así:

Tablas de contingencia

Frecuencias absolutas

En columnas: área

tipo

violencia	1	2	3	Total
1	100	35	15	150
2	110	100	90	300
3	35	10	5	50
Total	245	145	110	500

Frecuencias relativas por columnas
En columnas: área

tipo				
violencia	1	2	3	Total
1	0,41	0,24	0,14	0,30
2	0,45	0,69	0,82	0,60
3	0,14	0,07	0,05	0,10
Total	1,00	1,00	1,00	1,00

Buscaremos ahora de cuantificar la intensidad de esa relación, para lo que nos preguntaremos cuáles serían las frecuencias de las celdas si el tipo de violencia fuera independiente del área donde sucede, es decir, si se observara la misma proporción de los distintos tipos de violencia en todas las áreas. Usemos el concepto de independencia estadística para calcular las frecuencias esperadas correspondientes a la tabla 1

Tabla 3: Frecuencias esperadas bajo la hipótesis de independencia entre el tipo de violencia y el área donde se observa

Tipo de violencia	Área			Total
	Ciudades grandes	Ciudades pequeñas	Áreas rurales	
Autoinfligida	74	43	33	150
Interpersonal	147	87	66	300
Colectiva	24	15	11	50
Total	245	145	110	500

Estas frecuencias están calculadas como indicamos en el capítulo anterior, haciendo:

$$f_{ij}^e = \frac{f_i * f_j}{n}$$

Por ejemplo, la frecuencia de la celda 1,1 resultó de $f_{11}^e = \frac{150 * 245}{500} = 73,5$ que redondeamos a 74.

Solicitada a InfoStat®, esta salida tiene la forma:

Tablas de contingencia³⁴

Frecuencias absolutas
En columnas: área

tipo				
violencia	1	2	3	Total
1	100	35	15	150
2	110	100	90	300
3	35	10	5	50
Total	245	145	110	500

³⁴En la salida no están redondeados los decimales de las frecuencias esperadas

Frecuencias esperadas

En columnas: área

tipo

violencia	1	2	3	Total
1	73,5	43,5	33,0	150,0
2	147,0	87,0	66,0	300,0
3	24,5	14,5	11,0	50,0
Total	245,0	145,0	110,0	500,0

Estas últimas son las frecuencias que esperaríamos encontrar si no hubiera relación entre las variables, si éstas fueran independientes. A ellas debemos compararlas con las que realmente hemos encontrado, las que se denominan frecuencias observadas.

Si halláramos que nuestras frecuencias observadas son muy similares a las esperadas bajo la hipótesis de independencia, diríamos que las variables “están cerca” de ser independientes, o lo que es equivalente, que habría escasa relación entre ellas. Por el contrario, si las frecuencias observadas fueran muy diferentes de las esperadas, creeríamos que las variables “están lejos” de ser independientes, es decir, que habría alguna relación entre ellas. Para decidir, debemos comparar la tabla 1 con la 3.

Para simplificar quitamos los nombres de las categorías y las frecuencias marginales, así, las que debemos comparar son las siguientes frecuencias:

Tabla 4: Frecuencias observadas y esperadas para la tabla 1

Observadas			Esperadas		
100	35	15	74	43	33
110	100	90	147	87	66
35	10	5	24	15	11

Una opción para medir la distancia entre los dos conjuntos de frecuencias es la de restar las correspondientes de cada celda; pero si hacemos eso nos encontraremos con un problema parecido al que tuvimos cuando intentamos observar la dispersión restando los valores de la media: la suma da cero. Por única vez realizaremos esta operación de manera manual:

$$(100 - 74) + (35 - 43) + (15 - 33) + (110 - 147) + (100 - 87) + (90 - 66) + (35 - 24) + (10 - 15) + (5 - 11) = 0$$

Obtenemos este resultado porque las frecuencias marginales son fijas y lo que una celda tiene de más, lo tiene otra de menos. Siempre sucederá así y por esa razón, no podemos saber si las observadas están cerca o lejos de las esperadas con el procedimiento directo de restarlas. Por el contrario, para medir la distancia entre los dos conjuntos de frecuencias (observadas y esperadas) se usa la siguiente expresión:

$$\sum_{j=1}^{j=f} \frac{(f_{ij}^o - f_{ij}^e)^2}{f_{ij}^e}$$

La expresión nos dice que deben restarse cada una de las frecuencias esperadas de cada observada correspondiente, elevar esa diferencia al cuadrado³⁵ y dividir el resultado por cada una de las frecuencias esperadas. Los subíndices mantienen la notación del capítulo anterior: i es el índice de filas, que va desde la primera (i=1) hasta la última (f es el número total de filas); j es el índice de las columnas, que también empieza en 1 (j=1) y termina en c, que es el número total de columnas³⁶. Vamos a aplicarla una vez, solo para ver su funcionamiento, luego la pediremos al programa:

$$\frac{(100 - 74)^2}{74} + \frac{(35 - 43)^2}{43} + \frac{(15 - 33)^2}{33} + \frac{(110 - 147)^2}{147} + \frac{(100 - 87)^2}{87} + \frac{(90 - 66)^2}{66} + \frac{(35 - 24)^2}{24} + \frac{(10 - 15)^2}{15} + \frac{(5 - 11)^2}{11} = 50,40$$

El número que resulta de esta operación se llama puntaje chi cuadrado (o también ji cuadrado), se indica con el símbolo χ^2 y es una medida de la distancia a la que se encuentran las frecuencias observadas de las que se esperaría encontrar si las variables fueran independientes.

Cuando se pide a InfoStat®, se obtiene:

Estadístico	Valor	gl	p
Chi Cuadrado Pearson	50,19	4	<0,0001
Chi Cuadrado MV-G2	52,25	4	<0,0001
Coef.Conting.Cramer	0,18		
Coef.Conting.Pearson	0,30		

De esta salida por ahora solo nos interesa lo que está destacado (Chi Cuadrado Pearson); más adelante se usarán otros de los resultados de la salida. El valor no es idéntico al que hallamos manualmente (50,19 contra 50,40), eso se debe a que habíamos redondeado las frecuencias esperadas y el programa trabaja con los decimales, pero la diferencia no es importante.

Este número, el puntaje χ^2 no puede ser negativo, ya que proviene de la suma de números elevados al cuadrado. Solo puede ser cero si todos los términos de la suma son cero, es decir, si cada frecuencia observada es exactamente igual a la esperada correspondiente. En ese caso no habría duda en decir que las variables son independientes, cumplirían exactamente con la definición de independencia estadística. El puntaje χ^2 indica si las frecuencias observadas están cerca o lejos de las esperadas, pero ¿qué tan grande debe ser para que consideremos lejanas a las frecuencias?

Dos problemas que tiene este puntaje son: que puede ser indefinidamente grande y que su valor depende del número de casos que se evalúan y de la dimensión de la tabla. Así, por ejemplo, si multiplicamos por 10 todas las frecuencias de la tabla 3, obtenemos:

³⁵El mismo recurso que se usó cuando se definió la varianza y no era posible usar la suma de los desvíos porque daba cero. Nuevamente aquí, usamos el exponente 2 para volver positivos a los números negativos.

³⁶Recordemos que, de manera general la dimensión de la tabla es f X c, filas por columnas.

Tabla 5: Ejemplo de expansión artificial del total de casos de la tabla 1

Tipo de violencia	Área			Total
	Ciudades grandes	Ciudades pequeñas	Áreas rurales	
Autoinfligida	1000	350	150	1500
Interpersonal	1100	1000	900	3000
Colectiva	350	100	50	500
Total	2450	1450	1100	5000

Aunque los valores absolutos son diez veces más grandes, no hubo cambios en las frecuencias relativas, por ejemplo, en la celda 1,1: $\frac{1000}{2450} = 0,41$ (41%) lo mismo que había dado esa celda en la tabla 2. Cualquiera sea la intensidad de la relación entre estas dos variables, ésta no ha cambiado porque hayamos multiplicado todo por 10, sin embargo, si calculamos el puntaje χ^2 en la tabla 5 obtenemos 501,9, es decir un número 10 veces más grande. Entonces el puntaje χ^2 puede cambiar muy ampliamente sin que cambien las frecuencias relativas; esto nos dice que este puntaje no mide de manera directa la asociación entre dos variables, por ello:

Para comparar la intensidad de la asociación, el puntaje χ^2 solo es válido si las tablas tienen la misma dimensión y el mismo número de casos.

Para medir la asociación, debe eliminarse el efecto de la cantidad de casos y también de la dimensión de la tabla. Calcularemos tres coeficientes que nos permitan evaluar el grado o intensidad de la relación y que tengan un límite superior de modo que podamos juzgarlos como elevados o bajos. El primero de ellos es el **coeficiente φ** ³⁷, válido para medir la asociación entre dos variables dicotómicas (o binarias), se calcula como:

$$\varphi = \sqrt{\frac{\chi^2}{n}}$$

Vale cero si las variables son independientes e indica mayor asociación cuando está más cerca de uno.

Ejemplo (datos ficticios): en el análisis de la calidad de ítems de un examen, se observa las veces que una pregunta es correctamente respondida por los alumnos que aprobaron el examen y por quienes no lo aprobaron. Para el caso de una pregunta a la que se llama #7745, que fue respondida por 100 alumnos (a quienes les tocó por azar), la información se presenta en una tabla de 2X2:

³⁷ Ver Ekström, J. (2011) para las discusiones en torno a este coeficiente en el llamado “debate Pearson-Yule”.

Resultado del examen	Respuesta a la pregunta #7745		
	correcta	incorrecta	total
aprobó	50	15	65
no aprobó	10	25	35
total	60	40	100

Para la que el puntaje χ^2 vale 22,16, y el coeficiente resulta en:

$$\varphi = \sqrt{\frac{22.16}{100}} = 0.47$$

Como el cálculo del puntaje χ^2 es engorroso para hacer manualmente, existe una expresión alternativa, que solo usa las frecuencias observadas en la tabla. Si estas son:

$$\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & d \end{array}$$

La fórmula de cálculo del coeficiente φ es:

$$\varphi = \frac{(c * b) - (a * d)}{\sqrt{(a + b) * (c + d) * (a + c) * (b + d)}}$$

Aplicado a los datos del ejemplo da:

$$\varphi = \frac{(10 * 15) - (50 * 25)}{\sqrt{(50 + 15) * (10 + 25) * (50 + 10) * (15 + 25)}} = \frac{1100}{2337} = 0.47$$

Otra forma de medir la asociación entre dos variables, cuando alguna de ellas o las dos, tienen más de dos categorías, es el **coeficiente de contingencia**, C de Pearson, se calcula del siguiente modo a partir del puntaje χ^2 :

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + n}}$$

Como φ , este coeficiente no puede ser menor que cero (0) y solo toma ese valor si las variables son independientes (es decir cuando $\chi^2 = 0$). Tampoco puede ser mayor que uno (1), pero su valor máximo depende de la dimensión de la tabla. Solo en el caso particular en que la tabla sea cuadrada (misma cantidad de filas que de columnas), el valor máximo del coeficiente es:

$$C_{max} = \sqrt{\frac{f-1}{f}} \quad , \text{ o lo que es lo mismo: } C_{max} = \sqrt{\frac{c-1}{c}}$$

Ya que nos referimos a tablas cuadradas, en las que $f = c$.

Si la tabla no es cuadrada, sino de $f \times c$, el valor máximo es:

$$C_{max} = \sqrt{\frac{\min(f, c) - 1}{\min(f, c)}}$$

En la que $\min(f, c)$ es el más chico de los dos números.

De este modo se obtiene un coeficiente que indica el grado de la asociación entre dos variables, que mejora lo que mide el coeficiente Q de Kendall - Yule, ya que este último es apto para tablas de cualquier dimensión, no solo para las de 2×2 . Reemplacemos los valores para el ejemplo anterior:

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + n}} = \sqrt{\frac{50,19}{50,19 + 500}} = 0,30$$

Para decidir si este resultado es alto o bajo, es decir, si la relación es fuerte o débil, calculemos el máximo que podría haber alcanzado para una tabla de 3×3 :

$$C_{max} = \sqrt{\frac{f-1}{f}} = \sqrt{\frac{3-1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0,82$$

Entonces el valor que hemos encontrado es moderado, y nos indica que la relación entre el tipo de violencia y el tamaño de las ciudades no es intensa.

El tercer (y último) coeficiente que calcularemos para variables nominales está también basado en el puntaje χ^2 y tiene un valor máximo de 1 (uno). Se llama **coeficiente V de Cramer** y se calcula así:

$$V = \sqrt{\frac{\chi^2}{n * \min(f-1; c-1)}}$$

La expresión $\min(f-1, c-1)$, tiene el mismo significado que en C_{max} , es mínimo entre el número de filas menos uno y el número de columnas menos uno. Para obtenerlo se resta 1 al número de filas, luego se resta 1 al número de columnas y se elige el menor de los dos. Si la tabla es de 3×2 se hace $3-1=2$ y $2-1=1$, entre 2 y 1 el mínimo es 1 y ése es el número que ubicamos en el denominador, multiplicando a n. En este ejemplo, las filas y las columnas son tres, por lo que se toma el mínimo entre $3-1$ y $3-1$, el resultado es 2, y el coeficiente V de Cramer resulta:

$$V = \sqrt{\frac{\chi^2}{n * \min(f-1, c-1)}} = \sqrt{\frac{50,19}{500 * \min(3-1, 3-1)}} = \sqrt{\frac{50,19}{500 * 2}} = 0,45$$

Como el valor máximo que puede alcanzar este coeficiente es 1 (uno), en este caso se trata de una relación moderada entre las dos variables.

Variables de nivel ordinal

Si nuestro problema es el de describir la relación entre variables cuyas categorías están ordenadas, es decir variables ordinales, los coeficientes anteriores son válidos: pero como sucedió con las medidas descriptivas, el mayor nivel de

medición permite calcular coeficientes más elaborados y que, por esa razón, informen más acerca de la relación entre las variables que se analizan. Un punto a tener en cuenta es que cuando se trata con dos variables, la del menor nivel de medición es la que manda. Así, para relacionar una ordinal y una nominal, debe usarse un coeficiente V o C, como si fueran las dos nominales.

Si las dos variables son ordinales o si una es ordinal y la otra intervalar o proporcional, es posible calcular un coeficiente que tiene en cuenta los “rangos” es decir la posición de cada categoría respecto de las demás, su carácter de primera, segunda, etc., es decir, el orden. Sea el problema de indagar por la relación que podría haber entre el resultado que obtienen los alumnos al rendir un examen de ingreso a una carrera y el nivel de educación de sus madres, consideraremos como variables *el nivel máximo de educación de la madre* de cada uno y *el orden de mérito alcanzado en el ingreso* a esa carrera; ambas variables son ordinales. Tratemos solo la situación de pocos casos por ahora. Si para el orden de mérito codificamos como 1, 2, 3... el primer lugar en el ingreso, el segundo, etc. y para la educación de la madre usamos 1 = universitario completo, 2 = universitario incompleto, etc., entonces el fragmento de la matriz de datos para 8 observaciones tendría una forma como esta:

Sujeto	Orden de mérito en el ingreso	Educación de la madre
1	1	2
2	2	2
3	3	3
4	4	2
5	5	3
6	6	4
7	7	5
8	8	3

Que está ordenada según los valores de la primera variable (orden de mérito). A estos datos no conviene presentarlos en una tabla de doble entrada, porque cada orden de mérito corresponde a un único individuo, por lo que resultaría una tabla tan poco resumida como la siguiente:

Tabla 6: Distribución conjunta de las frecuencias del orden de mérito en el ingreso a una carrera universitaria y el nivel de educación de la madre.

Orden de mérito en el ingreso	Educación de la madre							total
	1	2	3	4	5	6	7	
1	0	1	0	0	0	0	0	1
2	0	1	0	0	0	0	0	1
3	0	0	1	0	0	0	0	1
4	0	1	0	0	0	0	0	1
5	0	0	1	0	0	0	0	1
6	0	0	0	1	0	0	0	1
7	0	0	0	0	1	0	0	1
8	0	0	1	0	0	0	0	1
Total	0	3	3	1	1	0	0	8

Esta tabla no es útil, ya que tiene tantas filas como la matriz de datos (porque cada orden de mérito corresponde a una sola persona), hay solo un caso en cada celda no vacía y hay muchas celdas vacías (con frecuencia cero). Por eso, cuando

se trata de variables de este nivel de medición, no se usan tablas de doble entrada para representar los datos, solo se calcula un coeficiente que indique la intensidad de la relación. Este coeficiente se llama coeficiente de **correlación por rangos, de Spearman** y para calcularlo hay que transformar los valores de las variables en rangos, de mayor a menor, de manera que al máximo valor de cada variable corresponda el 1, al siguiente el 2 y así sucesivamente. En nuestro ejemplo, el orden de mérito ya está en rangos, uno para el primero, dos para el segundo y un rango para cada persona. No es así para el nivel de educación, ya que varias personas pueden tener el mismo, a esta variable la transformaremos en rangos. El mayor nivel de educación observado es 2 (universitario incompleto) a ese valor le correspondería el rango 1 (uno), pero hay tres madres con ese nivel de educación, ellas deberían llevar los rangos 1, 2 y 3, como están empatadas, les asignamos a todas el promedio de los tres rangos: 2. Luego sigue el nivel de educación 3 (secundario completo) a quien deberíamos asignar el rango 4, pero acá también hay empate entre tres casos, corresponderían los rangos 4, 5 y 6, nuevamente usamos el promedio de los tres rangos para asignar a los tres el mismo: 5. Sigue el nivel 4 (secundario incompleto), al que asignamos el rango siguiente: 7, ya que hay solo un caso aquí; y lo mismo pasa con el nivel 5 (primario completo) al que le toca rango 8.

Resumiendo entonces, la transformación de los valores de las variables en rangos resulta así:

Tabla 7: Transformación de las categorías de la variable a rangos

Orden de mérito en el ingreso	Rango del orden de mérito	Educación de la madre	Rango de la educación de la madre
1	1	2	2
2	2	2	2
3	3	3	5
4	4	2	2
5	5	3	5
6	6	4	7
7	7	5	8
8	8	3	5

No ha sido necesario transformar los valores del orden de mérito, porque ya correspondían uno a cada sujeto.

Una vez contruidos los rangos, se observa, para cada caso la diferencia entre el rango de una variable y de la otra, esas diferencias se llamarán *d*.

Tabla 8: Cálculo de las diferencias entre los rangos de dos variables ordinales

Rango del orden de mérito	Rango de la educación de la madre	<i>d</i>
1	2	-1
2	2	0
3	5	-2
4	2	2
5	5	0
6	7	-1
7	8	-1
8	5	3

Estas diferencias indican la distancia que hay entre los dos ordenamientos, si fueran ambos iguales (si el máximo de uno coincidiera con el máximo del otro y así en todas las categorías), tendríamos una asociación perfecta entre las dos variables. Por el contrario si el orden estuviese exactamente invertido (si el rango máximo de una variable coincidiera con el rango mínimo de la otra y así en las demás) la relación también sería perfecta, pero inversa.

La intensidad de la relación se mide entonces con el que hemos llamado coeficiente se Spearman, la expresión de su cálculo es la siguiente:

$$r_s = 1 - \frac{6 * \sum_{i=1}^n d_i^2}{n^3 - n}$$

En la que:

d_i son las diferencias de rangos (calculadas en la última columna de la tabla de arriba) que en la fórmula van elevadas al cuadrado.

La sumatoria indica que ésta va desde la primera de las diferencias ($i=1$) hasta la última (n).

n es el número total de observaciones.

Este coeficiente puede ser positivo o negativo y tiene un campo de variación igual al del Q de Kendall - Yule, es decir, entre -1 y 1, es decir:

$$-1 \leq r_s \leq 1$$

Al igual que el coeficiente de Kendall - Yule, los valores próximos a 1 ó a -1 se interpretan como propios de una asociación fuerte (intensa) y los cercanos a 0 (cero), sean positivos o negativos, corresponden a asociaciones débiles. Si un coeficiente vale 1 ó -1 diremos que la asociación es perfecta, pero eso no es algo que suceda en la realidad, del mismo modo que si el coeficiente es exactamente 0 (cero), la asociación será nula y otra vez es muy poco común que eso suceda con datos reales.

A diferencia de los coeficientes usados para variables nominales, ahora el signo importa: cuando es positivo da cuenta de una relación directa entre las dos variables, una relación en la que cuando una aumenta, la otra también lo hace. Si el coeficiente es negativo indica relación inversa, el crecimiento de una variable se acompaña del decrecimiento de la otra. En este nivel de medición (ordinal) podemos hacer estos juicios, podemos decir "aumenta" o "disminuye", porque las categorías están ordenadas, por esa razón podemos analizar no solo la intensidad de la relación, sino también si se trata de una relación directa o inversa.

Se trata de dos características independientes de cada relación: puede ser fuerte y directa; o fuerte e inversa; o bien débil y directa; o débil e inversa. Un error muy frecuente es creer que si el coeficiente es negativo, la relación es débil, no es así. Es débil si el coeficiente es cercano a 0 (cero), es igualmente débil si $r_s=0,03$ como si $r_s=-0,03$, el signo del coeficiente no aporta para saber si es fuerte o débil. Del mismo modo es igual de fuerte una relación en la que $r_s=0,96$ como una en la que $r_s=-0,96$.

Para obtener el valor del coeficiente en nuestro ejemplo, vamos primero a calcular las d_i^2 :

Rango del orden de mérito	Rango de la educación de la madre	d_i	d_i^2
1	2	-1	1
2	2	0	0
3	5	-2	4
4	2	2	4
5	5	0	0
6	7	-1	1
7	8	-1	1
8	5	3	9

Por lo que la suma de la última columna es 20. Al reemplazar los valores en la expresión de r_s , obtenemos:

$$r_s = 1 - \frac{6 \cdot \sum_{i=1}^n d_i^2}{n^3 - n} = 1 - \frac{6 \cdot 20}{8^3 - 8} = 1 - \frac{120}{512 - 8} = 1 - \frac{120}{504} = 0,76$$

Este valor de $r_s = 0,76$, indica una asociación intensa y positiva entre la educación de la madre y los resultados del ingreso a la universidad. Que sea positiva quiere decir que los alumnos con madres de mayor educación obtienen mejores resultados en el ingreso a esa carrera. Como ya hemos señalado, esto no quiere decir causalidad, no significa que la causa del resultado en el ingreso sea la educación de la madre. El problema de la causalidad es teórico y depende del análisis que se hace de las relaciones entre los conceptos, en este ejemplo, la educación de la madre es uno de muchos de los factores interrelacionados, que inciden sobre el resultado que obtiene el alumno. Este coeficiente (como sucede con todos los coeficientes de asociación) no revelan la causalidad sino lo frecuente que resulta que los cambios de una variable se vean acompañados de cambios en la otra.

Al solicitar este coeficiente a InfoStat®, se obtiene la siguiente salida, de la que solo nos interesa por ahora el valor del coeficiente, que está destacado:

Coeficientes de correlación

Correlacion de Spearman: coeficientes\probabilidades

orden de mérito	educación de la madr	
orden de mérito	1,00	0,04
educación de la madr	0,76	1,00

En esta salida la diagonal principal siempre estará constituida por unos (1s), porque es la asociación de cada variable consigo misma. El coeficiente aparece en la posición 2,1, como el que está aquí destacado. El valor que aparece opuesto a él, el 0,04 no será interpretado hasta más adelante.

Para ilustrar con otros ejemplos de relaciones entre variables ordinales, sea que si ponemos en correspondencia el ranking de temas musicales de una semana con la frecuencia con que cada tema es reproducido en la radio, esperamos hallar que la relación sea muy fuerte y directa: los temas de mayor posición en el ranking son también los que más frecuentemente se pasan en la radio. Al revés, en la relación entre el rating de los programas de televisión y el contenido cultural que

ofrecen esperamos una relación también fuerte, pero ahora inversa: los de mayor rating son habitualmente lo que menos contenido cultural tienen. Este coeficiente es adecuado, no solo cuando las variables son ordinales, sino cuando son cuantitativas (intervalares o proporcionales) y existen casos atípicos, que afectarían el cálculo de otro coeficiente que se verá a continuación. Para que la interpretación del coeficiente de Spearman sea correcta, es necesario de las variables guarden entre sí una relación directa o inversa, en todo su conjunto de valores, es decir, que sean monótonas crecientes o decrecientes.

Nivel intervalar o proporcional

Si tratamos con variables intervalares o proporcionales, podríamos usar los procedimientos que referimos antes para el cálculo de la intensidad de las relaciones entre variables nominales. Para ello, deberíamos construir intervalos y tratarlos como las categorías de las dos variables. De ese modo, perderíamos la información que provee una variable cuantitativa. Por ejemplo, si disponemos de un conjunto de personas adultas de las que sabemos la edad a la que cada una se casó (o unió) por primera vez y los años de escolarización, y nos interesamos por la relación entre estas dos variables, el fragmento de la matriz de datos para estas dos variables en 30 casos es:

sujeto	años escuela	edad primera unión	sujeto	años escuela	edad primera unión
1	5	18	16	11	26
2	6	20	17	11	27
3	7	17	18	11	29
4	7	18	19	12	25
5	8	21	20	12	26
6	8	22	21	12	27
7	8	24	22	12	29
8	8	32	23	12	30
9	9	16	24	12	30
10	9	18	25	13	29
11	9	19	26	15	28
12	9	25	27	16	30
13	9	27	28	16	31
14	11	18	29	16	33
15	11	25	30	17	30

Si se intenta construir una tabla de doble entrada para estas dos variables, el problema es aún mayor que con las ordinales, dado que habría un gran número de filas y de columnas, y resultaría casi imposible de leer. Además, muchas

celdas estarían vacías y habría muy pocos casos en cada una de las restantes. Los treinta datos de la matriz anterior quedarán, en una tabla de doble entrada, así:

Tabla 9: Distribución conjunta de los años de escolarización y la edad a la que se realizó la primera unión conyugal

		Edad a la primera unión																	
		16	17	18	19	20	21	22	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	Total
Años de escolarización	5	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
	6	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
	7	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
	8	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	4
	9	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	5
	11	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	5
	12	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	2	0	0	0	6
	13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
	16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	3
	17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
	Total	1	1	4	1	1	1	1	1	1	3	2	3	1	3	4	1	1	1

Nuevamente, esta no es una tabla adecuada para representar estos datos y sería más legible con las categorías agrupadas:

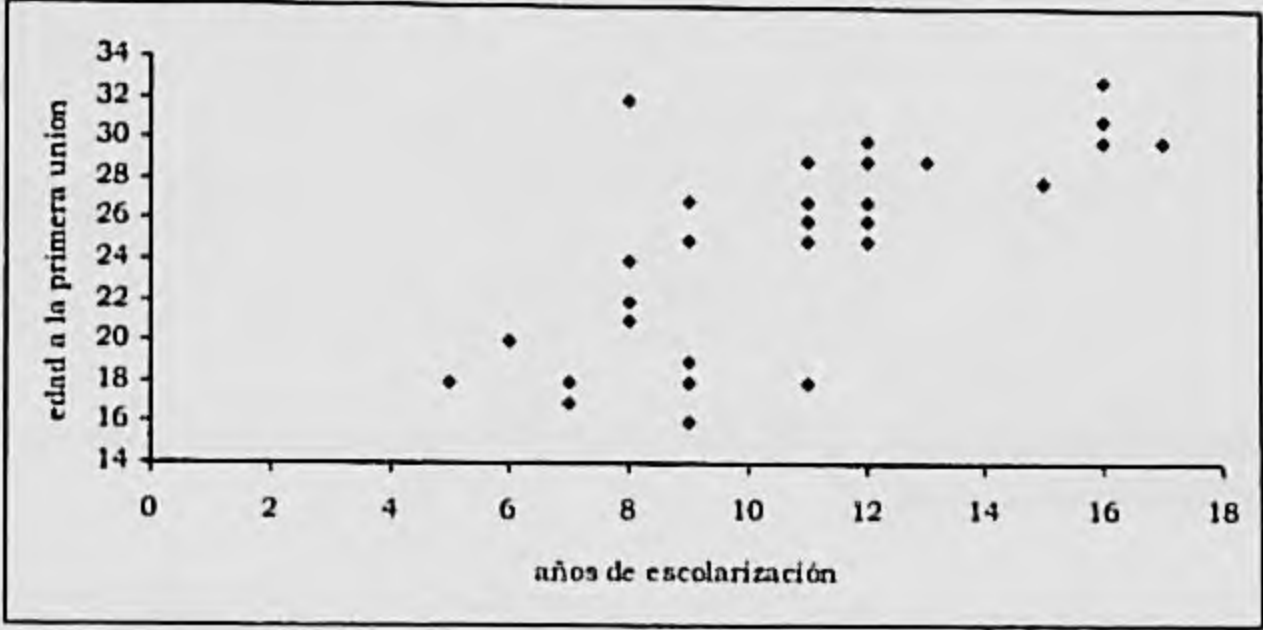
Tabla 10: Distribución conjunta de los años de escolarización y la edad a la que se realizó la primera unión conyugal (categorías agrupadas)

Años de escolarización	Edad a la primera unión				Total
	16-20	21-25	26-30	31-35	
5-8	4	3	0	1	8
9-12	4	3	9	0	16
13-16	0	0	3	2	5
17-20	0	0	1	0	1
Total	8	6	13	3	30

Ahora la tabla se lee con más facilidad y podemos tratarla como hicimos antes, como si fueran nominales y calcular un puntaje chi cuadrado y coeficientes *C de Pearson* y *V de Cramer*, o bien, como los intervalos están ordenados, poner una ranking y calcular el coeficiente de Spearman. Sin embargo, haciendo esto se trata como si tuvieran igual edad quienes tienen entre 16 y 20 años, así como a todos los que tienen entre 21 y 25 y lo mismo con los otros grupos de edades, además, se pierden las posibilidades de análisis que ofrecen las variables cuantitativas.

Para poder mantener las variables con sus verdaderos valores (sin agrupar) y tener al mismo tiempo una representación abreviada de los datos, existe un recurso muy valioso: una representación gráfica de los valores que se denomina **diagrama de dispersión**.

Gráfico 1: Diagrama de dispersión de los años de escolarización y la edad a la que se realizó la primera unión conyugal



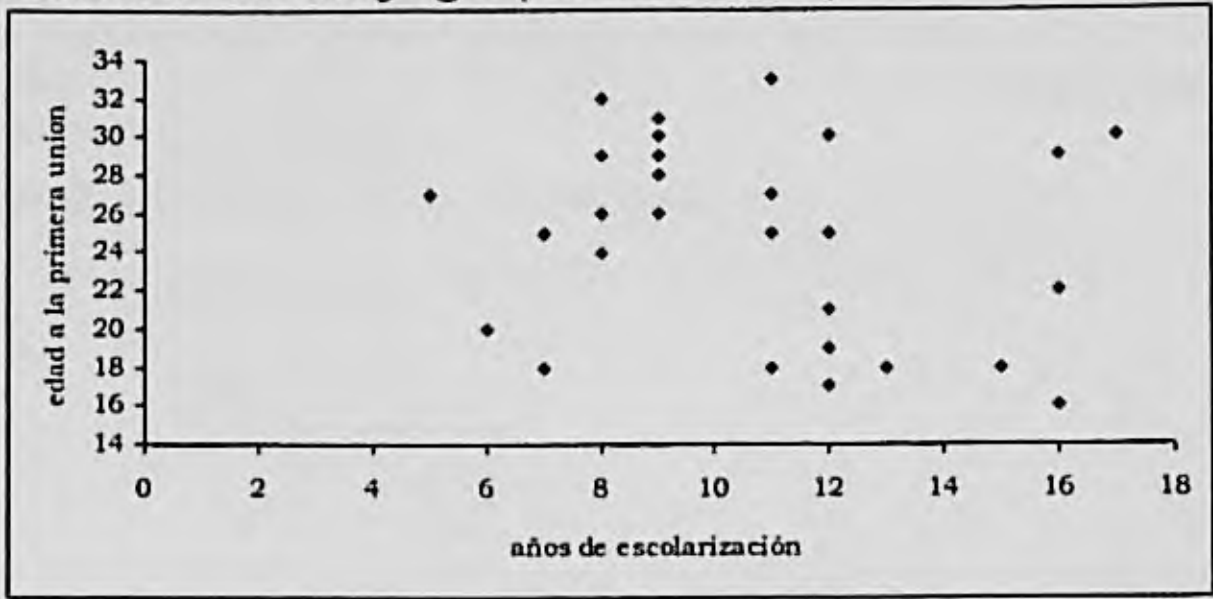
Este gráfico usa los ejes cartesianos para indicar los valores de las dos variables que estamos analizando y representa con un punto cada concordancia de dos categorías que puede corresponder a un caso o a varios. Cada punto es un par ordenado: el primer número son los años de escolarización y el segundo la edad a la que se unió por primera vez. Los ceros de la tabla 9 ya no aparecen en este diagrama. El primer punto de la izquierda del diagrama corresponde a una única persona que alcanzó 5 años de escolarización y que tuvo su primera unión a los 18 años. Observemos que los cuatro puntos alineados sobre los 8 años de escolarización, son los cuatro sujetos que aparecen como total de la fila correspondiente al 8 en la tabla 9.

Lo que eran filas y columnas en todas las tablas mostradas hasta aquí son ahora ejes coordinados, porque ya no se trata con categorías separadas de cada variable sino con valores cuantitativos de las variables que ahora son intervalares o proporcionales. Estos ejes se llaman **ordenadas** el vertical y **abscisas** el horizontal. En el ejemplo están representados los valores de los años de escolarización en el eje de las abscisas (primer elemento de cada par ordenado) y la edad a la primera unión en el eje de las ordenadas (segundo elemento de cada par).

La manera en que los puntos se distribuyen en el diagrama de dispersión nos da una primera aproximación a la relación entre las dos variables. Así, en el caso del ejemplo, hay una cierta tendencia creciente, en la que se veía que *globalmente*, las personas con más años de escolarización tenderían a unirse más tardíamente. Esta observación es equivalente a ver la concentración de casos en las celdas de la diagonal de una tabla bivariada.

Por el contrario, si los datos se dispersan de este otro modo:

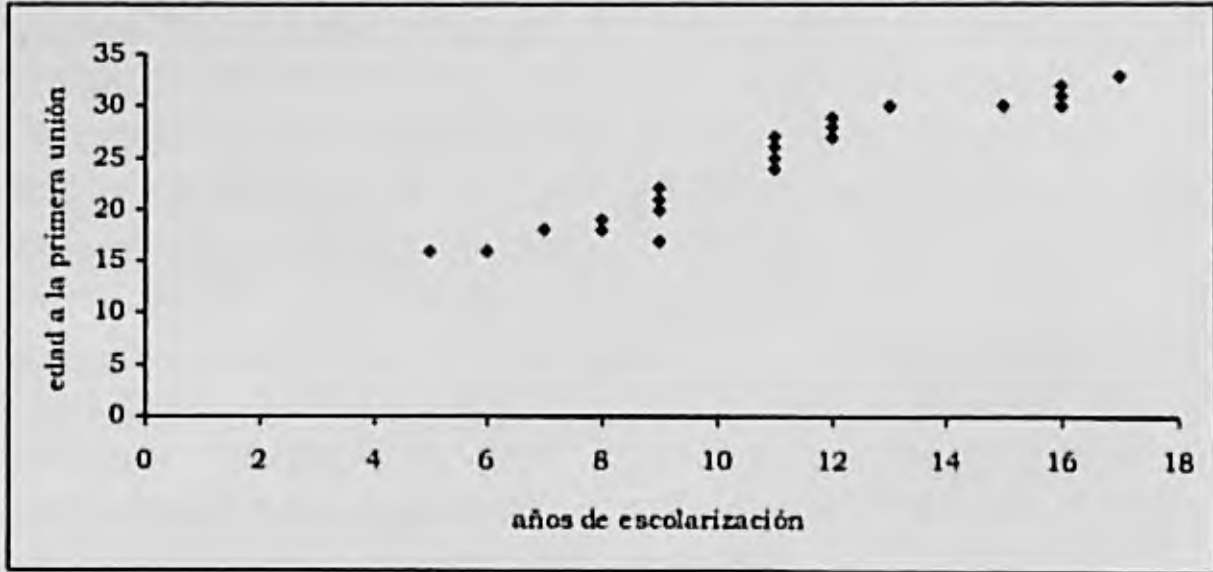
Gráfico 2: Diagrama de dispersión de los años de escolarización y la edad a la que se realizó la primera unión conyugal (relación débil)



No hay ninguna razón para creer que las variables estén relacionadas: los puntos no muestran una tendencia clara.

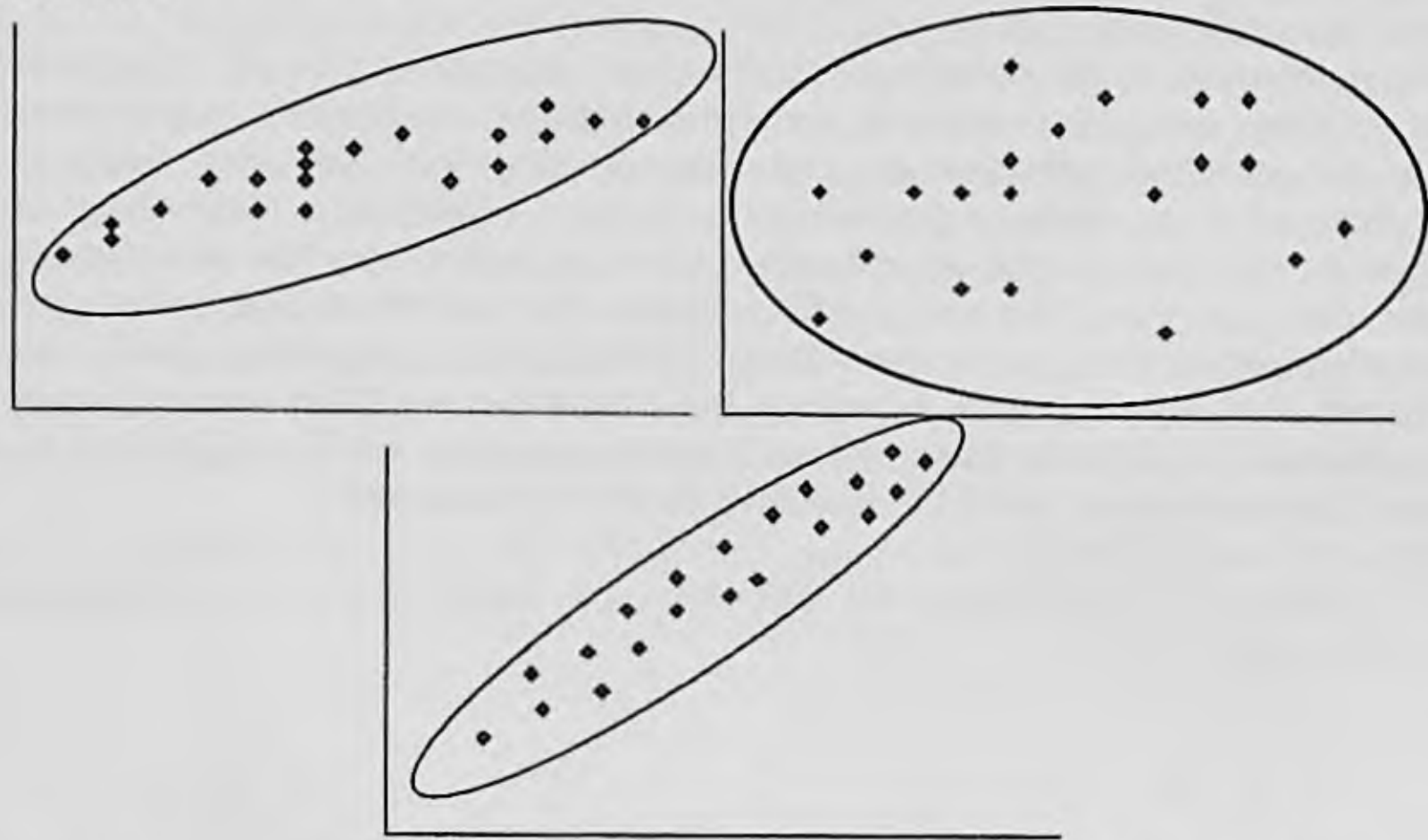
Una asociación más acentuada entre las mismas dos variables se observa en el siguiente diagrama de dispersión:

Gráfico 3: Diagrama de dispersión de los años de escolarización y la edad a la que se realizó la primera unión conyugal (relación intensa)



En el que la tendencia *lineal* es más clara, por lo que resulta más definido el efecto de la escolarización sobre la edad a la que se produce la primera unión. Aquí, la nube de puntos está más aplanada que en el ejemplo anterior; en efecto, en el gráfico 2 la nube de puntos tiene forma más circular que en el 3, donde es más elíptica.

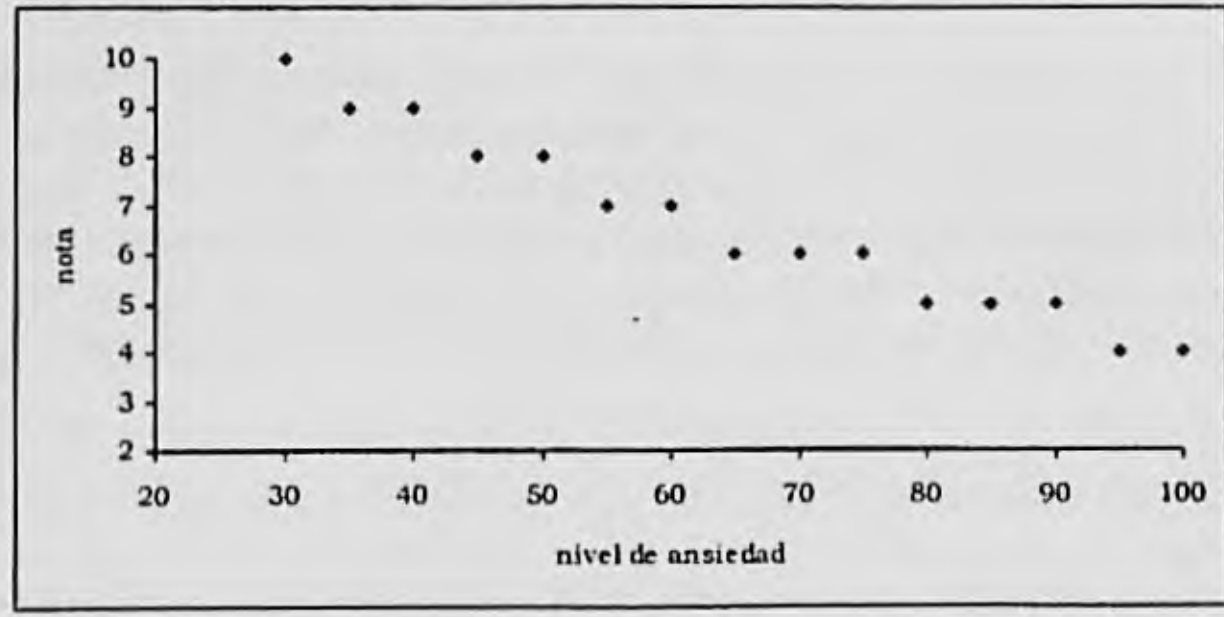
Gráfico 4: Comparación de la forma de las nubes de puntos según la intensidad de la relación



La intensidad de la relación está vinculada al achatamiento de la elipse que rodea la nube de puntos y éste al grado de alineación que los puntos tengan. Luego volveremos sobre esta idea.

El ejemplo que hemos mostrado hasta aquí corresponde a una relación directa: más años de escolarización parecen asociarse con edades más tardías para la primera unión. De manera equivalente pueden representarse relaciones inversas. Consideremos el caso de la ansiedad frente a los exámenes y la calificación que se obtiene. En un estudio realizado por el Laboratorio de Evaluación Psicológica y Educativa (LEPE, Facultad de Psicología UNC) se observó que a mayor puntaje en una prueba de ansiedad ante los exámenes, menor rendimiento académico (Furlán, Cassady & Pérez, 2009). Tomando las notas obtenidas en un examen y el puntaje de la escala de ansiedad medido en una escala de 0 a 100, este resultado puede representarse gráficamente así:

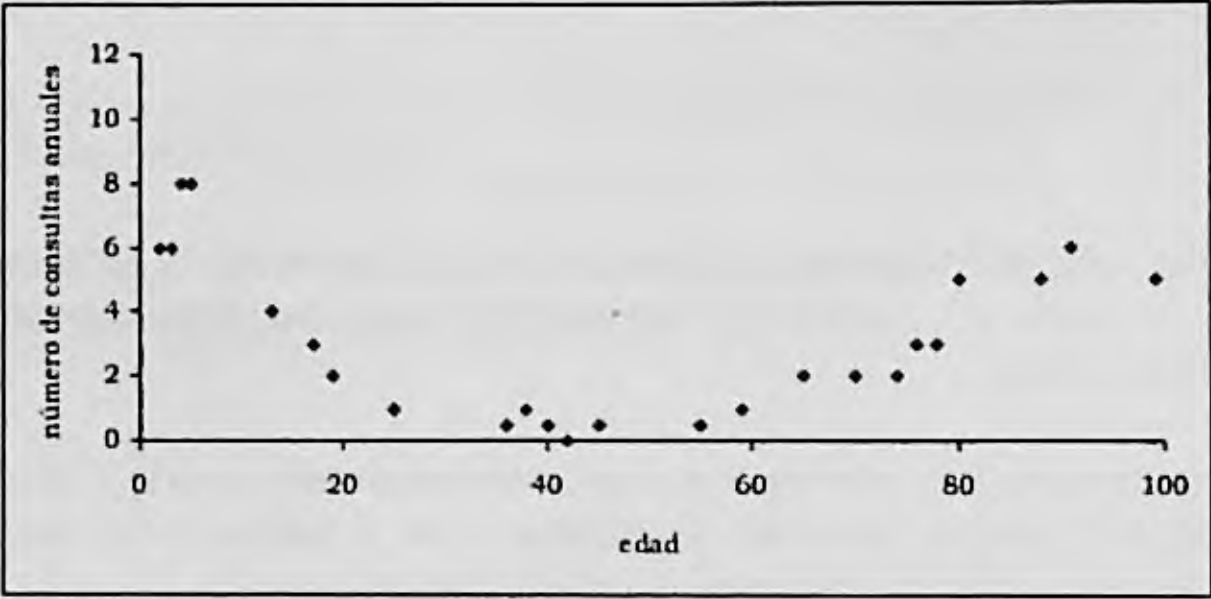
Gráfico 5: Diagrama de dispersión del puntaje obtenido en una prueba de ansiedad en exámenes y las notas obtenidas



Que muestra que quienes llegan más ansiosos a los exámenes obtienen peores calificaciones³⁸. La relación inversa queda entonces graficada como un conjunto de puntos descendentes.

Solo nos ocuparemos de relaciones como las que acabamos de ejemplificar: aquellas en las que la tendencia es creciente o decreciente, pero siempre siguiendo un camino parecido a una línea recta. Son las que llamaremos *relaciones lineales*. No son la únicas que existen; solo a modo de ilustración, veamos cómo se representa la relación entre la edad de las personas y la frecuencia con que consultan al médico. Estas dos variables son tales que, en términos muy generales y sin considerar situaciones específicas, para valores pequeños de la primera (en la infancia) las consultas son frecuentes, luego se reducen durante la adultez para volver a incrementarse en la vejez. Por eso el gráfico que las representa tiene la siguiente forma aproximada:

Gráfico 6: Diagrama de dispersión del número medio de consultas médicas anuales y la edad.



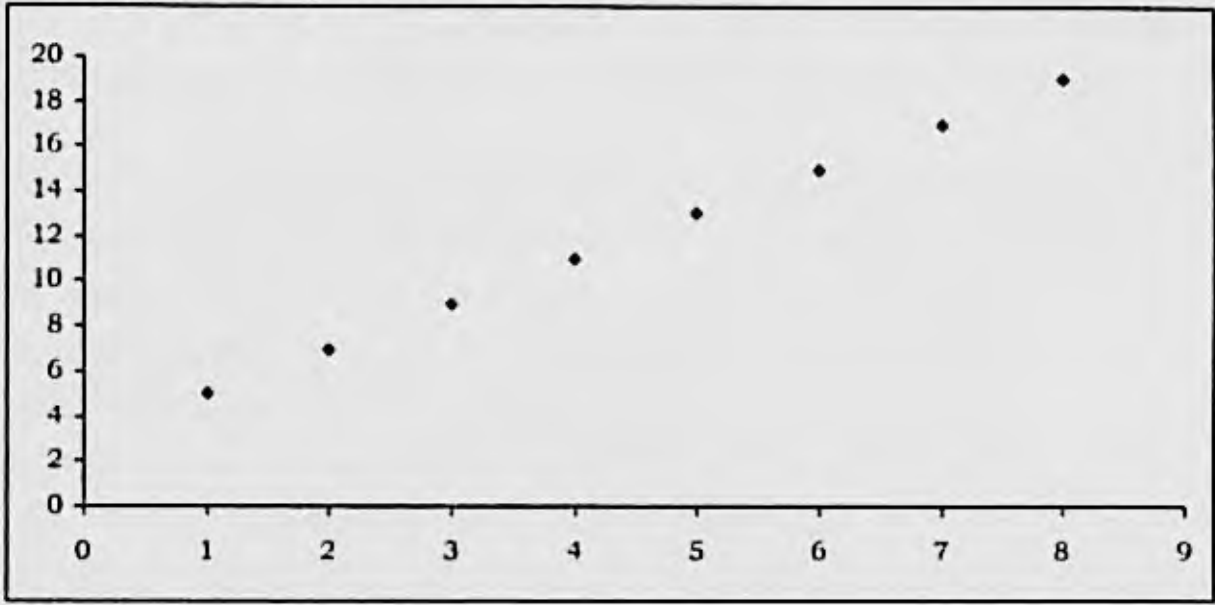
Este conjunto de puntos muestra una tendencia *no lineal*, eso no implica que las variables no estén relacionadas; por el contrario, la relación existe, pero no es lineal. Estos puntos, en lugar de ser aproximados por una línea recta, lo serían con una curva con forma de parábola. No nos ocuparemos aquí de relaciones no lineales. Limitaremos nuestro análisis a relaciones lineales, debido a que es muy frecuente usarlas como primera aproximación a la forma que tiene la relación entre dos variables y porque a menudo, cuando se trabaja con relaciones no lineales, es posible realizar transformaciones de las variables para lograr relaciones lineales.

Para analizar la intensidad de la relación lineal entre dos variables (ambas medidas a nivel intervalar o proporcional) calcularemos un coeficiente comparable a los que hemos visto hasta aquí, que tendrá una interpretación similar a la del coeficiente de correlación por rangos de Spearman. Este coeficiente se llama **coeficiente de correlación r de Pearson** y es uno de los de mayor utilización cuando las variables que se analizan alcanzan el nivel de medición que autoriza

³⁸Nuevamente aquí recordemos que esto no quiere decir causalidad, de ningún modo podemos afirmar que la ansiedad “causa” bajos resultados. Bien podría ser que los alumnos lleguen más ansiosos cuanto menos han estudiado para el examen y eso sea lo que afecta la calificación.

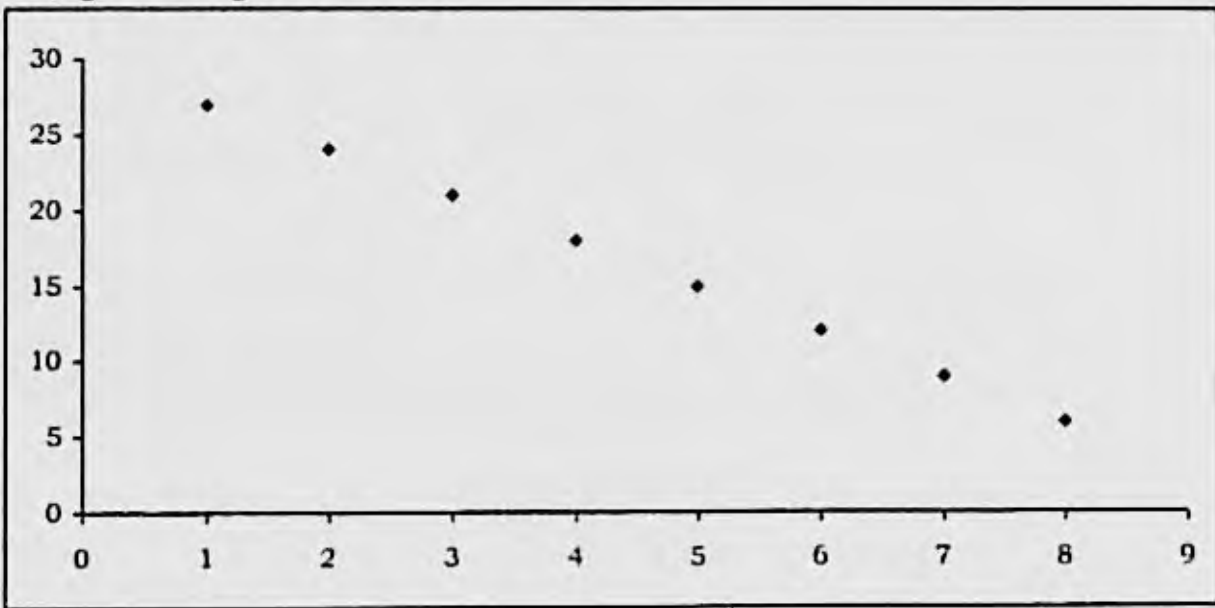
su cálculo. Este coeficiente va a medir qué tan bien se puede aproximar el conjunto de puntos con una función lineal y va a depender de lo que antes llamamos el “achataamiento” de la elipse. Será grande (próximo a 1 ó a -1) si las variables están muy relacionadas linealmente, es decir, si la nube de puntos se elonga hacia una línea; y será pequeño (próximo a cero) si las variables guardan poca relación lineal, es decir si la nube de puntos tiene forma redondeada. Será positivo y elevado (próximo a 1) si valores pequeños de una variable están acompañados de valores pequeños de la otra y valores grandes de una siguen a valores grandes de la otra, como sucedió en el ejemplo del gráfico 3. Será negativo y elevado (próximo a -1) si los valores grandes de una de las variables acompañan a los pequeños de la otra y viceversa, como en el gráfico 5. La correlación será perfecta positiva ($r = 1$) si todos los puntos se ubican sobre una recta creciente:

Gráfico 7: Ejemplo de situación ideal con todas las observaciones alineadas en una recta creciente, por lo que $r = 1$



Y será perfecta negativa ($r = -1$) si todos los puntos se ubican sobre una recta decreciente:

Gráfico 8: Ejemplo de situación ideal con todas las observaciones alineadas en una recta decreciente, por lo que $r = -1$



Ambas son situaciones ideales que no se encuentran en la realidad, constituyen el límite de la intensidad que pueden alcanzar las relaciones directas o inversas.

Las unidades en que se miden las variables que se relacionan pueden ser muy diferentes, en el ejemplo de ansiedad y resultado de los exámenes, la primera se

media en una escala de 0 a 100 y la segunda de 0 a 10, por lo que un valor elevado de la primera sería 95 y uno elevado de la segunda, 9. Esto impide que se comparen directamente los valores grandes con los grandes y los pequeños con los pequeños. Vamos a usar un recurso que ya fue presentado: las puntuaciones z , aquellas que indican a cuantas desviaciones estándar se encuentra cada observación de la media. Son los puntajes que permiten decidir si se trata de un valor grande (muy superior a la media) o pequeño (muy inferior a la media) o intermedio (semejante a la media), sin tener unidades, por lo que permite la comparación de elementos que pueden tener cualquier unidad de medida. Recordemos que para los valores bajos de la variable (menores a la media), el puntaje z es negativo y es positivo para los valores altos (superiores a la media). Si dos variables están correlacionadas positivamente (altos con altos y bajos con bajos), entonces sus puntajes z se corresponderán positivos con positivos y negativos con negativos. Si para cada sujeto multiplicamos los puntajes z de las dos variables que se relacionan, obtendremos siempre un resultado positivo, ya sea porque multiplicamos dos números positivos ($+ \times + = +$) o dos negativos ($- \times - = +$). Si luego sumamos esos productos para todos los sujetos obtendremos un número alto positivo.

A la inversa, si dos variables se correlacionan negativamente los productos de sus puntajes z serán negativos, porque los valores altos de una irán con los bajos de la otra (que equivale a z positivos con z negativos, y $+ \times - = -$) y bajos con altos (que es lo mismo que z negativos con z positivos y $- \times + = -$). Cuando sumemos estos productos para todos los casos tendremos un número alto y negativo.

Si las variables no estuvieran correlacionadas, habría casos en el que un valor alto de una variable se acompaña de uno alto de la otra y casos en que un valor alto va seguido de uno bajo, algunos productos de z serían positivos y otros negativos y entonces, al sumarlos, obtendríamos un número bajo, que puede ser positivo o negativo, pero será cercano a cero.

Entonces el producto de las puntuaciones z ofrece un resultado que será alto y positivo si las variables tienen una correlación alta y directa, dará alto y negativo si la correlación es inversa y dará un resultado cercano a cero si no están correlacionadas.

Haciendo uso de este razonamiento, el coeficiente de correlación de Pearson se calcula como³⁹:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n z_{x_i} * z_{y_i}}{n - 1}$$

Donde z representan los desvíos estándar de las variables x e y , n es el total de observaciones y los subíndices i corresponden a cada una de ellas. El signo de suma señala que ésta debe extenderse desde el primer caso ($i=1$) hasta el último (n).

Como en el caso del coeficiente de Spearman, el campo de variación del coeficiente de Pearson es el intervalo -1, 1.

³⁹Esta expresión puede encontrarse un poco diferente en algunos manuales. Si las desviaciones estándar, que se usan para calcular los puntajes z , se calcularan con denominador n (como si correspondieran a observaciones provenientes de toda la población), entonces la fórmula de r llevaría denominador n también. Aquí mantenemos el modo de cálculo de la desviación estándar muestral con denominador $n-1$ y por eso esta fórmula lo lleva así también.

Para el cálculo del coeficiente de Pearson, no es necesario que las dos variables tengan las mismas unidades, porque se usan los puntajes z, que carecen de unidades. No hay inconveniente en correlacionar el peso (en kilogramos) con la talla (medida en centímetros).

A continuación, se presenta un ejemplo de cómo calcular el coeficiente de correlación de Pearson para evaluar la relación entre dos variables. Las variables seleccionadas para el ejemplo son: 1) puntaje obtenido en una escala de inteligencia lógico-matemática y 2) cantidad de ejercicios correctamente realizados en una prueba de matemática. El fragmento de la matriz de datos correspondiente es el siguiente:

Sujetos	Puntaje escala inteligencia lógico-matemática X	Ejercicios correctamente realizados Y
1	46	7
2	44	2
3	56	7
4	57	8
5	30	2
6	60	9
7	45	5
8	43	1
9	64	9
10	32	3

Una vez que se ha obtenido la media y desviación estándar de las medidas del puntaje en la escala de inteligencia lógico-matemática ($\bar{x} = 47,7$ $s_x = 11,44$) y de cantidad de ejercicios matemáticos correctamente realizados ($\bar{y} = 5,3$ $s_y = 3,09$), se deben convertir las observaciones brutas en puntuaciones z. Para ello se calcula la diferencia entre la puntuación bruta original y la media del grupo, y el resultado de esta operación se divide por la desviación estándar del grupo. La transformación a puntaje z se obtiene como vimos antes:
Para el puntaje en inteligencia lógico – matemática (x),

$$z_x = \frac{x - \bar{x}}{s_x}$$

Para la cantidad de ejercicios correctamente realizados (y),

$$z_y = \frac{y - \bar{y}}{s_y}$$

Entonces, el puntaje z del sujeto 1 para cada escala se obtiene de la siguiente manera:

$$z_{x_1} = \frac{46 - 47,7}{11,44} = -0,15$$

$$z_{y_1} = \frac{7 - 5,3}{3,09} = 0,55$$

Y del mismo modo para cada uno de los sujetos observados, para obtener la siguiente tabla:

Sujetos	Puntaje escala inteligencia lógico- matemática z_x	Ejercicios correctamente realizados z_y	$z_x * z_y$
1	-0,15	0,55	-0,08
2	-0,32	-1,07	0,35
3	0,73	0,55	0,40
4	0,81	0,87	0,71
5	-1,55	-1,07	1,65
6	1,08	1,20	1,29
7	-0,24	-0,10	0,02
8	-0,41	-1,39	0,57
9	1,42	1,20	1,70
10	-1,37	-0,74	1,02

El numerador del coeficiente r de Pearson se obtiene sumando la última columna:

$$\sum z_x * z_y = 7,63$$

y solo queda dividir este número por $n-1=10-1=9$ para obtener $r = 0,85$.

El coeficiente dio positivo, lo que indica que la relación es directa. Como se habría esperado: las personas con mayor puntaje en la escala de inteligencia lógico-matemática, son quienes tienen una mayor cantidad de ejercicios correctamente realizados.

Además, el valor 0,85 es elevado, lo que indica que la relación entre las dos variables es intensa.

Cuando esta operación se solicita a InfoStat®, se obtiene:

Coeficientes de correlación

Correlacion de Pearson: coeficientes\probabilidades

	int. Logicomatem	ejercicios bien
int. logicomatem	1,000	0,002
ejercicios bien	0,847	1,000

De esta salida interesa el valor del coeficiente (destacado en negrita), que aparece en la primera intersección de las dos variables que correlacionamos. Como la salida ofrece tres decimales, el resultado difiere levemente del obtenido manualmente, si se redondea a dos decimales es 0,85. El formato de la salida es el mismo que cuando se obtiene el coeficiente de Spearman, por ahora solo leemos el valor que señalamos en negrita.

La decisión acerca de considerar como grande o pequeño al valor de un coeficiente de asociación o de correlación depende del tipo de variable con que se esté trabajando y en especial de la forma en que son medidas esas variables. En buena medida, el uso de estos coeficientes es comparativo y puede ser muy valioso saber si una variable se asocia (o se correlaciona) más con una que con otra. Cuando tratamos de explicar un fenómeno y formulamos hipótesis sobre varios factores, es útil saber cuáles de ellos se asocian más intensamente con ese fenómeno.

Se han establecido algunos valores de referencia, según los cuales la correlación se considera nula si $r < 0,10$, pequeña si $0,10 \leq r < 0,30$, media si $0,30 \leq r \leq 0,50$ y grande si $r > 0,50$. Coincidimos con Cohen (1988), en que estos criterios son un tanto arbitrarios y siempre debe considerarse al coeficiente de correlación en contexto.

Para poder interpretar el coeficiente de Pearson, se requiere que las variables guarden entre sí una relación lineal, de lo contrario, la interpretación como intensidad de la relación es incorrecta. Además, este coeficiente se ve afectado por valores extremos, es decir aquellos que se apartan de la tendencia mayoritaria, por lo que si éstos existen conviene calcular el coeficiente de Spearman. Ambas situaciones, tendencia lineal o no, y existencia o no de casos atípicos pueden verse en el diagrama de dispersión.

Cuando la relación entre dos variables es lineal, el coeficiente de Pearson da una interpretación más detallada de la incidencia de una variable sobre la otra. Cuando este coeficiente se eleva al cuadrado, se obtiene un número que se llama **coeficiente general de determinación**, que se indica como R^2 y que mide la parte de la varianza que es compartida por las dos variables. Esta interpretación puede no ser clara en este momento, y volveremos sobre ella hacia el final del capítulo.

Cuando la relación es asimétrica y una variable opera como antecedente y la otra como consecuente, el coeficiente general de determinación mide la parte de la varianza de la variable consecuente que se explica por la antecedente. O bien la parte de la variabilidad de la variable dependiente que puede atribuirse a la variable independiente. Así, en nuestro ejemplo: $R^2 = 0,85^2 = 0,72$, lo podemos indicar como 72% y quiere decir que el 72% de la variabilidad total que aparece en el número de ejercicios correctamente realizados, se explica por el puntaje alcanzado en la escala de inteligencia lógico matemática. Así, con este coeficiente identificamos la magnitud del aporte que una variable hace a explicar los cambios de la otra. Los hechos que se observan obedecen a una multiplicidad factores explicativos, por esa razón es muy valioso disponer de un coeficiente como R^2 , que mide qué parte de los cambios en lo observado pueden atribuirse a un determinado factor explicativo.

En el apartado siguiente volveremos sobre el coeficiente general de determinación en una aplicación más general.

Dicotomías reales y artificiales

Cuando se trabaja con variables dicotómicas, estas pueden tener dos orígenes diferentes; hay dicotomías reales y las hay artificiales. Las primeras son variables que por su construcción, solo admiten dos categorías, como turno (mañana – tarde), sexo (varón – mujer), grupo (experimental – control). Las segundas, provienen de haber recategorizado una variable continua en dos grupos, como puntaje (alto – bajo), ingresos medidos según línea de pobreza (pobre – no pobre), resultado de un examen (aprobado – no aprobado), posición política (izquierda – derecha). Esta situación es especialmente interesante en la medición de rasgos latentes a los que se considera continuos, pero que se miden de manera dicotómica. Por ejemplo, la actitud hacia la política, puede ir desde el desinterés completo hasta la participación activa, pudiendo identificarse graduaciones entre esos extremos. Si se usa la afiliación a un partido como indicador de participación, se toma una medida dicotómica (está afiliado – no está afiliado); esta dicotomización se considera artificial, porque se supone que es un punto de corte que define dos categorías en un continuo.

Cuando trata de dicotomías reales, el coeficiente ϕ que ya se mencionó, es adecuado. Por el contrario, en los análisis de la intensidad de la asociación entre dos variables que han sido dicotomizadas de manera artificial a partir de una variable que se considera continua, se usa una estimación del coeficiente de Pearson que habría resultado si las variables no hubieran sido dicotomizadas y hubiese entre ellas una relación lineal. El coeficiente para este caso se denomina **coeficiente de correlación tetracórica**, su cálculo requiere procedimientos matemáticos complejos, pero hay fórmulas aproximadas. Una de ellas es la siguiente

$$r_{tet} = \cos \left(\frac{\pi}{1 + \sqrt{\frac{a \cdot d}{b \cdot c}}} \right)$$

En la que a, b, c y d son las frecuencias absolutas de una tabla de 2x2 dispuestas así:

a	b
c	d

El resultado de r_{tet} puede variar entre -1 y 1, los valores más cercanos a 1 o a -1 indican mayor intensidad en la asociación. Respecto del signo, es más claro no considerarlo en el coeficiente y observar en qué sentido se da la relación a partir de las frecuencias relativas calculadas en la tabla.

Ejemplo (datos reales): para analizar la relación entre los puntajes en las subescalas mental y motora de la prueba de Bayley, se dicotomizan las dos variables en la media, asignando el valor 0 a quienes tienen puntajes inferiores a la media en cada subescala y uno a quienes superan a la media. Resulta así la tabla:

subescala motora	subescala mental		total
	0	1	
0	139	102	241
1	102	200	302
total	241	302	543

El cálculo del coeficiente de correlación tetracórico para esa tabla es:

$$r_{tet} = \cos \left(\frac{\pi}{1 + \sqrt{\frac{139 \cdot 200}{102 \cdot 102}}} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2.63} \right) = 0,37$$

Que indica una correlación moderada entre las variables. Como en este caso si se dispone de los valores originales y la dicotomización se hizo a fines de ilustración, es posible calcularlo, su valor es 0,35. Pero si solo se hubiese contado con la dicotomía, el tetracórico es el único que puede calcularse.

El coeficiente de Kendall – Yule es otra aproximación al coeficiente tetracórico. En este caso da 0,45, que es de peor calidad que la que se obtiene con la expresión anterior.

Esta fórmula es aproximada, el cálculo exacto no puede hacerse manualmente, por lo que hay que usar programas informáticos. Infostat® no lo tiene entre las opciones. Si se usa R (2017), allí se cuenta con la función *tetrachoric* en el paquete *psych* (Revelle, 2017). El resultado que se obtiene con él es también 0,37, lo que indica que la fórmula provee una buena aproximación. También puede solicitarse a ViSta, por medio del plugin ViSta-Tetrachor (Ledesma, Macbeth, & Valero-Mora, 2011).

Niveles de medición combinados

Debido a que las operaciones que pueden hacerse a un nivel de medición son también válidas para los niveles superiores, pero no a la inversa; cada vez que haya variables con niveles de medición diferente, habrá que tener en cuenta el nivel más bajo para decidir qué coeficiente corresponde usar. Por ejemplo, la correlación entre una variable ordinal y una continua debe hacerse con el coeficiente de Spearman, porque las operaciones que este requiere se puede realizar tanto con variables ordinales como con continuas. Por el contrario, el coeficiente de Pearson requiere operaciones que no son válidas cuando la variable es ordinal.

Sin embargo, hay algunos casos particulares que merecen mención.

Una variable dicotómica real y una proporcional

La comparación de los valores de una variable continua entre dos grupos se trata como la correlación entre una variable dicotómica real (que define los grupos) y una continua. Allí, los grupos se codifican como cero y uno, y se calcula el coeficiente de Pearson entre las dos variables.

Sin embargo, para esta situación existe un coeficiente específico, que se denomina **punto biserial** (r_{pb}). Su fórmula de cálculo conduce al mismo resultado que el coeficiente de Pearson, pero tiene en cuenta las medias de la variable continua y la proporción de casos en cada grupo, junto con la desviación estándar de la variable continua:

$$r_{pb} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_0}{s} * \sqrt{p * (1 - p) * \frac{n}{n - 1}}$$

Donde:

$\bar{x}_1$ Es la media de la variable en el grupo codificado como uno

$\bar{x}_0$ Es la media de la variable en el grupo codificado como cero
 p Es la proporción de casos que hay en grupo codificado como uno
 n Es el número total de observaciones y
 s Es la desviación estándar de la variable continua

El signo de este coeficiente indica el sentido de la diferencia; es positivo cuando el grupo codificado como uno tiene valores más altos y negativo en el caso contrario. Su valor absoluto mide la magnitud de la relación entre las dos variables. Infostat® carece de un comando para solicitar este coeficiente, por lo que deben codificarse las categorías de la variable dicotómica como cero y uno y solicitar el coeficiente de Pearson.

Ejemplo (datos ficticios): se comparan los puntajes alcanzados en una prueba por los individuos pertenecientes a los grupos experimental y control, y se obtienen estos valores:

grupo	puntaje
control	8
control	5
control	6
control	5
control	6
control	8
control	6
experimental	4
experimental	5,6
experimental	5,6
experimental	8
experimental	7,2
experimental	6,4
experimental	7,2
experimental	8
experimental	8
experimental	7,2

Se toma como grupo de referencia (grupo 1) al experimental y resulta:

$\bar{x}_1 = 6.7$
 $\bar{x}_0 = 6.3$
 $p = 0.59$
 $n = 17$
 $s = 1.27$

La fórmula da:

$$r_{pb} = \frac{6.7 - 6.3}{1.27} * \sqrt{0.59 * (1 - 0.59) * \frac{17}{17 - 1}} = 0.1734$$

Que sea positivo indica que el grupo al que se codificó uno (el experimental) tiene puntajes medios más altos. Su valor absoluto señala una correlación pequeña entre la pertenencia a los grupos y los puntajes de la prueba.

De manera equivalente, puede pedirse a Infostat®, codificando la variable *grupo*.

grupo	codigo.grupo	puntaje
control	0	8,00
control	0	5,00
control	0	6,00
control	0	5,00
control	0	6,00
control	0	8,00
control	0	6,00
experimental	1	4,00
experimental	1	5,60
experimental	1	5,60
experimental	1	8,00
experimental	1	7,20
experimental	1	6,40
experimental	1	7,20
experimental	1	8,00
experimental	1	8,00
experimental	1	7,20

Y se solicita el coeficiente r se Pearson, el resultado es:

Correlación de Pearson

Variable(1)	Variable(2)	n	Pearson	p-valor
codigo.grupo	puntaje	17	0,17343	0,5056

Que coincide con el que se obtuvo con la fórmula específica del coeficiente punto biserial.

Una variable continua dicotomizada y una proporcional

Si la variable dicotómica proviene de la recategorización de una continua que se dividió en dos categorías, es decir, si la dicotomía es artificial y se supone que hay una variable latente continua, entonces el coeficiente que corresponde calcular es el llamado **biserial** r_b . Como sucedió con el coeficiente de correlación tetracórico, se trata de una estimación del valor que tendría el coeficiente de Pearson si la variable no hubiese sido dicotomizada.

$$r_b = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_0}{s} * \frac{p * (1 - p)}{y}$$

Con la misma notación que se usó para el coeficiente r_{pb} . Lo diferente es la y en el denominador, cuyo cálculo depende de la distribución normal, que se verá más adelante⁴⁰.

Resumen de coeficientes de asociación

Nivel de medición de las variables		Coeficiente	Rango de variación	Lectura
Ambas dicotómicas	reales	ϕ (phi) de Yule	[-1; 1]	No importa el signo, la relación es fuerte si es cercano a 1 ó a -1 y débil si está cerca de 0
	provenientes de dos continuas recategorizadas	tetracórico r_{tet} o bien Q de Kendall - Yule		
Ambas nominales		de contingencia, C	[0, C_{max}] depende de la dimensión de la tabla	Más intensa si es próximo a C_{max}
		V de Cramer	[0; 1]	Más intensa si es próximo a 1
Ambas ordinales o una ordinal y una proporcional		r_s de Spearman	[-1; 1]	El signo indica la dirección, positivo es directa, negativo es inversa. Fuerte si es cercano a 1 ó a -1 y débil si está cerca de 0
Ambas proporcionales		r de Pearson		
Una dicotómica real y una proporcional		r_{pb} Punto biserial	[-1; 1]	Más intensa si es próximo a 1 o a -1
Una dicotómica proveniente de una continua recategorizada y otra proporcional		r_b biserial		

⁴⁰ Es la ordenada correspondiente a un valor de z que deja a derecha e izquierda, en una distribución normal, proporciones del área bajo la curva iguales a p y $1-p$ respectivamente.

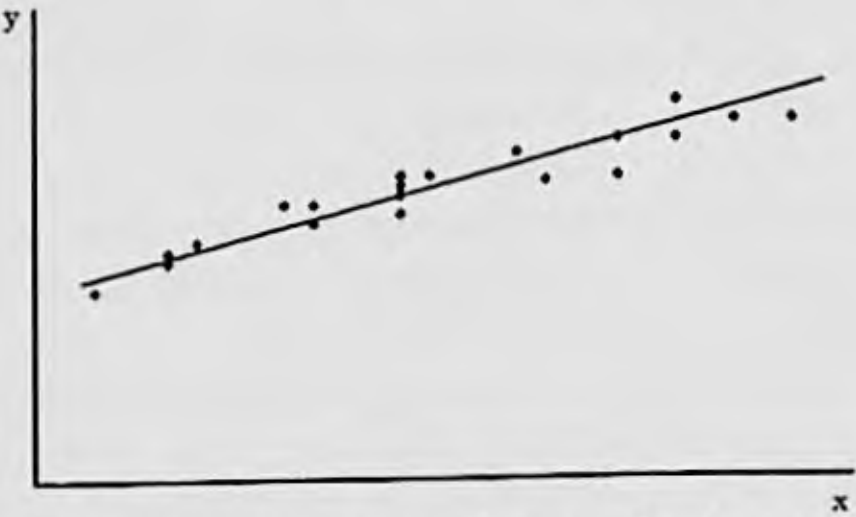
La forma de la relación

En este capítulo hemos trabajado con los coeficientes que miden la intensidad de la relación entre dos variables pero no hemos hecho referencia a la simetría o asimetría de la relación. No nos preocupamos por distinguir si una variable explica a otra o si se trata de variación conjunta, salvo la breve referencia a R^2 al final del apartado anterior. Ahora nos concentraremos en relaciones asimétricas: aquellas en las que es posible identificar a una de las variables como antecedente y a la otra como consecuente (o como independiente y dependiente, en el contexto del diseño experimental). Se trata de relaciones que se dirigen a explicar una variable (la consecuente) a partir de los valores de la otra (la antecedente). Por ejemplo, cuando preguntamos si una droga es efectiva para tratar la depresión, buscamos la relación entre las diferentes dosis de la droga y la reducción de síntomas de la depresión, por ejemplo a través del puntaje alcanzado en una prueba que la evalúa. O también, si preguntamos por el efecto del nivel de ansiedad (variable antecedente) sobre los resultados que se obtienen en un examen (variable consecuente, a explicar), o el impacto de la cobertura de una campaña de vacunación (variable antecedente) sobre la frecuencia de casos de gripe.

Cuando las variables tienen nivel de medición proporcional, es posible representar la relación con un diagrama de dispersión y, como hemos visto, cuanto más intensa es la relación (coeficiente de correlación de Pearson cercano a 1), tanto más se aplanan la nube de puntos, yendo hacia una tendencia lineal, aproximándose a una alineación a lo largo de una recta.

En este apartado avanzamos un paso más en el análisis de la relación entre variables: cuando los puntos del diagrama de dispersión tengan una disposición semejante a una recta (creciente, como en el gráfico 3 o decreciente, como en el 5), podremos buscar la función lineal que mejor aproxima esos puntos. Usaremos a partir de aquí una notación general: llamaremos x a la variable antecedente (o independiente) e y a la consecuente (o dependiente). Porque la relación se supone asimétrica, esperamos que x tenga efectos sobre y (la dosis de droga sobre la depresión, o la ansiedad sobre los resultados del examen, la cobertura de la campaña de vacunación sobre la prevalencia de gripe, en los ejemplos mencionados). Se trata de modelar la nube de puntos a través de una recta, como en el gráfico siguiente:

Gráfico 9: Ejemplo de función lineal que aproxima los puntos con una tendencia creciente



Aquí, la recta que aproxima los puntos está trazada de modo que equilibre lo que los puntos se apartan de ella por encima y por debajo. La búsqueda de esa función lineal implica proponer un **modelo** para la forma de la relación entre las

dos variables, veremos cuán realista resulta suponer que las dos variables se relacionan de manera lineal. Antes de eso será necesaria una breve referencia a esta función.

La **función lineal** tiene una expresión matemática como la siguiente $y = b_0 + b_1 * x$ en la que x e y son las variables cuya relación analizamos y los números b_0 y b_1 son valores fijos que determinan cuál es la recta de la que hablamos. Hallar la recta implica encontrar esos dos números b_0 y b_1 . Una vez que están determinados, se conoce la recta y se la puede trazar.

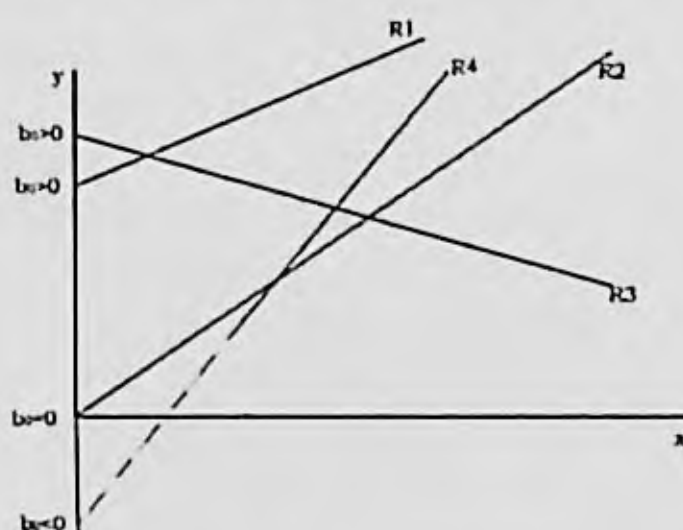
Ordenada al origen

El número b_0 se llama ordenada al origen y representa el valor de y cuando x vale cero. Eso puede verse fácilmente en la expresión de la recta cuando se reemplaza a x por cero, así se obtiene:

$$y = b_0 + b_1 * x = b_0 + b_1 * 0 = b_0$$

Entonces, si $x = 0$, tendremos $y = b_0$. Como los ejes tienen el cero en el punto en que se cortan, gráficamente esta ordenada al origen se ubica sobre el eje y (por ser una ordenada), como indican las diferentes rectas en el gráfico siguiente.

Gráfico 10: Ejemplos de funciones lineales con diferentes valores de la ordenada al origen



Las rectas R1 y R3 tienen ordenada al origen positiva ($b_0 > 0$). La ordenada al origen de R3 es mayor que la de R1, porque su b_0 está más arriba en el eje de ordenadas. A los efectos de la ordenada al origen, no hay ninguna diferencia en que R1 vaya subiendo y R3 baje.

La recta R2 pasa exactamente por el origen de coordenadas, por lo que su ordenada al origen es cero, $b_0 = 0$.

La recta R4 ha sido prolongada para llegar a cortar al eje de ordenadas y lo hace en un valor negativo ($b_0 < 0$).

Según las variables con que se trabaje, a veces b_0 no tiene interés, porque no se consideran los valores negativos o bien porque no tiene sentido que la variable antecedente sea cero ($x=0$).

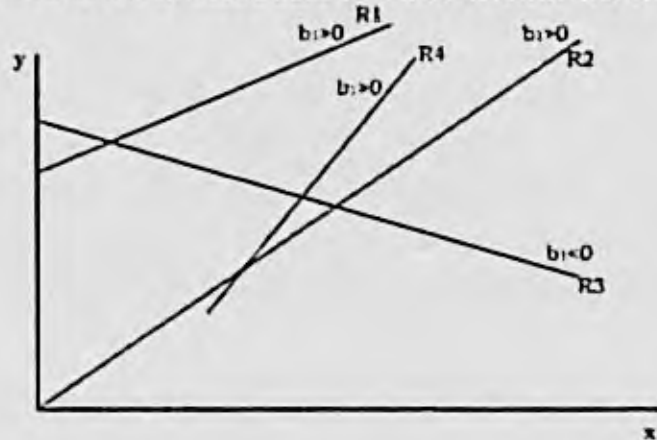
En los ejemplos que hemos mencionado hay diferentes situaciones con respecto al valor de b_0 . En la relación *dosis droga-depresión*, el valor cero para la dosis es la no-administración de la misma. Aquellos sujetos que tienen $x = 0$ son quienes no recibieron la droga y la ordenada al origen será el valor que hallemos en la escala de depresión (variable y) para quienes no tomaron la droga (a dosis cero).

Por el contrario, no es posible considerar un valor cero de la ansiedad en el segundo ejemplo, por lo que allí no nos interesamos por la ordenada al origen.

Pendiente

El otro número que determina de qué función lineal se trata, es b_1 que se llama pendiente y gráficamente indica la inclinación de la recta: su valor es responsable de que la recta “suba” o “baje”, siempre mirándola de izquierda a derecha.

Gráfico 11: Ejemplos de funciones lineales con diferentes valores de la pendiente



Las rectas R1, R2 y R4 son crecientes, van aumentando hacia la derecha (a medida que x crece), por eso la pendiente es positiva ($b_1 > 0$).

La recta R3 desciende, es una función decreciente, porque a medida que x aumenta y disminuye y la pendiente es negativa ($b_1 < 0$).

Vemos entonces que la pendiente depende de que sea una relación directa o inversa. Cuando es directa, x crece e y crece y la pendiente es positiva; cuando es inversa, x crece e y disminuye y la pendiente es negativa. Esto es lo mismo que sucede con el coeficiente de Pearson: positivo indica relación directa y negativo, inversa. Por esta razón, b_1 (la pendiente de la recta) siempre tiene el mismo signo de r , porque en ambos casos el signo indica si se trata de una relación directa o inversa.

Además del gráfico, el significado analítico de la pendiente es muy importante, porque indica en cuánto varía y por cada unidad que aumenta x . El número b_1 mide cuánto cambia la variable consecuente (dependiente), cuando la variable antecedente (independiente) cambia en una unidad. Como b_1 puede ser positivo o negativo, el cambio en y puede ser en dirección de aumentar cuando x aumenta o de reducirse. En el ejemplo de la relación *dosis droga-depresión*, se esperaría que el valor de b_1 fuera negativo, porque mide en cuánto se reduce la depresión (medida con el puntaje correspondiente a la escala que se use) por cada unidad que se aumente la dosis. Del mismo modo con la *ansiedad* y el *resultado del examen*, se espera que los sujetos con mayor ansiedad alcancen resultados menores en el examen, por lo que la relación se espera que sea inversa, con pendiente negativa y que la recta sea decreciente.

Por el contrario, si observamos la relación entre las *horas dedicadas al estudio*—como variable antecedente— y el *resultado del examen*—como consecuente—, esperaríamos una relación directa, una pendiente positiva ($b_1 > 0$), una recta creciente que indica cómo aumenta el resultado del examen a medida que se dedican más horas al estudio.

Obtención de la recta de regresión

Para encontrar b_0 y b_1 y determinar así la función lineal que corresponde a nuestra recta de regresión, deben usarse los puntos del diagrama, es decir los pares ordenados correspondientes a cada caso. Para hacerlo usaremos las fórmulas que mostramos a continuación pero, como antes solo será para ver el modo de usarlas, luego lo pediremos a InfoStat®. Llamando x_i e y_i a cada valor de cada par ordenado y n al número total de observaciones, la expresión para calcular la pendiente de la recta es:

$$b_1 = \frac{n * \sum_{i=1}^n x_i * y_i - (\sum_{i=1}^n x_i) * (\sum_{i=1}^n y_i)}{n * \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}$$

Una vez que conocemos la pendiente, se puede hallar la ordenada al origen haciendo:

$$b_0 = \bar{y} - b_1 * \bar{x}$$

Donde $\bar{x}$ e $\bar{y}$ son las medias de x y de y respectivamente. Vamos a aplicar estas expresiones para encontrar la función lineal que mejor ajusta los puntos del ejemplo en el que relacionamos el *puntaje en la escala de inteligencia lógico-matemática* con el *número de ejercicios correctamente realizados*. Tratamos de manera asimétrica a esta relación y tomamos al puntaje de la escala de inteligencia lógico-matemática como antecedente (x) y al número de aciertos como consecuente (y). Es decir que en nuestro modelo estamos tratando de explicar el *número de aciertos* a partir del *puntaje en la escala de inteligencia lógico-matemática*.

Para facilitar el uso de la expresión del cálculo de la pendiente, agregamos dos columnas adicionales a los valores de las dos variables: la de los productos de cada x por cada y , y la de las x al cuadrado, del siguiente modo:

	x_i	y_i	$x_i * y_i$	x_i^2
	46	7	322	2116
	44	2	88	1936
	56	7	392	3136
	57	8	456	3249
	30	2	60	900
	60	9	540	3600
	45	5	225	2025
	43	1	43	1849
	64	9	576	4096
	32	3	96	1024
Sumas de las columnas	477	53	2798	23931

Tenemos entonces

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 477, \sum_{i=1}^{10} y_i = 53, \sum_{i=1}^{10} x_i * y_i = 2798, \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 23931$$

Reemplazando, obtenemos la pendiente de la recta:

$$\text{Ahora } b_1 = \frac{n * \sum_{i=1}^n x_i * y_i - (\sum_{i=1}^n x_i) * (\sum_{i=1}^n y_i)}{n * \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} = \frac{10 * 2798 - 477 * 53}{10 * 23931 - 477^2} = \frac{2699}{11781} = 0,23$$

Esta pendiente es positiva, como lo había sido r , y eso indica que la relación es directa. La pendiente además nos informa que por cada punto adicional en la variable antecedente (puntaje escala inteligencia lógico-matemática) se espera que se incremente en 0,23 el número de ejercicios bien resueltos.

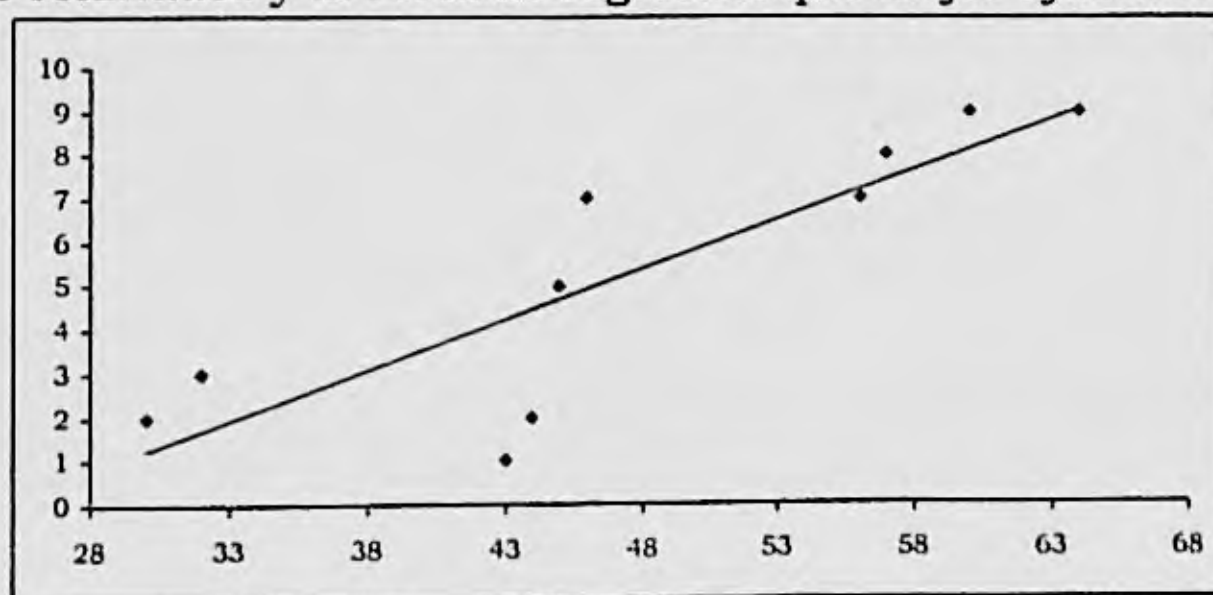
Las medias de x y de y habían sido calculadas cuando las necesitamos para r : $\bar{x} = 47,7$ e $\bar{y} = 5,3$ por lo que la ordenada al origen de la recta es:

$$b_0 = \bar{y} - b_1 * \bar{x} = 5,3 - 0,23 * 47,7 = -5,63$$

El valor de la ordenada al origen no tiene interés en este ejemplo —salvo para el trazado de la recta—, porque sería el número de aciertos esperado (que resultan negativos, es decir sin interpretación posible) para alguien con inteligencia cero, lo cual no está definido.

Conociendo la pendiente y la ordenada al origen, podemos escribir la ecuación de la recta: $\hat{y} = -5,63 + 0,23 * x$. Esta es la función lineal que describe los cambios de y a partir de los de x . Hemos escrito a y con una indicación especial, un circunflejo: $\hat{y}$, vamos a llamarla “ y estimada” y es la que vamos a usar para trazar la recta:

Gráfico 12: Diagrama de dispersión de la relación entre el puntaje en la escala de inteligencia lógico-matemática y el número de ejercicios de matemática correctamente realizados y la recta de regresión que mejor ajusta los puntos



La recta que hemos encontrado usando las fórmulas de arriba es la que hace mínimos los cuadrados de las distancias de cada punto a la recta⁴¹, por eso, a esta también se la llama **recta de mínimos cuadrados**.

Para hacer esta operación con InfoStat® (ver el video *regresión*) hay que tener en cuenta que a las variables las llama “dependiente” a la consecuente (*y*) y “regresora” a la antecedente (*x*).

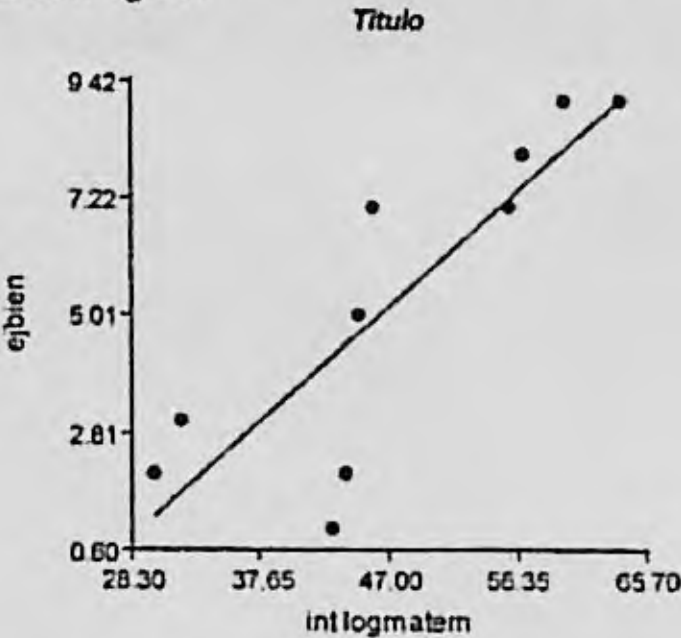
El formato de la salida es el siguiente:
Análisis de regresión lineal

Variable	N	R²	R² Adj	ECMP	AIC	BIC
ejbien	10	0.72	0.68	4.17	43.24	44.15

Coeficientes de regresión y estadísticos asociados

Coef	Est.	E.E.	LI (95%)	LS (95%)	T	p-valor	CpMallows
Const	-5.63	2.48	-11.35	0.10	-2.27	0.0531	
Intlogmatem	0.23	0.05	0.11	0.35	4.51	0.0020	19.23

En esta salida tenemos dos partes. De la primera consideraremos por ahora: el número de observaciones $N=10$, y el coeficiente general de determinación $R^2=0,72$, al que ya habíamos calculado antes como cuadrado del coeficiente de Pearson. De la segunda parte nos interesan los números -5,63 y 0,23. El primero está identificado como “constante”, y es la ordenada al origen: b_0 . El segundo, indicado como *intlogmatem* (el nombre de la variable antecedente), es la pendiente de la recta: b_1 . El gráfico que produce InfoStat® es el siguiente, que permite editarse para colocar título y rótulos diferentes a los ejes.



Además de mostrarnos la forma del modelo, la recta de regresión sirve para hacer estimaciones de valores no observados, porque nos ofrece valores de $\hat{y}$ ⁴² para cada

⁴¹No es posible poner como condición que la recta haga mínimas las distancias porque hay puntos por encima y por debajo, por lo que la suma de las distancias se hace cero (igual a lo que sucedió con la suma de los desvíos alrededor de la media y que llevó a usar sus cuadrados para definir la varianza). Por esa razón se usan los cuadrados de las distancias.

x que reemplacemos. Por ejemplo, si preguntamos por la cantidad de ejercicios bien resueltos que se esperan en alguien que alcanzó 55 puntos en la escala de inteligencia lógico-matemática, respondemos reemplazando en la función el valor de $x=55$ y resulta:

$$\hat{y} = -5,63 + 0,23 * x = -5,63 + 0,23 * 55 = 7,02$$

Que puede redondearse a 7. Este es el valor estimado del número de aciertos para alguien con 55 puntos en la escala de inteligencia lógico matemática. Estas estimaciones son muy valiosas para hacer predicciones sobre valores que no han sido observados, por ejemplo hacia el futuro. Ejemplos muy útiles de esta aplicación son las proyecciones de población, y más específicamente las de matrícula escolar, que ofrecen estimaciones del volumen de alumnos que se prevé para años próximos. Pero en esos casos los modelos que se aplican no son lineales.

Cuando se reemplaza cada uno de los x observados en la función, se encuentran las estimaciones para cada uno de ellos. En la tabla siguiente indicamos cada uno de los pares ordenados como fueron observados y agregamos los valores de $\hat{y}$ estimados a través de la función lineal⁴³; por último, restamos los valores estimados de y , de los observados, para ver las diferencias entre los que la recta estima y los que hemos observado:

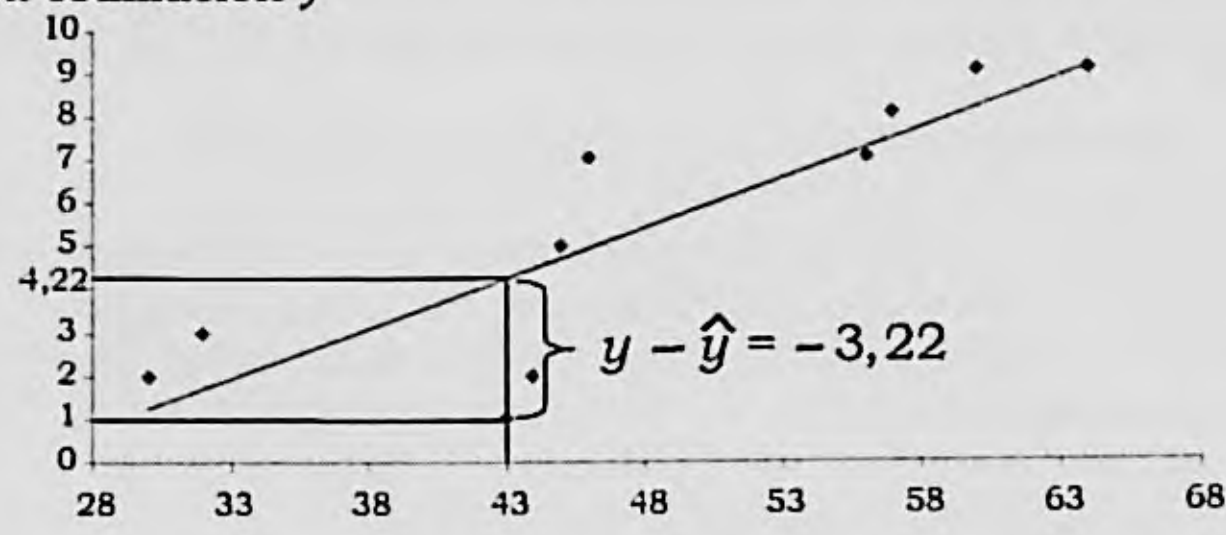
x	y	$\hat{y}$	$y - \hat{y}$
46	7	4,91	2,09
44	2	4,45	-2,45
56	7	7,20	-0,20
57	8	7,43	0,57
30	2	1,24	0,76
60	9	8,12	0,88
45	5	4,68	0,32
43	1	4,22	-3,22
64	9	9,03	-0,03
32	3	1,70	1,30

La última columna mide la distancia que hay entre cada punto y la recta. Es un indicador de la calidad del ajuste que hace la función lineal de los puntos. Cuando esas distancias son pequeñas tenemos una recta que ajusta mejor los puntos que cuando las distancias son grandes. Como vemos, en este ejemplo hay algunas positivas, que corresponden a los puntos que están encima de la recta, y otras negativas, las de los puntos por debajo de la recta. Veamos en el gráfico siguiente la ubicación de uno de estos puntos, por ejemplo el que corresponde al par observado (43; 1), al que la recta estima con el valor $\hat{y} = 4,22$:

⁴² Se lee “y estimado”. Esta notación es general, el circunflejo ubicado sobre cualquier medida estadística, se lee de ese modo.

⁴³Para calcular los valores de y estimado ($\hat{y}$) hemos conservado más decimales en b_0 y b_1 que los mostrados.

Gráfico 13: Ubicación gráfica de la diferencia entre el valor observado de y observado y su estimación $\hat{y}$

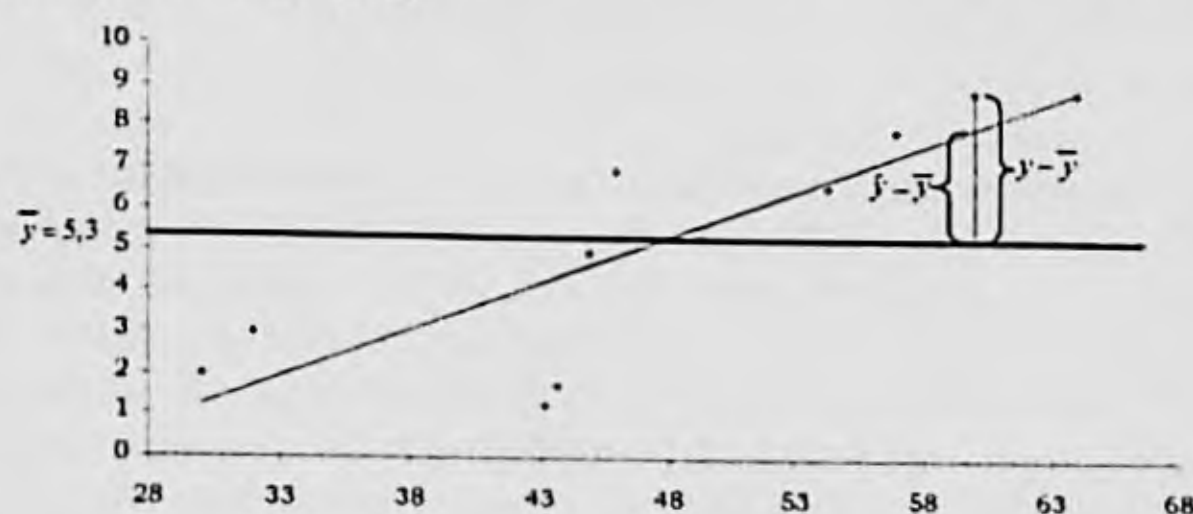


Este desvío es negativo porque el punto está debajo de la recta, la estimación $\hat{y}$ es mayor que el valor observado, y .

La suma de todos estos desvíos es cero, por haber pedido a la recta la condición de equilibrar los puntos. Estas diferencias son los errores que se cometen al estimar a través de la función lineal. Para verlos como tales, observemos que si la correlación fuera perfecta (positiva o negativa) como en los gráficos 7 y 8 todos los puntos estarían sobre la recta y coincidirían los valores de y con los de $\hat{y}$, por lo que las diferencias de la última columna serían todas cero, no habría error en una relación perfecta. Como hemos dicho, esa es una situación ideal, que no puede observarse en la realidad: en los casos reales siempre hay apartamientos de los puntos a la recta, que constituyen el error de estimación. Para llegar a una medida de la calidad de nuestro modelo, es decir una medida de qué tan bueno es el ajuste que la recta hace sobre los puntos realmente observados, trabajaremos sobre la dispersión, a través de la varianza.

En primer lugar, la variable y tiene su varianza, que mide lo que los valores se apartan de la media, vamos a llamarla s_y^2 (la varianza de y). En segundo lugar, los $\hat{y}$ también se apartan de la media y esas distancias pueden resumirse en otra varianza, la que mide las distancias desde los $\hat{y}$ hasta la media de y , la llamaremos $s_{\hat{y}}^2$ (la varianza de $\hat{y}$). Así entonces resumimos los desvíos de la variable hasta la media, con la varianza de y , y los desvíos de las estimaciones hasta la media, con la varianza de $\hat{y}$. Si se traza una recta horizontal para ubicar a la media de y ($\bar{y}$ en 5,3) y se recuerda que los valores de y son los que están en los puntos realmente observados, mientras que los de $\hat{y}$ están sobre la recta de regresión, estos desvíos pueden verse gráficamente así:

Gráfico 14: Ubicación gráfica de los alejamientos (desvíos) de y observada y de $\hat{y}$ estimada, hasta la media de y ($\bar{y}$)



Lo que cada observación se aleja de la media es la diferencia $y - \bar{y}$. Cuando se consideran todas ellas, su medida es la varianza de y (indicada s_y^2).

Lo que se desvía la estimación (ubicada sobre la recta de regresión) de la media es $\hat{y} - \bar{y}$, que cuando se extiende a todos los puntos se resume en la varianza de $\hat{y}$ (que indicamos como $s_{\hat{y}}^2$).

La calidad del ajuste se aprecia en la proximidad que la recta tiene a los puntos, en el caso ideal (si $r = 1$ o $r = -1$), las distancias son todas cero. En una situación real, el ajuste será tanto mejor cuanto más cerca estén los puntos de la recta; es decir, cuanto más pequeñas sean esas distancias. Para medir esta calidad se usa el cociente entre las dos varianzas anteriores, que resulta ser el ya mencionado

coeficiente general de determinación: $R^2 = \frac{s_{\hat{y}}^2}{s_y^2}$.

Al que ahora calculamos como la varianza de $\hat{y}$ sobre la varianza de y , por lo que mide qué porción de la variabilidad total de y (el denominador) representa la variabilidad de $\hat{y}$, puede leerse como la parte de toda la variabilidad de la variable dependiente que es explicada por el modelo lineal.

Este cociente no puede ser negativo ni mayor que 1, porque el numerador es menor o igual que el denominador. Solo vale 1 en el caso de una asociación perfecta, en que las varianzas son iguales —porque los puntos están sobre la recta—, $r = 1$ o $r = -1$ y, en consecuencia $R^2 = 1$.

El coeficiente general de determinación mide la proporción de los cambios de y (expresados con la varianza) que se explican a través de la función lineal. Por eso es muy valioso, porque cuantifica el peso relativo de la variable x (a través de la función lineal) en la explicación de y .

Podemos así decir que, por ejemplo, el 30% de las diferencias en el rendimiento escolar de los alumnos de primaria se explica por la educación de sus padres, o que el 60% de la disminución del puntaje en una prueba que evalúa la depresión se puede atribuir a la administración de una determinada droga. Se aprecia con estos ejemplos la gran potencialidad explicativa de este coeficiente.

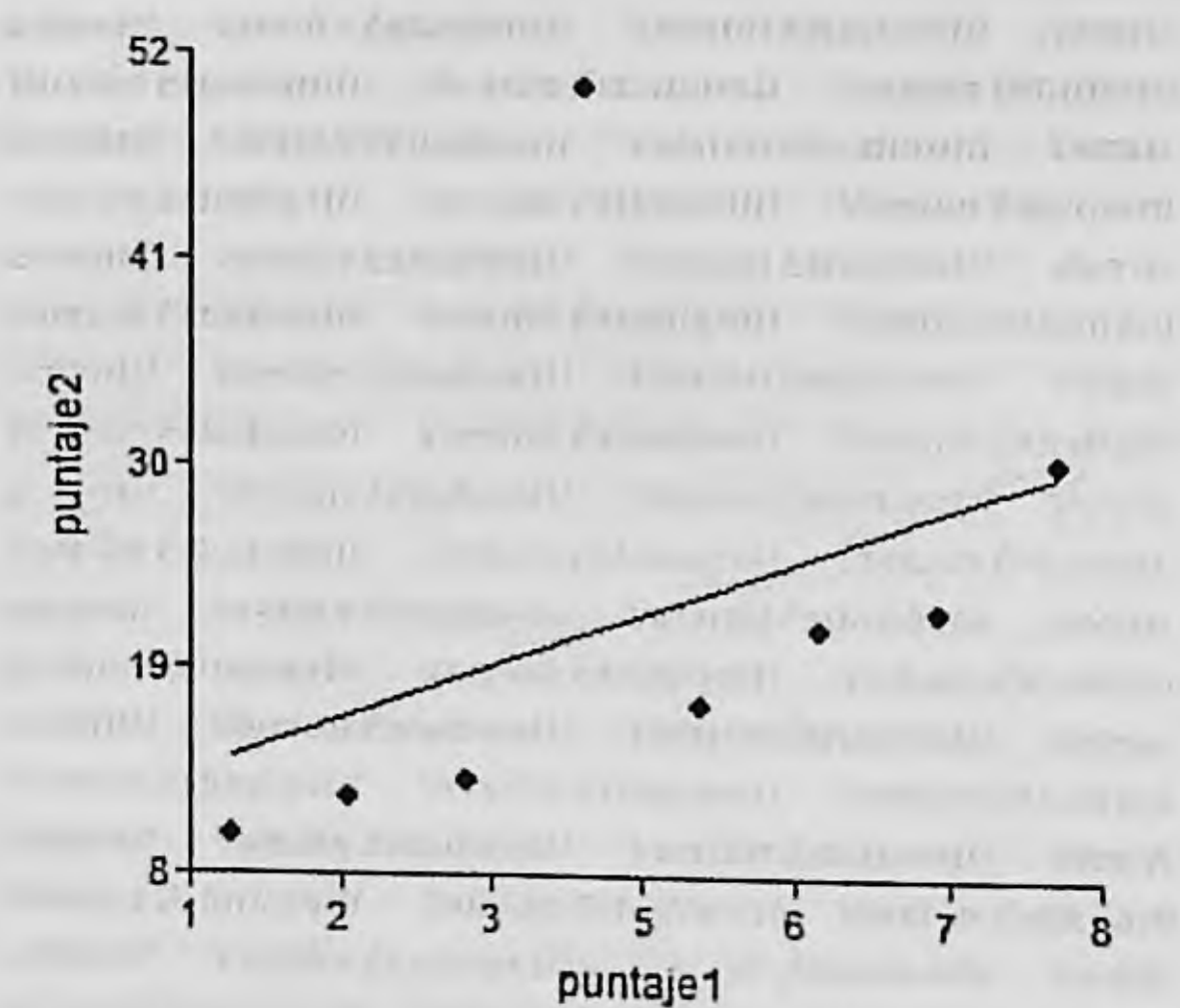
Todo el análisis de regresión que hemos desarrollado hasta aquí puede hacerse de manera equivalente si la relación entre las variables no es lineal. En vez de obtener la ecuación de una recta, se obtendrá la de una parábola, una cúbica o cualquier otra función que aproxime adecuadamente los pares ordenados que se

observan. La definición del coeficiente general de determinación que hemos dado: $R^2 = \frac{s_{\hat{y}}^2}{s_y^2}$ no cambia, pero los $\hat{y}$ se calcularán con la función adecuada, no con la lineal que vimos.

Sobre el coeficiente de correlación de Pearson, debe recordarse que solo es adecuado para evaluar la intensidad de la relación entre dos variables si ésta es lineal. En presencia de una relación de otro tipo, como la del gráfico 6, el coeficiente de Pearson dará un valor muy bajo, pero eso no quiere decir que la relación sea débil o inexistente, sino que el modelo lineal no es adecuado para describirla. Por ello, si se encuentra un coeficiente de Pearson muy bajo, debe explorarse la existencia de una relación no lineal, esto puede hacerse fácilmente observando cómo se disponen los puntos en el diagrama de dispersión.

Cuando la relación se modela con una función lineal —y solo en estos casos—, el coeficiente general de determinación (R^2) se calcula directamente elevando al cuadrado al coeficiente de Pearson.

Hemos señalado que el coeficiente de Spearman es adecuado cuando una variable o ambas están medidas a nivel ordinal. Pero también es adecuado cuando no se puede suponer que las variables tengan, en la población, distribución normal, que es un requisito para el cálculo del coeficiente de Pearson. Una ventaja adicional del coeficiente de Spearman es que es poco sensible a valores extremos, es una situación similar a la relación entre la media y la mediana la que hay entre estos dos coeficientes. Cuando existen excepcionalmente altos o bajos, es conveniente calcular este coeficiente, aun cuando las variables sean ambas cuantitativas. Se dice que el coeficiente de Spearman es más “robusto” que es de Pearson, porque se afecta menos por valores atípicos de la variable. El siguiente ejemplo con datos ficticios ilustra la diferencia:



Se trata de una tendencia lineal, con un valor extremo que se aparta del grupo. Los coeficientes de Pearson y de Spearman dan 0,40 y 0,76 respectivamente, el primero destaca que la tendencia lineal está comprometida por ese caso aislado, el segundo no se ve tan afectado. El tratamiento de estas situaciones requiere atención. Por un lado, se debe repetir el análisis sin el valor extremo y comparar nuevamente los coeficientes; por el otro, observar qué hizo que ese caso tuviera un valor tan atípico. La diferencia entre los dos coeficientes, da una señal para mirar más de cerca los datos.

Parte II: De la descripción a la inferencia

Hasta aquí hemos trabajado sobre datos que han sido observados; Pudo haberse tratado de datos de una encuesta o un relevamiento que nosotros hayamos realizado o bien que nos haya provisto alguna fuente de buena calidad: registros de una institución educativa, historias clínicas de un hospital, etc. Se trata de información realmente recopilada, que ha sido obtenida por observación a través de algún instrumento de recolección de datos. Por el contrario, en los capítulos que siguen nos ocuparemos de lo que *no* ha sido observado, haremos *inferencias* para sacar conclusiones acerca de lo que no hemos visto. Partiremos de la información que provee una muestra y con ello generalizaremos a un conjunto mayor. Como resultado de ello buscaremos dar respuesta a preguntas como las siguientes:

-Si en un grupo de alumnos de una escuela se ven más dificultades en Matemática, ¿será esta observación válida para los alumnos de otras escuelas similares?

-Si un nuevo medicamento tiene efecto en un grupo de pacientes sobre los que se experimenta, ¿bajo qué condiciones podemos saber si también tendrá efecto en otros pacientes?

-Si en una muestra de 200 personas encuestadas el 42% dice que va a votar al partido A, ¿qué porcentaje de votos puede esperar obtener el partido A cuando sean las elecciones?

-Si en un grupo de voluntarios, elegidos para participar en un experimento se descubre una relación entre las expectativas de logro y el número de errores que se cometen en una prueba, ¿es suficiente con eso para afirmar que esa relación se mantiene entre quienes no participaron del experimento?, o dicho de otra manera ¿es esa una relación general entre esas variables (expectativa de logro y cantidad de errores)?

-Si a una muestra de pacientes psicóticos se administra una droga y se encuentra que produce estabilización en los síntomas en el 90% de ellos, ¿corresponde recomendar que esa droga sea utilizada en los pacientes diagnosticados como psicóticos?

Como vemos, se trata de llevar los resultados más allá del ámbito en el que fueron obtenidos, se trata de generalizarlos. Para hacer esto será necesario usar conceptos nuevos, a los que nos dedicamos en los capítulos de esta parte. Veremos el modo de seleccionar casos para que lo que se observe en ellos tenga validez general (muestreo), luego cómo decidir en el terreno de la incertidumbre (probabilidad), y finalmente, lo que sucede con las medidas descriptivas que conocemos cuando se las pone en correspondencia con valores generales (distribuciones en el muestreo)

Sobre la relación entre la probabilidad y la inferencia, Ian Hacking (2005) cita un pasaje de un relato indio⁴⁴ en el que uno de los personajes estima “el número de hojas y frutos que hay en dos grandes ramas de un árbol frondoso. Aparentemente lo hace en base a una sola rama más pequeña que observa. Hay, según afirma, 2095 frutos. [...] y cuando le preguntan ¿cómo pudo saberlo?,

⁴⁴Se trata de la epopeya Mahabharata, cuya versión actual habría sido concluida hacia el año 400d.c.

responde: *Yo de los dados poseo su ciencia y así en los números diestro soy*" (Hacking, 2005, p.20). De este modo se liga en este antiguo texto la capacidad para hacer una estimación de lo que no es observado con "la ciencia de los dados", desde tan temprano hay indicios de la relación entre estimación y probabilidad.

Las respuestas a las preguntas que buscan generalidad no pueden ser certeras, como en el relato mítico, sino inciertas. A diferencia de las descripciones, que se limitan a mostrar información recopilada, las inferencias solo pueden ser afirmaciones tentativas, aproximativas, probabilísticas. La diferencia entre la certeza de una descripción y la incertidumbre de una inferencia se ve con claridad al comparar las siguientes expresiones:

A. "El tiempo promedio que tardaron estas 100 personas en responder al cuestionario fue de 12 minutos"

B. "Cuando este cuestionario sea aplicado, se espera que los encuestados tarden entre 11 y 13 minutos en responderlo, con una certeza del 95%".

Hay dos diferencias en estos enunciados, que pertenecen a distintos niveles de proximidad a los datos. Una diferencia es que el primero ofrece un valor único: los 12 minutos que se obtuvieron al promediar los tiempos de los 100 sujetos que fueron observados. Por el contrario, el segundo ofrece un intervalo: entre 11 y 13 minutos.

La segunda diferencia es que el primer enunciado *afirma* ese valor, mientras que el segundo expresa que *hay una certeza del 95%*. Esto quiere decir que no estamos seguros que el tiempo que tardarán en responder vaya a estar realmente entre 11 y 13 minutos; hay una confianza del 95% que sea así, pero no una certeza plena. Por eso, puede ser que el tiempo sea, o bien menor que 11 minutos, o bien mayor que 13; y esto puede suceder con una probabilidad de 5%. Los enunciados del segundo tipo transmiten cierto grado de incertidumbre porque se refieren a casos que no han sido observados, sino inferidos. Esta incertidumbre, para la que disponemos de procedimientos que permiten cuantificarla de manera probabilística, es inherente a todo proceso de inducción, donde se requiere formular generalizaciones.

Los capítulos que vienen a continuación son los que pertenecen a la parte que llamamos *Estadística Inferencial*, como etapa posterior a lo que hemos visto hasta aquí, que llamamos *Estadística Descriptiva*. Para llegar a ello será necesario manejar algunos conceptos de probabilidad, y ése es el tema del que nos ocuparemos en este capítulo, que será de articulación entre lo descriptivo y lo inferencial.

Capítulo 6 Obtención de la muestra

La estadística inferencial provee los procedimientos para estudiar un subconjunto de elementos y generalizar las conclusiones obtenidas un total; esto se debe a que estudiar uno o varios atributos o variables en todos los elementos, como se hace en los censos, requiere mucha inversión, de tiempo y de dinero. Por ello es que se procede estudiando tales variables en una muestra y se estiman por inferencia los valores de la población. Se reducen así los costos y se disminuye el tiempo necesario para llevar adelante las investigaciones, si se respetan los procedimientos de la estadística inferencial el error que proviene de trabajar sólo con una parte de la población puede ser conocido y controlado.

El muestreo es un conjunto de procedimientos mediante los cuales se selecciona, de un universo determinado, llamado población, un subconjunto que recibe el nombre de muestra, con el objetivo de llegar al conocimiento de determinadas características de los elementos de la población a través de la observación y generalización de esas características presentes en los elementos de la muestra.

Este recurso no es ajeno a la vida cotidiana, por ejemplo, cuando se considera a una persona “poco confiable” suele ser a partir de varias veces en que esa persona mintió. Al hacerlo, se extiende ese comportamiento (se generaliza) a situaciones que no han sido observadas, se espera que en el futuro, esa persona actúe de modo similar. Esta forma de generalizar tienen requisitos, ya que no es suficiente que haya mentido una vez para caracterizarlo como poco confiable, ni que haya mentido varias veces sobre un mismo asunto. Por el contrario, debe ser una conducta que se haya apreciado en diversidad de situaciones, la que permita hacer un juicio sobre la persona,

Población

Utilizaremos la palabra **población** o, indistintamente, **universo**, para designar, de manera genérica, a un conjunto de unidades de análisis que son objeto de un estudio particular. Tal conjunto puede estar definido con precisión en el tiempo y el espacio o no, a él se referirán los resultados obtenidos en la investigación por muestreo. Ejemplos de estos son: los pacientes con trastornos alimenticios del hospital Misericordia de la ciudad de Córdoba en el año 2009, o los votantes en las elecciones para intendente de la ciudad de Río Cuarto en 2008, las escuelas primarias de la provincia de Córdoba, las carreras que se dictan en universidades en Argentina en 2017.

Las unidades de análisis antes mencionadas constituyen los elementos de la población, son entidades de diferente naturaleza: personas, hogares, instituciones, ciudades, etc.

El tamaño que tiene una población influye en el diseño de la muestra porque dependiendo de su tamaño, la población puede ser tratada como finita o infinita. Se dice que es finita si el número de elementos es limitado y se puede tener acceso a todos o casi todos los elementos, ejemplo de ello serían los alumnos de cuarto año del colegio Manuel Belgrano del ciclo lectivo 2013 o los pacientes admitidos en el Hospital de Clínicas en mayo de 2017. Se habla de población infinita⁴⁵ cuando el número de elementos que integra la misma es elevado, por

⁴⁵La idea de infinito no es la de la matemática, sino que se refiere a una relación pequeña entre la cantidad de casos de muestra y los de la de la población. Ver nota 48.

ejemplo, los automovilistas que circularon por las rutas nacionales en el año 2012, o alumnos de nivel inicial de la República Argentina. En ciertas ocasiones no se especifica con precisión el tiempo por lo que se habla de población hipotética, tal caso sería el de alumnos de primer año de la carrera de Psicología en UNC (sin especificar ciclo lectivo), por lo que no sólo se incluyen los elementos existentes hoy y en años anteriores, sino también los que en el futuro lo hagan. En este caso, la población no puede siquiera enumerarse. Así sucede también con estudios que plantean probar los efectos de un tipo de psicoterapia sobre pacientes diagnosticados como esquizofrénicos. En ese caso la "población" es la de las personas diagnosticadas como esquizofrénicas en la actualidad y también aquellas que lo serán en el futuro. Cuando se ensaya en una muestra una droga para la hipertensión, la generalización se espera válida para una población que no puede enumerarse: la de "los hipertensos", tanto los ya diagnosticados como aquellos que lo serán en el futuro. En casos como estos no tenemos posibilidad de delimitar la población completa, decimos que se trata de **poblaciones hipotéticas**.

Para analizar características de las unidades de análisis, puede creerse que lo mejor sería realizar un **relevamiento exhaustivo** de las mismas. Este relevamiento consistiría en observar dicha característica (variable) en cada uno de los individuos de la población. Tal modo de recolectar la información se conoce con el nombre de **censo**.

Desde el punto de vista práctico, es frecuente realizar relevamientos exhaustivos cuando las poblaciones son de pequeño tamaño y están bien delimitadas en el tiempo y en el espacio. Un ejemplo de este caso sería la situación en que se pretende conocer la opinión de los alumnos de un curso acerca de su docente, aquí lo más adecuado es indagar (vía encuesta) a cada uno de ellos.

Sin embargo, la mayoría de las poblaciones de interés para la investigación psicológica, educativa, social tienen dimensiones considerables (todos los alumnos de primer grado del país) o son inaccesibles (los consumidores de una marca de gaseosa) o son hipotéticas (las personas diagnosticadas de depresión).

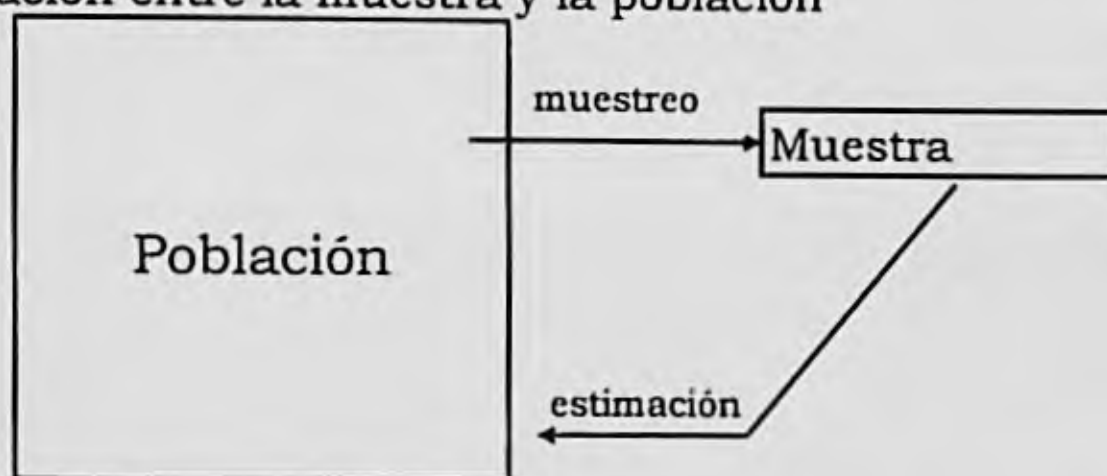
Cuando se busca dar generalidad a los resultados alcanzados a través de experimentos, la población de referencia suele ser hipotética: los efectos de una droga sobre la depresión, la efectividad de un tipo de psicoterapia dirigida a pacientes diagnosticados como esquizofrénicos, la eficacia de una estrategia didáctica. Son casos que aspiran a generar resultados válidos para una población hipotética, por lo que el relevamiento completo es imposible y solo se puede observar a unos pocos casos. El modo en que seleccionemos esos pocos casos es de la máxima importancia para que los resultados también sean válidos para los casos que no son observados.

Además de permitir economía de recursos, el muestreo permite profundizar los estudios que se realizan sobre los elementos de la muestra. En efecto, en los relevamientos exhaustivos de gran magnitud, como los censos nacionales o provinciales, no es posible profundizar con la indagación; por el contrario se deben hacer pocas preguntas a fin de alcanzar a una gran población en un tiempo aceptable. Si se trabaja con una muestra, se puede indagar con más detalle y profundidad, y luego, con los procedimientos adecuados, extender los hallazgos a la población de la cual la muestra proviene.

Muestra

Se llama **muestra** a un subconjunto de una población que comparte sus características en los aspectos de interés para la investigación. El concepto de muestra va ligado al de representatividad, es decir a su capacidad de actuar como “representante” de los elementos de la población que no han sido seleccionados. Tal representatividad no implica una identidad en todos los aspectos, son solamente aquellas características que se encuentran bajo análisis las que deben ser compartidas por la muestra y la población.

Esquema 1: Relación entre la muestra y la población



Cuando se planifica la extracción de una muestra, no se conoce en detalle a la población, por lo que no es posible saber a priori cómo debe ser la muestra que la represente. Si hay algunas características de la población que sean conocidas y que estén relacionadas con el aspecto que se estudia, entonces corresponde reproducirlas en la muestra. Por ejemplo, si sabemos que en la población de docentes primarios de una ciudad, hay 80% de mujeres, y se espera que las respuestas que den las mujeres sean diferentes a las de los varones, entonces debe respetarse ese porcentaje en la muestra. Pero si en la escuela, un 60% de las maestras va en auto y esto no tiene ninguna relación con lo que se va a preguntar en la encuesta, ese porcentaje es irrelevante para el muestreo. Por otro lado, si la edad incide en nuestro tema de investigación, ¿Cuántas maestras de menos de 30 años debemos incluir en la muestra? No lo sabemos, porque no conocemos esa característica de la población.

La posibilidad de extrapolar los resultados muestrales a la población completa está así ligada a la posibilidad de asignar probabilidades a cada una de las muestras que podrían seleccionarse de una población. De manera que sólo será lícito utilizar los resultados muestrales como estimación de valores poblacionales cuando sea posible conocer a priori cuál es la probabilidad que cada individuo de la población tiene de ser incluido en la muestra. Las técnicas de muestreo que permiten asegurar este requisito se denominan de carácter **probabilístico**. Otras técnicas que no cumplen esta condición se llaman muestreos **no probabilísticos** y muchas veces son utilizadas con el objetivo de reducir tiempos y costos, pero los resultados obtenidos de ellas no pueden utilizarse para extraer conclusiones acerca de la población. Son adecuados en estudios que no buscan generalidad de sus conclusiones sino profundidad en el análisis de los casos observados. Sin embargo, hay investigaciones que usan muestras no probabilísticas para dar carácter general a los resultados que se obtienen. Cuando se hace esto, nunca hay certeza del grado de generalidad de lo que se concluye y hasta qué punto no se trata de características específicas de los individuos a los que se observó, porque no puede conocerse el margen de error de lo que se estima. Cuando las

limitaciones prácticas hacen imposible la obtención de una muestra probabilística, se deben tomar recaudos para que la muestra sea heterogénea y que la inclusión de casos dependa lo menos posible de la voluntad de los participantes.

Para que sea posible asignar probabilidades a cada una de los individuos de formar parte de la muestra, el método por el cual los individuos son seleccionados debe excluir la elección voluntaria. Esto implica que el proceso de elección debe quedar estrictamente librado al azar, sin dejar margen para que se filtre la intencionalidad, no se trata de elegir a "cualquiera". En consecuencia, caerán en la categoría de técnicas de muestreo no probabilísticas todos los procedimientos en que exista alguien que pueda tomar la decisión acerca de si una unidad va a ser o no incluida en una muestra.

Muestreos probabilísticos: las muestras obtenidas por estos procedimientos permiten generalizar los resultados obtenidos en ellas a toda la población de referencia. El requisito para que una muestra sea probabilística es que sus elementos hayan sido elegidos al azar (aleatoriamente), sin la participación voluntaria que decida a quién incluir y a quién excluir de la muestra.

Muestreos no probabilísticos: en estas muestras no se cumple el requisito de aleatoriedad en la selección de los elementos que la componen. Los resultados no se pueden generalizar de manera probabilística más allá de los casos observados.

Muestreos probabilísticos

Cuando se pretende que los resultados obtenidos en una muestra puedan ser generalizados a la población de la cual ésta proviene, se hace necesario recurrir a muestreos de tipo probabilísticos. Se trata de diseños que requieren más cuidado en su elaboración y de manera concomitante son más costosos. Señalamos a continuación los tipos puros de muestreos probabilísticos y luego veremos algunas combinaciones de ellos que se usan a menudo.

Muestreo irrestricto aleatorio o aleatorio simple

Se trata de una técnica que asigna igual probabilidad de pertenecer a la muestra a todos los individuos de la población. Para su realización se requiere contar con una lista de los elementos de la población. Este listado es lo que se denomina el **marco de la muestra**. Dicho marco debe cumplir con los requisitos de exhaustividad (es decir, que sea completo) y debe cuidarse que no existan duplicaciones. La tarea de depuración de un listado puede insumir bastante tiempo según el tamaño de la población y el tipo de marco muestral de que se trate. Es diferente el caso de un registro electoral del total de historias clínicas de un gran hospital o del listado de todos los alumnos de una facultad).

Su realización consiste en numerar los elementos del listado y elegir aleatoriamente una cantidad n de ellos (el tamaño de la muestra). La aleatoriedad de la elección queda garantizada por el uso de una tabla de números aleatorios o de un generador electrónico de los mismos, algunas calculadoras de los teléfonos disponen de esta opción en la tecla #RAN (por random, aleatorio).

La exigencia de contar con el listado de los elementos de la población es una limitación importante para este tipo de muestreo por lo que, como se verá más adelante, a menudo se lo utiliza en combinación con otros procedimientos.

Además, puede ocurrir que los elementos elegidos en la muestra se encuentren dispersos geográficamente de manera que resulte notablemente costoso ubicar a cada uno de ellos para entrevistarlos.

Una ventaja importante es que no exige que se conozca a priori ninguna característica de la población. Desde el punto de vista estrictamente estadístico, resulta más fácil acotar el error de muestreo ya que las distribuciones de probabilidad subyacentes son bien conocidas para este tipo de muestreo.

Muestreo sistemático

Un procedimiento alternativo al muestreo irrestricto aleatorio lo constituye el muestreo sistemático. En este caso sólo se selecciona un elemento aleatoriamente y, comenzando por él, se recorre el marco de la muestra tomando los elementos siguientes a intervalos regulares. El primer paso consiste en determinar el número de veces que puede incluirse la muestra en la población. Este valor es el que resulta de dividir el tamaño de la población en el tamaño de la muestra:

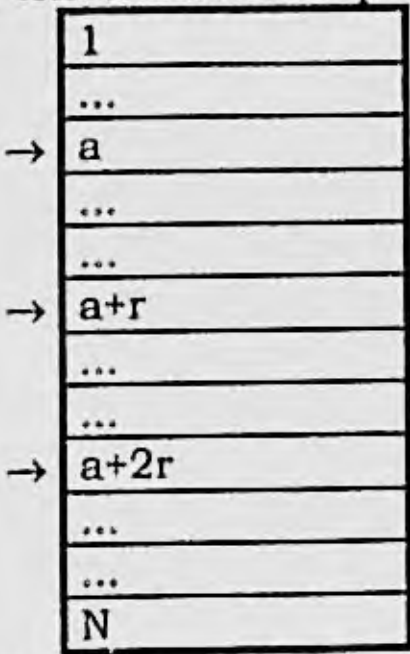
$$r = \frac{N}{n}$$

Donde:

- r representa a las veces que la población contiene a la muestra,
- N : tamaño de la población,
- n : tamaño de la muestra.

Luego se genera un número aleatorio entre 1 y r , éste constituye el primer elemento de la muestra al que llamaremos “a”. A continuación se selecciona el elemento que se encuentra r unidades más adelante en la lista (el elemento que ocupa el lugar $a+r$) y así sucesivamente hasta recorrer la lista completa, lo cual ocurrirá cuando se haya alcanzado al enésimo y último elemento de la muestra. El gráfico siguiente ilustra este procedimiento, las flechas a la derecha señalan los primeros elementos que constituyen la muestra; el procedimiento prosigue de idéntica manera hasta la última unidad de la muestra.

Esquema 2: Ilustración del procedimiento de muestreo sistemático



Esta técnica tiene, en principio, los mismos requerimientos que el muestreo irrestricto aleatorio, en cuanto a la necesidad de disponer del marco de la muestra, pero puede adaptarse cuando no se cuenta con la lista.

Su uso se justifica por dos razones. La primera es que si la lista no presenta ninguna tendencia especial, el muestreo sistemático facilita la extracción de la

muestra, simplifica la operación, ya que la elección de todos los números aleatoriamente puede ser lenta por la aparición de elementos repetidos que deben descartarse. La segunda razón es que puede ocurrir que el listado este ordenado según algún criterio (por fechas, o por edades de los individuos, etc.), de ser así, existe el riesgo que una muestra irrestricta aleatoria concentre los elementos elegidos en alguna "zona" de la lista, sobre-representando de esta manera a los individuos que tienen alguna característica en común. En este caso el muestreo sistemático asegura que el marco de la muestra sea recorrido completamente a intervalos iguales.

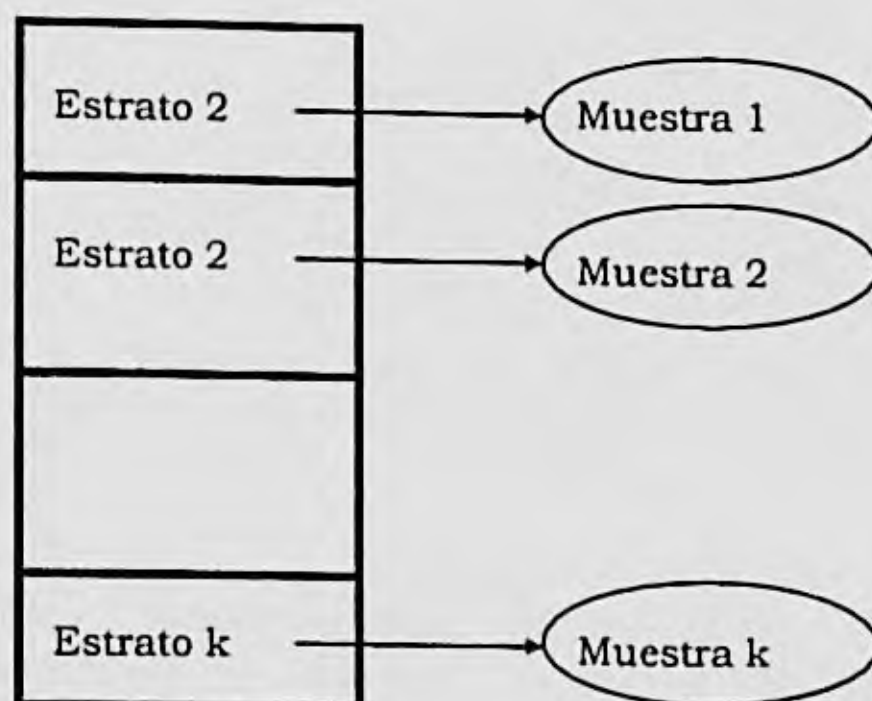
Por otra parte, existen situaciones en que el muestreo sistemático es desaconsejado: diremos que la población presenta un comportamiento cíclico si cierta característica se repite regularmente cada cierta cantidad fija de casos. Un ejemplo de esto es una muestra a lo largo del tiempo, en que algunos "momentos", tales como inicios o finales de mes, determinados días de la semana, etc., se repiten periódicamente en el año. Sea que tratamos de estimar los ingresos a un hospital y elegimos, de manera sistemática, los días que constituirán la muestra. Si el valor de r fuera 7 ó un múltiplo de él, la muestra contendría siempre al mismo día de la semana y sería un sesgo grave, porque los ingresos al hospital pueden ser muy diferentes en los diferentes días de la semana. Aun cuando el ejemplo va más allá de lo realista, su utilidad está en alertar contra el uso de procedimientos sistemáticos cuando se sospecha de la existencia de una tendencia cíclica en el listado con que se cuenta.

Por último, hay casos en que el muestreo sistemático se usa para prescindir del marco de la muestra. Es cuando se seleccionan casos a partir de poblaciones en movimiento: la cola para entrar al cine es un caso. Otro caso frecuente son las encuestas "boca de urna" en las que se pregunta por quién votó a personas que salen del lugar de votación. Allí no hay listado al que recurrir, es a la gente que está físicamente presente que debemos encuestar. El recurso consiste en elegir a una persona cada r , buscando que la muestra incluya a personas que llegaron temprano y que llegaron tarde, que votaron a la mañana y a la tarde, es decir que recorramos la "fila" alcanzando a quienes están en los primeros lugares y también a quienes están al final.

Muestreo estratificado

El procedimiento consiste en extraer muestras de subconjuntos de la población llamados estratos. Se espera que tales estratos sean homogéneos en su interior con respecto a alguna característica conocida a priori. Dicha característica se denomina criterio de estratificación.

Esquema 3: En el muestreo estratificado se eligen muestras diferentes de cada uno de los subconjuntos definidos en la población.



Un ejemplo puede aclarar esta idea: supongamos que se requiere estimar el consumo de bebidas alcohólicas de los jóvenes. Como se supone que esa variable está influida por el nivel socioeconómico, puede utilizarse este último como criterio para estratificar a la población, dividiéndola en subconjuntos en los que el nivel socioeconómico sea homogéneo. La cantidad de estratos que puedan definirse de esta manera dependerá del grado de precisión con que pueda medirse el nivel socioeconómico. Si estratificamos con categorías nivel socioeconómico alto, medio y bajo, entonces será $k=3$ y seleccionaremos jóvenes de cada uno de los tres estratos.

Es de destacar que la división de la población en estratos demanda cierta información acerca de ella (en este ejemplo el nivel socioeconómico). Cuanta más precisión se pretenda lograr con la estratificación, tanto mayor será la información necesaria a priori.

A veces los estratos están dados de manera más inmediata, como sucede con los alumnos de una carrera universitaria. Si se busca una muestra que represente a los estudiantes de la carrera, es conveniente estratificar por año de cursado, de modo de incluir en ella alumnos de todos los años.

Este procedimiento de muestreo se utiliza cuando se busca aumentar la precisión de la estimación sobre la población total o bien para mejorar la precisión sobre los estratos individuales. Se obtendrá tanto mayor ganancia en la estimación cuanto más homogéneos sean los estratos en su interior y más diferentes (heterogéneos) sean entre ellos. Veremos en detalle las razones de esto cuando presentemos el error en la estimación por intervalo.

a. Muestreo estratificado con afijación igual o uniforme

Se llama afijación a la modalidad que se utilice para distribuir la muestra sobre los estratos definidos. Según la información con que se cuente a priori, se podrán utilizar diferentes formas de afijar, la primera que tratamos es la afijación igual o uniforme.

Esta se aplica cuando no existe información alguna acerca de los estratos y no hay razón para ponderar especialmente alguno de ellos. El procedimiento es simplemente extraer la misma cantidad de casos de cada estrato. Las muestras tienen así el mismo tamaño que resulta:

$$n_i = \frac{n}{k}$$

Donde:

n_i es el tamaño de las muestras extraídas de cada estrato

n es el tamaño de la muestra total.

k representa el número de estratos en que fue dividida la población.

En el ejemplo sobre el consumo de bebidas alcohólicas, si se trata de una muestra de 600 jóvenes, con este tipo de afijación, y como son tres estratos, extraeremos 200 casos de cada estrato.

b. Muestreo estratificado con afijación proporcional

Consiste en extraer de cada estrato una muestra cuyo tamaño resulte proporcional al estrato del que proviene. Para ello, primero calculamos f que es la proporción de población que integra la muestra:

$$f = \frac{n}{N}$$

Este cociente se llama **fracción de muestreo**, en su cálculo:

n es el tamaño de la muestra total.

N representa el tamaño de la población.

Una vez que conocemos la fracción de muestreo, la aplicamos a cada uno de los estratos para obtener la cantidad de casos que deben extraerse de cada uno:

$$n_i = f * N_i$$

Donde:

N_i : es la cantidad de casos en el estrato i -ésimo (en la población)

n_i : es la cantidad de casos que se extraerán del estrato i -ésimo

f : es la fracción de muestreo que calculamos antes.

Para usar este tipo de afijación en el ejemplo del consumo de bebidas alcohólicas necesitaríamos conocer la cantidad de jóvenes que hay en cada estrato, es decir cuántos jóvenes de nivel socioeconómico alto, medio y bajo hay en la población. Este dato usualmente es desconocido.

Veamos un ejemplo con datos reales: en el año 2008 en Psicología, la siguiente era la distribución de alumnos según el año en que habían ingresado a la carrera (considerando solo a los ingresados a partir del año 2000).

Año de ingreso a la carrera	Cantidad de alumnos
2008	1.357
2007	1.113
2006	1.001
2005	807
2004	859
2003	764
2002	700
2001	483
2000	399
total	7.483

Fuente: Anuario estadístico 2008, UNC

Si queremos una muestra de 200 alumnos de esa población, la fracción de muestreo será: $f = \frac{200}{7483} = 0,027$ que redondeamos a 0,03. Aplicaremos esta fracción a cada estrato, es decir multiplicamos por esa fracción a la cantidad de casos que hay en cada estrato y redondeamos al entero más próximo.

Año de ingreso a la carrera	Cantidad de alumnos	Casos a seleccionar
2008	1.357	41
2007	1.113	33
2006	1.001	30
2005	807	24
2004	859	26
2003	764	23
2002	700	21
2001	483	14
2000	399	12
total	7.483	

Entonces, para la muestra debemos elegir 41 alumnos que hayan ingresado en 2008, luego 33 del 2007 y así sucesivamente. A esa selección la hacemos aleatoria, ya que es posible contar con el marco de la muestra que es el registro de alumnos que tiene la facultad.

Existen otras formas de afijación, más complejas, que tienen en cuenta más información acerca de la población. Por ejemplo, la afijación óptima tiene en cuenta la heterogeneidad de cada estrato para elegir la cantidad de casos que se extraen de cada uno. Ya que cuando los elementos son muy homogéneos, bastan unos pocos casos para tener una imagen adecuada del conjunto completo, por el contrario, cuanto más dispares (heterogéneos) sean los elementos de la población, tantas más observaciones serán necesarias para hacer estimaciones de buena calidad. Este es el criterio que se usa en el procedimiento llamado afijación óptima. Si se dispone de suficiente información, es posible incluir el costo de acceso a los casos pertenecientes a diferentes estratos y realizar una afijación que minimice el costo global del muestreo, para más detalles sugerimos Scheaffer et al (1987).

Solo nos ocuparemos de las dos formas de afijación que hemos mencionado: igual y proporcional.

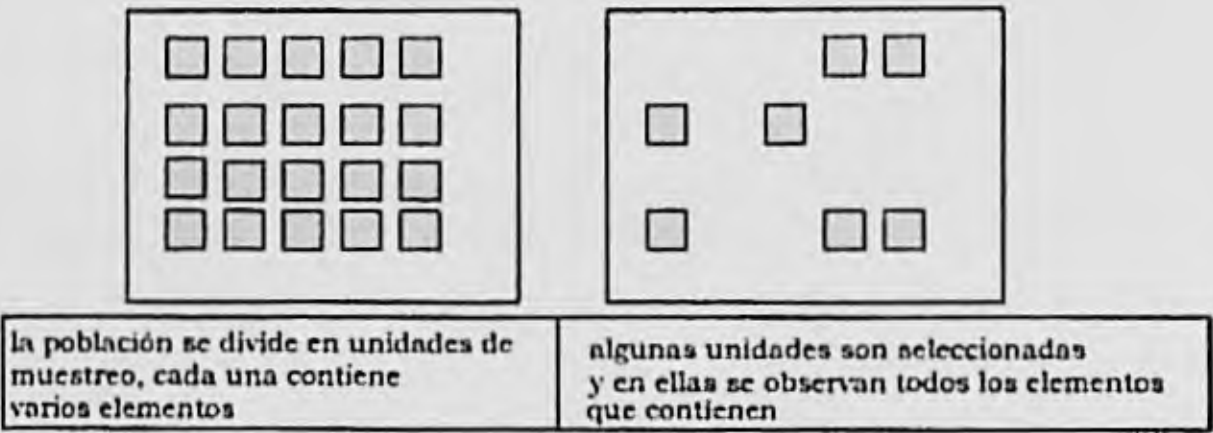
- Dos puntos que deben recordarse para decidir el uso del muestreo estratificado:
- Cada criterio de estratificación demanda información acerca de la población. Esa información debe provenir de un conocimiento anterior al muestreo.
 - El muestreo estratificado implica un aumento de la calidad de la estimación bajo la condición que los elementos que están en un mismo estrato sean homogéneos entre si y que los estratos sean diferentes unos de otros (heterogéneos entre si).

Muestreo por conglomerados

Se denomina conglomerado a una unidad de muestreo que está constituida, en su interior, por varios elementos de la población. Para un diseño por conglomerado deben definirse unidades primarias de muestreo que contengan en su interior a las unidades elementales.

Un ejemplo clásico de este tipo de muestreo lo constituye el caso en que se requiere extraer una muestra de hogares en una ciudad. Se trata de una situación en la que resulta imposible contar con un listado de las unidades primarias (los hogares). Un muestreo por conglomerados permite resolver este problema tomando como unidad de selección a las manzanas urbanas. Numerando estas unidades sobre un plano de la ciudad (o del área que se pretenda relevar) se selecciona aleatoriamente un número *n* de ellas. Una vez identificadas las unidades primarias que constituirán la muestra (las manzanas) se relevan todos los hogares (unidades elementales) que residen en cada una de ellas.

Esquema 4: Principio del muestreo por conglomerados



Otro ejemplo es aquel en el que necesitamos una muestra de 100 alumnos de primer grado de la provincia de Córdoba. Tenemos dos problemas: el primero es que no hay una lista de ellos, no contamos con un marco muestral. El segundo es que, aunque la tuviéramos, tendríamos que ir a buscar a cada uno de los 100 alumnos muestreados a su ciudad, dentro de la provincia, lo que tendría un costo enorme. En este caso, el conglomerado (o unidad primaria) que se elige es la escuela: en lugar de elegir 100 alumnos al azar, elegimos 10 escuelas al azar del listado de ellas, que sí existe. Luego, en cada escuela elegimos 10 alumnos, también al azar, a partir del listado de alumnos de primer grado, que sí está disponible en cada escuela.

Los requisitos para la efectividad de este tipo de muestreo pueden ser resumidos como sigue:

- Las unidades primarias de muestreo deben ser homogéneas entre sí, de tal manera que cada unidad sea intercambiable con otra.
- Cada unidad primaria debe contener, en su interior, la heterogeneidad propia de la población que se releva.

Volviendo al ejemplo anterior en que las unidades primarias son las manzanas, se espera que cada manzana sea similar a las vecinas en cuanto a su composición (dentro de un área geográfica dada, se trata de un supuesto válido). Además, cada manzana dispondrá, en su interior, de la variedad que sea propia del área en cuestión (en términos de su composición: número de hogares particulares, comercios, escuelas, etc.).

Además del ejemplo de las manzanas, otros conglomerados utilizados son: establecimientos educativos, instituciones de cualquier tipo, etc. En general, todo conjunto que contenga en su interior a las unidades elementales puede elegirse como conglomerado.

Uso combinado de técnicas de muestreo

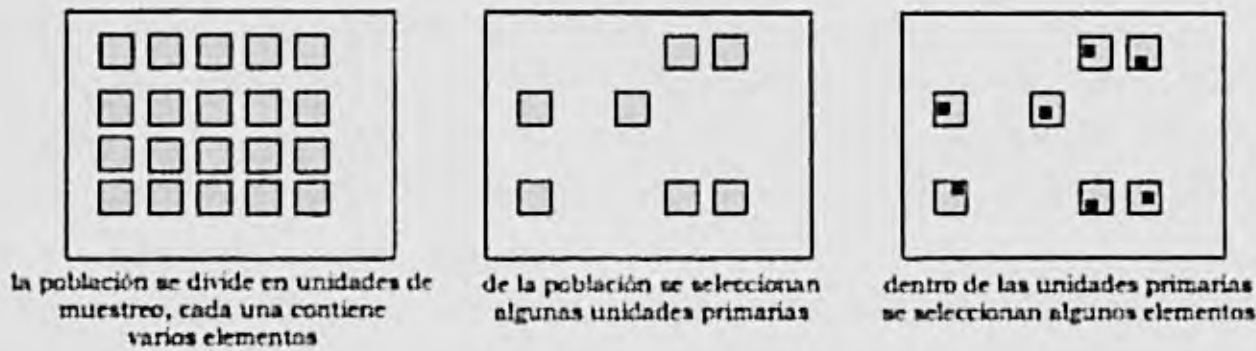
Las modalidades de muestreo presentadas pueden combinarse de varias formas para resolver problemas particulares.

En el muestreo por conglomerados puede usarse una segunda etapa posterior a la selección de las unidades primarias consistente en la incorporación en la muestra sólo de algunas de las unidades elementales contenidas en ellas. Tal elección puede realizarse por un diseño aleatorio irrestricto o sistemático.

Aplicando este concepto al ejemplo anterior, la situación consistirá en la elección de algunos hogares dentro de las manzanas seleccionadas (en lugar de relevarlos a todos). Para lograr esta muestra, se instruye a los encuestadores para que, comenzando por una esquina dada, entrevisten a un hogar cada una cantidad dada (uno cada diez por ejemplo para contar con una muestra del 10% de los hogares de la manzana).

O bien, en el ejemplo de los alumnos de primer grado, se trataría de seleccionar a 10 de ellos en cada escuela de manera aleatoria.

Esquema 5: Muestreo por conglomerados en dos etapas



La obtención de una muestra en una situación real implica la combinación de varios de estos procedimientos. Por ejemplo, para un sondeo de opinión sobre la población adulta de una ciudad, el primer paso es estratificar a la población (los adultos residentes en la ciudad), según nivel socioeconómico, porque esta es una variable que suele hacer diferencias marcadas en opinión política o en pautas de consumo. Un dato que puede tenerse sobre el nivel socioeconómico de los habitantes, es el provisto por el censo de población, que incluye preguntas que permiten hacer una caracterización de los hogares según esta variable. Sin embargo, el censo se hace cada diez años y se vuelve desactualizada al poco tiempo. Por eso suele usarse, como aproximación al nivel socioeconómico, el área de residencia. Si bien no es absoluta, la división puede aproximarse con barrios habitados mayoritariamente por hogares con nivel socioeconómico más alto y más bajo. Así, en un primer momento es posible dividir la ciudad en estratos, determinados por grandes áreas que aproximan el nivel socioeconómico. Como es posible conocer la cantidad de población que vive en cada una de esas áreas, el muestreo estratificado se puede hacer con estratificación proporcional.

En la etapa siguiente, en lugar de seleccionar a las personas que responderán a la encuesta, seleccionamos las manzanas. Las enumeramos dentro de cada estrato y hacemos una selección aleatoria de la cantidad de ellas que sea necesaria para

nuestro tamaño de muestra. Una vez seleccionadas las manzanas, a cada encuestador se le indica que recorra la que le tocó en un sentido establecido de antemano y que llame a la puerta en un domicilio cada 10, por ejemplo. En cada domicilio seleccionado se debe preguntar por las personas adultas que viven allí y se debe seleccionar aleatoriamente a una de ellas, quien será finalmente la que responda a nuestro cuestionario.

A este esquema general deben agregarse precisiones para casos particulares, como el rechazo a responder o la falta de gente en el domicilio seleccionado. Lo usual es volver dos veces luego de un rechazo y si se fracasa las dos veces, entonces ese domicilio se reemplaza por otro, según una regla establecida de antemano. También hay que aclarar desde el principio qué hacer en los casos de edificios, barrios cerrados, etc.

Para los sondeos de opinión, en una ciudad mediana, se estila usar 400 casos en 20 conglomerados de 20 casos cada uno.

Como se ve, lo que se busca es dejar el menor margen posible para improvisar, para evitar que la selección sea voluntaria. Esto se hace para asegurar que la muestra sea aleatoria y por tanto probabilística.

Si se busca una muestra de pacientes internados en centros de salud de una determinada región, se empezará por el listado de esos centros, a los cuales es posible estratificar según su dependencia pública o privada, según su tamaño, o según otra característica de interés. Una vez establecida la estratificación, se seleccionan al azar una cierta cantidad de centros de salud de cada estrato y, en cada centro será necesario contar con el registro de pacientes internados, aquí se introducirán las restricciones propias de cada investigación, el periodo durante el cual nos interesan los datos, las patologías que fueron motivo de la internación, etc. La selección de casos (historias clínicas de los pacientes internados) puede realizarse de manera irrestricta aleatoria si se dispone del listado.

Muestreos no probabilísticos

Los procedimientos que pretenden estimar valores de la población a partir de resultados muestrales sólo pueden aplicarse cuando es posible asignar probabilidades a priori a los individuos de ser parte de la muestra. Aun cuando no cumplen con este requisito, las técnicas de muestreo no probabilísticas se utilizan en situaciones en que se pretende adquirir un conocimiento inicial de un problema que se encuentra escasamente delimitado, como sucede en los estudios de tipo exploratorio. También es frecuente su uso cuando no se pretende un conocimiento acabado sobre la población completa sino que el objetivo es profundizar sobre algunos casos en particular (estudios de casos) a través de entrevistas en profundidad que reconstruyan la historia de vida de algunas personas solamente. Un tercer uso es el de aproximar los resultados que se obtendrían con muestras probabilísticas. Como señalamos antes, deben tenerse recaudos con la generalidad de las conclusiones provenientes de este tipo de muestreo.

Una clasificación útil para este tipo de muestreo toma en consideración su definición, esto es que la elección no depende del azar sino de la voluntad de alguien. De esta manera los muestreos no probabilísticos pueden clasificarse según quien sea el responsable de la elección en: muestreo por cuotas, de juicio o intencional, autoelegido y accidental. Una combinación de estos procedimientos es el muestro por bola de nieve.

Muestreo por cuotas

En este muestreo se busca reproducir de la manera lo más ajustada posible las características de la población en la muestra. Se llama cuotas a las fracciones de la muestra con las distintas características. Este muestreo se usa cuando se conocen algunas características de la población y se busca reproducirlas en la muestra. Por ejemplo, si la muestra contiene una proporción de varones y mujeres igual a la que hay en la población y además respeta las proporciones de diferentes grupos de edad, decimos que usamos cuotas de sexo y edad. A estos criterios suele agregarse otros, según los objetivos de la investigación, por ejemplo, en las encuestas políticas, es frecuente establecer cuotas de acuerdo al voto en las elecciones pasadas. Los ejemplos que indicamos antes, como reproducir la proporción de varones y mujeres entre los docentes primarios, o de las diferentes proporciones de niveles educativos de la población en la muestra, son casos de muestreo por cuotas.

En la práctica, se encarga a los encuestadores una cantidad especificada de casos a relevar, sin indicar quiénes serán esos casos ni cómo hallarlos, esto le da el carácter de no probabilístico, pero respetando las cantidades de casos en cada cuota. El entrevistador elige a “cualquiera”, según su comodidad o preferencias, es decir que no es posible conocer a priori qué probabilidad tienen los elementos de la población de caer en la muestra, pero esa elección está limitada por la exigencia que los elementos reúnan ciertas características.

Un ejemplo es en el que se indica a un encuestador que complete 10 entrevistas a médicos que trabajen en relación de dependencia en la ciudad de Córdoba que tengan hasta diez años de egresados; a otro, que entreviste a 15 médicos también en relación de dependencia, pero que tengan más de diez años de egresados. Si bien en este caso los entrevistadores pueden elegir según su preferencia cuáles serán los médicos a los que entrevistará, sus posibilidades de elección están restringidas a cumplir la cuota asignada.

En las encuestas políticas, el encuestador puede verse limitado a elegir personas de sexo femenino, de 30 a 45 años, que en las elecciones pasadas hayan votado por el partido X (mientras que a otros encuestadores se les encargarán otras cuotas). No hay azar, porque el encuestador elegirá a quienes prefiera o tenga más a su alcance, pero deberá respetar las cantidades que le fueron indicadas.

Atención: una muestra construida por cuotas, es evidentemente representativa de los criterios correspondientes de las cuotas con los que fue elaborada (sexo, edad, ocupación, región...). Pero no hay ningún medio para saber si es representativa de aquello para lo cual fue construida, es decir, el tema de la investigación: la opinión, los rendimientos académicos, las actitudes, etc.

Muestreo de juicio o intencional

En este tipo de muestreo, conocido también como “selección experta”, es el investigador quien decide qué elementos son los más adecuados para realizar la investigación. La elección se basa en la apreciación subjetiva del investigador sobre la representatividad de los elementos que muestrea. En algunos ámbitos de la investigación, suele solicitarse a expertos que seleccionen los elementos de la población que consideren más adecuados para construir la muestra, esta selección se apoya en la experiencia de los consultados.

Un primer uso de este tipo de muestreo es aquel en el que el interés no se centra en la representatividad sino en la riqueza de contenidos que pueden ofrecer algunos individuos a diferencia de otros.

Si se pretende reconstruir la historia de un asentamiento urbano marginal, sería más adecuado elegir a personas que hayan residido en él por largo tiempo. Se espera que los pobladores más antiguos puedan dar mayor información acerca de la génesis y evolución que los que han arribado recientemente. En este caso, el investigador se preocupará primero por identificar a los residentes en el asentamiento y, a partir de ese conocimiento, decidirá a quiénes va a incluir en la muestra.

Aquí no se pretende la generalización de los resultados, ni se busca encontrar una historia típica en el sentido de que, en mayor o menor grado, la mayoría de los pobladores la comparta. Lo que se busca es profundizar el análisis a partir del testimonio de aquellos a los que consideramos como informantes más idóneos.

Muestreo autoelegido

Usado principalmente en razón de la reducción de costos que implica, cuando se usa este tipo de muestreo no se selecciona a los sujetos del estudio, sino que se solicita a las personas que participen voluntariamente. La decisión de formar parte o no de la muestra queda en manos de la persona invitada, por eso se llama autoelegido, es ella quien optará por participar o no hacerlo (por falta de interés, de tiempo, etc.).

Supongamos que se pretende estudiar el gasto por familia en actividades de recreación y para reducir costos, en lugar de enviar encuestadores, se envían por correo formularios anónimos a los domicilios de los hogares seleccionados aleatoriamente. Podría suceder que aquellos hogares que tienen gastos en recreación muy bajos contesten en proporción menor que los que más gastan. De esta manera, las respuestas resultantes darían un valor promedio por encima del verdadero por el hecho que, inadvertidamente, la muestra estaría representando en mayor medida a los hogares que tienen los más altos gastos en recreación.

En el estudio acerca del comportamiento sexual de las mujeres en Estados Unidos, el Informe Hite (1976) basó sus conclusiones sobre el 3% de mujeres que remitieron completos los cuestionarios que habían recibido por correo. Aun cuando el número de cuestionarios respondidos sea alto (gracias a una numerosa muestra inicial), resulta riesgoso extender las conclusiones a la población en general. Es así porque no se sabe si ese pequeño porcentaje de mujeres que respondieron tiene conductas semejantes o muy diferentes de aquellas que no lo hicieron.

En la actualidad ya no se envían formularios por correo postal para que la gente responda, pero sí se hacen encuestas por mail o se invita a expresar la opinión en encuestas en sitios web. A esas encuestas responde una fracción muy específica de la población: la que accede a internet, que visita esa página, que tiene tiempo e interés por responder a las preguntas que allí se hacen. No es posible saber qué recorte de la población es representado por esa muestra y es completamente inválido extender los resultados a toda la población, como lo es generalizar a los visitantes de esa página, ya que no todos tienen el tiempo ni el interés para responder. Se trata de un dato imposible de adjudicar a alguna población identificable, es simplemente "la opinión de los que opinaron". Sin embargo a

veces se tratan equivocadamente esos resultados como si representaran una tendencia de opinión.

El muestreo autoelegido tiene una aplicación en el campo de la Psicología experimental cuando se trabaja con sujetos humanos. Allí, la selección de quienes participarán de los experimentos, muy raramente puede hacerse al azar, habitualmente resulta de la voluntad de personas que se prestan para los estudios. Sin embargo, es un requisito indispensable en los experimentos que se asignen las personas de manera aleatoria a los grupos experimental y control. Es decir, que se elija aleatoriamente a cuáles de las personas voluntarias se someterá a los tratamientos que se ponen a prueba y a cuáles se tomará como controles. También es frecuente usar cuotas en la asignación de sujetos a los dos grupos de modo que estén equilibrados respecto de algunas variables, cuya determinación depende del estudio particular. En este caso las cuotas indican qué proporción de casos se requieren en cada categoría de las variables de interés, la selección de los sujetos que constituirán el grupo experimental y el grupo control se hace aleatoriamente. Este tema se desarrolla con detalle en Metodología de la Investigación.

Muestreo accidental o según disponibilidad

Esta modalidad cuenta con sustancial difusión, en particular por los medios de comunicación, y consiste en entrevistar a los individuos que se encuentran accidentalmente en determinado lugar. La expresión “accidental” se presta a equívocos ya que puede confundirse con “aleatorio”. Si bien no resulta posible identificar a quien toma la decisión por la selección de la muestra, nos encontramos en una situación en que múltiples factores son los responsables de la misma. Algunos de estos factores son: la voluntad de los encuestados para prestarse o no a participar de la entrevista, la elección (consciente o no) que el entrevistador hace entre las personas que transitan, el lugar donde se hace la entrevista (ciertas personas difícilmente transitan por determinadas áreas de una ciudad), etc.

El hecho que se trate de la confluencia de múltiples factores fortuitos, lo que determina cuáles serán las personas que formarán parte de la muestra y quienes no, no puede considerarse sinónimo de aleatoriedad. Por lo tanto, no se trata de un muestreo probabilístico dado que no es posible asignar probabilidades a priori de pertenecer a la muestra a los elementos de la población.

En consecuencia, las conclusiones obtenidas a través de este tipo de relevamiento (porcentaje de opiniones a favor o en contra de un tema cualquiera, etc.) sólo pueden ser válidas para aquellas personas que fueron parte integrante de la muestra, no pudiendo generalizarse los resultados más allá de la misma.

Por el contrario cuando se lo utiliza en ámbitos académicos, suelen tomarse los resguardos mencionados antes para conseguir que sea tan representativo como sea posible. Para hacer esto se consideran en primer lugar las características conocidas de la población y se las reproduce en la muestra por ejemplo la proporción de varones y mujeres, los niveles de educación, como en el caso del muestreo por cuotas. Luego se busca la mayor heterogeneidad posible y un número elevado de casos. Con estos cuidados, este tipo de muestreo puede usarse, por ejemplo para la validación de escalas psicométricas.

Muestreo bola de nieve

Esta técnica fue publicada por primera vez por Leo Goodman (1961), de la Universidad de Chicago. Es adecuada cuando se debe estudiar una población infrecuente, poco representada en el total general y no hay un marco disponible para el muestreo. Estas situaciones se presentan, por ejemplo, si se requiere entrevistar a consumidores de drogas ilegales, personas afectadas por alguna enfermedad rara, trabajadores inmigrantes.

Comienza con la selección de una muestra inicial o básica de individuos y en cada entrevista se pregunta a qué otras personas de la población el entrevistado conoce. Luego se visita a esos casos referenciados por los primeros, repitiendo el procedimiento hasta que se completa la muestra. Así, al entrevistar a cada miembro de un grupo, se puede pedir que indique otros individuos en ese grupo que podrían dar información sobre el tema; o pedirle que mencione personas que compartan sus puntos de vista y a otras de opinión opuesta. De este modo se entrevistan nuevos individuos y se continúa del mismo modo hasta que no se encuentran nuevos puntos de vista. Cuando se llega a ese punto, se dice que se ha saturado el tema. Este es un buen método para recoger los distintos puntos de vista existentes en un grupo, o para alcanzar a persona que no son visibles en una comunidad, pero no ofrece información sobre la distribución de los casos en la población.

Si es posible, la primera selección se hace en forma probabilística, y los casos siguientes quedan determinados por las referencias que se van encontrando. Lo más frecuente es que se carezca de datos iniciales, por lo que la primera muestra deberá seleccionarse en forma intencional o estar constituida por voluntarios. En cualquier caso se trata de un muestreo no probabilístico, cuya ventaja es que puede asegurar una amplia cobertura, porque permite llegar a través de contactos personales, a individuos que de otro modo permanecerían invisibles. El carácter no representativo viene dado porque la probabilidad de entrevistar a una determinada persona depende de sus conexiones: aquellas muy conectadas tendrán más probabilidad de ser entrevistadas que las que estén aisladas, o tengan pocos conocidos.

Este método puede mejorarse para lograr que la muestra sea representativa de la población. Para eso se lo combina con un modelo matemático que da peso diferente a los casos teniendo en cuenta que han sido seleccionados de manera no aleatoria. La técnica que así resulta se llama "Muestreo Dirigido por el Respondente" y fue desarrollado por Douglas Heckathorn en 1997, como parte de un proyecto de investigación sobre prevención de VIH dirigido a consumidores de drogas inyectables en varias ciudades de Connecticut. Aplicando este procedimiento se logran muestras no sesgadas (representativas) aun cuando se haya partido, como generalmente sucede, con una muestra no probabilística. Para detalles sobre el modo de usarlo, puede consultarse <http://www.respondentdrivensampling.org/>, donde se encuentran abundantes ejemplos de aplicación.

Resumen de técnicas de muestreo

Probabilísticos	Irrestricto aleatorio o Aleatorio simple Sistemático	
-Selección aleatoria		Con afijación igual o uniforme
-Permiten conocer el error en la generalización de los resultados	Estratificado	Con afijación proporcional
	Por conglomerados o racimos	En una etapa En dos o más etapas

No probabilísticos	Por cuotas De juicio o intencional Autoelegido
-Selección voluntaria	
-Según el tipo, permiten generalizar aproximadamente los resultados	Accidental o por disponibilidad
-No se conoce el error de estimación	

Capítulo 7 Probabilidad: los fundamentos

El rol de la probabilidad en Estadística

Para hacer inferencias se requiere de la probabilidad porque se trabaja con situaciones inciertas, que no se conocen y que son difíciles de prever. Por eso se comienza aquí haciendo la distinción entre las preguntas que pueden responderse con certeza y las que no. De las primeras, son ejemplos: ¿cuándo será el próximo eclipse de sol? ¿Cómo cambia la conducta de una persona si consume una sustancia alucinógena? Sobre estas preguntas tenemos, o bien un conocimiento profundo sobre el movimiento de los astros, o bien una gran cantidad de observaciones, que nos permiten dar una respuesta certera.

Por el contrario, si preguntamos ¿cuál es el efecto sobre la personalidad, de haber tenido figuras parentales autoritarias en la niñez? ¿Qué determina que algunos alumnos tengan éxito en la escuela y otros no? ¿Cómo afecta la estabilidad económica a la intención de voto?, solo podemos ofrecer respuestas parciales, tentativas, aproximadas. Se trata de hechos que dependen de muchos factores a los que no conocemos en su totalidad, por lo que el resultado es variable: algunas personas criadas en ambientes autoritarios desarrollan una personalidad autoritaria, otras no. En algunos alumnos, el hecho que sus padres tengan estudios elevados los ayuda a tener éxito en la escuela, pero también hay hijos de personas muy educadas que fracasan en la escuela. La estabilidad económica que favorecería una reelección, puede estar acompañada de mucha pobreza, o de corrupción; también eventos inesperados antes de las elecciones pueden cambiar decisiones a último momento. Hay razones más allá de nuestro alcance que inciden en la personalidad o en el resultado de la escuela, o la intención de voto. En estas situaciones, cuando no tenemos toda la información que hace falta para predecir el resultado, recurriremos a la probabilidad.

Ingresaremos al tema desde situaciones muy sencillas, desde el muy usado ejemplo de arrojar una moneda. Pero detengámonos un momento en él: si tuviéramos toda la información necesaria para predecir la trayectoria de la moneda en el aire (distancia desde donde se arroja, fuerza que se le aplica, el lugar de la moneda donde se aplica esa fuerza, eventuales corrientes de aire que puedan incidir en el desplazamiento de la moneda, etc.), podríamos predecir con certeza el resultado. Esa información no está disponible, el lado del que caiga la moneda está determinado por una multiplicidad de factores, por esa razón no podemos anticipar el resultado de la tirada. A esa ignorancia la resumimos diciendo que el resultado de la tirada de la moneda “depende del azar” y llamamos al experimento de tirar una moneda “experimento aleatorio”.

Es un paso muy largo ir desde este ejemplo a decir que el modo en que se desarrolle la personalidad de alguien que ha sido criado en una familia autoritaria depende del azar. Sabemos que no depende del azar, depende de muchos factores que ignoramos, por eso usaremos probabilidades en nuestra disciplina. Podremos decir que un alumno cuyos padres valoran la educación tiene una probabilidad mayor de tener éxito en la escuela, pero no podremos asegurar que lo tendrá. Es razonable creer que si un gobierno logró estabilidad económica, tendrá más posibilidades de ser reelegido, pero no hay certeza sobre que lo será. Los tratamientos más exitosos encuentran casos en los que no logran resultados, por lo que su efectividad no puede garantizarse completamente, hay una componente impredecible en la evolución de la patología.

La probabilidad trata con la incertidumbre, con lo que hay entre la certeza en que algo ocurrirá y la certeza en que no ocurrirá.

Los eventos que no son azarosos no tienen que ver con probabilidades: no asignamos probabilidad a un eclipse porque hay conocimiento suficiente como para saber cuándo ocurrirá; pero sí se asigna probabilidad a una tormenta, porque no se conocen simultáneamente todos los factores que la determinan. Se asignan probabilidades a hechos de cuya ocurrencia no se tiene certeza. Con la probabilidad se cuantifica (se le asigna un número) a la expectativa sobre el fenómeno. Intuitivamente, cuando decimos que algo tiene “mucho probabilidad de suceder” es porque estamos bastante seguros que sucederá. Esta es la posición conocida como “azar epistemológico”, que considera azarosos o aleatorios a los eventos cuya ocurrencia no puede anticiparse con certeza. Desde esta posición, que sea azaroso o no, depende el conocimiento que se tenga sobre los determinantes del evento.

La cuantificación de la probabilidad implica que ésta se expresa con un número que está comprendido entre cero y uno. Que un evento tenga probabilidad cero significa que es imposible que suceda. Si un evento tiene probabilidad igual a uno, se llama “evento seguro”, y quiere decir que hay certeza en que sucederá.

Formas para asignar probabilidades

Asignación *a priori*

Podemos partir de esa idea intuitiva de probabilidad, ligada a procesos cuya ocurrencia no nos es conocida con certeza. Para evocar esta idea, el ejemplo que más a menudo se cita es el del lanzamiento de una moneda, ¿cuál es la probabilidad de obtener “cara” al arrojar una moneda? Si la respuesta es $\frac{1}{2}$ (o 0,50 ó 50 y 50), debe tenerse en cuenta que eso solo será cierto si la moneda está equilibrada, es decir si tiene iguales chances de salir de un lado que del otro. Si esto es cierto, efectivamente la probabilidad de obtener cara es $\frac{1}{2}$ (ó 0,50). Con idéntica condición, la probabilidad de obtener un 5 al arrojar un dado es $\frac{1}{6}$ (ó 0,17). Esta asignación de probabilidad a los resultados de un experimento es previa a su realización, no es necesario tirar realmente la moneda: es suficiente con que tengamos razones para *suponer* que está equilibrada, para que afirmemos que la probabilidad de cara es $\frac{1}{2}$. Diremos en este caso que asignamos la probabilidad *a priori*, es decir, antes de hacer el experimento.

De mismo modo sucede si el evento que nos interesa en un poco más complejo. Por ejemplo: ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número mayor a cuatro si se tira un dado? Debido a que hay dos números mayores a cuatro (5 y 6), el evento tiene dos casos a su favor y hay seis resultados posibles, por lo que la probabilidad será: $\frac{2}{6}$ (ó $\frac{1}{3}$, si se simplifica la fracción).

La expresión formal de esta asignación de probabilidades es

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

En la que $\#A$ (que se lee “numeral de A”) indica el número de maneras en que puede suceder el evento A, y $\#\Omega$ (numeral de omega) es el número total de resultados que se pueden obtener al realizar el experimento. Ω es el conjunto de resultados posibles, es llamado *espacio muestral*. En el caso del ejemplo, el experimento es el de tirar el dado y buscar un número mayor que cuatro, $\#A$ es 2

porque son las formas en que puede obtenerse un número mayor que cuatro, y $\# \Omega$ es 6, que es el número total de resultados posibles al tirar un dado.

Con este mismo razonamiento, la probabilidad de obtener un número par es $3/6$ ($1/2$ después de simplificar), porque hay tres números pares (2, 4 y 6) en un dado.

Vamos a un caso más complejo: tiremos ahora dos dados y tomemos en cuenta la suma de los dos puntajes, a esa suma la llamaremos S . El mínimo número que puede resultar es dos (que ambos dados salgan uno) y el máximo es doce (ambos seis), entonces hay once resultados posibles de esta variable (que son: $S = 2, S = 3, S = 4, S = 5, S = 6, S = 7, S = 8, S = 9, S = 10, S = 11$ y $S = 12$), algunos de los cuales pueden suceder de varias formas. Estos resultados posibles y sus formas de obtención se ven de manera esquemática a continuación:

Esquema 1: Resultados posibles de la suma de los puntajes de dos dados

		Primer dado					
		1	2	3	4	5	6
Segundo dado	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

Si bien los resultados posibles son 11, las formas en que estos pueden darse son 36; cada una de esas formas es un evento. El evento primer dado 5 y segundo dado 2 es diferente del evento primer dado 2 y segundo dado 5, aunque ambos conducen al mismo resultado: $S=7$. Más precisamente, si indicamos los eventos con pares ordenados, los eventos (1,6); (6,1); (2,5); (5,2); (3,4); (4,3) son diferentes pero todos corresponden a $S=7$.

Son entonces 36 los resultados posibles del experimento, por lo que $\# \Omega = 36$. Ahora podemos calcular probabilidades para diferentes resultados.

¿Cuál es la probabilidad que la suma sea 12?, lo que puede expresarse como: ¿cuál es $P(S=12)$? Como esta suma solo puede lograrse si ambos dados salen 6, hay una sola manera en que se produzca el evento que nos interesa (suma doce), por lo que el $\#A$ es 1 y la probabilidad es entonces $1/36$.

$\#A = 1, P(S = 12)=1/36$

		Primer dado					
		1	2	3	4	5	6
Segundo dado	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

En cambio, si la pregunta es por la probabilidad de obtener un tres, hay más de una manera de llegar a ese resultado (que $S = 3$). La suma 3 puede resultar de $2+1$ ó de $1+2$, es decir que, o bien el primer dado sale 2 y el segundo 1 ó bien el

primero sale 1 y el segundo 2. Hay así dos formas posibles para el evento $S = 3$, y $\#A$ es 2, por lo que la probabilidad es $P(S = 3) = 2/36$.

$$\#A = 2, P(S = 3) = 2/36$$

		Primer dado					
		1	2	3	4	5	6
Segundo dado	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

Otro ejemplo, sea $P(S=7)$. La suma de siete puede obtenerse de muchas formas: $1+6$, $2+5$, $3+4$, $4+3$, $5+2$ ó $6+1$. Hay seis combinaciones que conducen a $S=7$, en consecuencia, la probabilidad es $6/36$.

$$\#A = 6, P(S = 7) = 6/36$$

		Primer dado					
		1	2	3	4	5	6
Segundo dado	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

Dos casos particulares

1. Jamás se obtendrá uno (1) al sumar los resultados de dos dados, por lo que el evento $S = 1$ es imposible y si preguntáramos por $P(S = 1)$, la respuesta es cero, como lo es también si pedimos $P(S > 12)$. De manera general, diremos que la probabilidad de un evento imposible es cero, decir que un evento tiene probabilidad igual a cero, equivale a decir que no puede suceder.

2. Inversamente, al tirar dos dados siempre se obtendrá un número menor que 13, por lo tanto, el evento $S < 13$ siempre sucede. Esto es así porque $S < 13$ incluye todos los resultados posibles, lo mismo sería si se pidiera que $S < 14$ o que $S < 75$, o también $S > 1$, cualesquiera de ellas coincide con Ω . Para indicar este tipo de evento, sobre el que hay certeza absoluta de su aparición, decimos que su probabilidad es uno. Así, $P(\Omega) = 1$. Decir que un evento tiene probabilidad uno equivale a decir que hay completa seguridad que va a suceder.

Asignación a posteriori

Consideremos ahora una situación más cercana a la experiencia: supongamos que de un curso se selecciona un alumno al azar ¿Cuál es la probabilidad que sea mujer? Aquí el supuesto de equilibrio no es válido a priori, en gran medida depende de la carrera de que se trata, las hay con muchas mujeres y con pocas. Por lo tanto no podemos suponer que es igualmente probable que resulte un varón o una mujer y no podemos asignar probabilidad $\frac{1}{2}$ a cada resultado. Aunque el experimento tenga dos resultados posibles, éstos no son igualmente probables.

En otro ejemplo, si al alumno aleatoriamente seleccionado se le pregunta por el tipo de colegio del que egresó, con los resultados posibles: “público”, “privado laico”, “privado religioso”, el resultado que se obtenga también depende del azar, porque así fue elegido el alumno, la respuesta será una u otra según cuál sea el alumno elegido y esto depende del azar. Sin embargo, no podemos asignar una probabilidad igual a cada resultado, no es lícito decir que sea $\frac{1}{3}$, ya que puede haber más estudiantes que provengan de colegios públicos que de privados y, en consecuencia, que sea más probable encontrar alumnos provenientes de esos colegios que de los otros. En este caso no podemos asignar de antemano probabilidades a los diferentes resultados, porque no tenemos suficientes razones para suponer *la forma en que se distribuyen* las probabilidades. Si supiéramos que hay el doble de alumnos que vienen de colegios públicos, podríamos decir que el alumno elegido al azar tiene el doble de probabilidad de provenir de un colegio público que de otro tipo.

Encontramos así una relación entre la frecuencia y la probabilidad: si conocemos la distribución de frecuencias, tenemos razones para usarlas para asignar probabilidades a los resultados del experimento. Así, si una muestra de alumnos ofrece la siguiente distribución de frecuencias para el tipo de colegio del que provienen.

Tabla 1: Distribución de frecuencias del tipo de colegio del que provienen alumnos que ingresan a la universidad

	f	f'
Público	200	0,66
Privado laico	20	0,07
Privado religioso	80	0,27
Total	300	1,00

Fuente: datos ficticios para ejemplificación

Estamos autorizados a decir que la probabilidad que el alumno elegido al azar provenga de un colegio público es 0,66, que es su frecuencia relativa. Esto será válido en la medida que el número de casos sea elevado; no es posible transformar una frecuencia relativa en probabilidad si tenemos muy pocas observaciones. Más adelante volveremos sobre esta importante limitación.

Cuando atribuimos probabilidades de este modo se trata de probabilidades *a posteriori*, es decir con posterioridad a haber hecho la experiencia, luego de la observación de los resultados reales obtenidos. También se llama a estas probabilidades *empíricas*, para destacar que provienen de la experiencia.

¿Cuál es el significado del 1,00 que corresponde al total? Sin dudas, como frecuencia significa el 100% de los casos, pero como probabilidad indica que el conjunto completo de alternativas (público, privado laico, privado religioso) tiene

probabilidad 1,00; o bien que es un *evento seguro*. La expresión coloquial para este valor es que cuando se selecciona un alumno al azar, éste debe provenir de alguno de los tres tipos de colegio indicados, entonces el valor uno responde a la pregunta “¿cuál es la probabilidad de encontrar un alumno que provenga de un colegio público, privado laico o privado religioso?”, la respuesta es que es seguro que de alguno de esos tipos de colegio provendrá el alumno, no hay otras alternativas, es decir que las categorías son exhaustivas, como debe ser. En este caso,

$$\Omega = \{\text{público, privado laico, privado religioso}\}$$

Como vimos más arriba, el evento seguro es el que tiene probabilidad 1, por lo que la expresión formal de este enunciado es:

$$P(\Omega) = 1$$

Donde Ω indica el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio, o el conjunto de todas las categorías de un variable, al que hemos llamado *espacio muestral*.

La relación entre asignación a priori y a posteriori

Volvamos al experimento simple de arrojar la moneda: si ésta se encuentra equilibrada será entonces correcto asignar probabilidad $\frac{1}{2}$ (ó 0,50) a cada lado, lo que indica que esperamos que *a la larga* la moneda caiga la mitad de las veces cara y la mitad cruz. Destaquemos la expresión “a la larga”, que quiere decir “si se arroja muchas veces”. Hagamos el experimento realmente, busque usted una moneda y arrójela, digamos 10 veces. Yo lo hice y obtuve la siguiente secuencia de resultados: CXXCCCCXC.

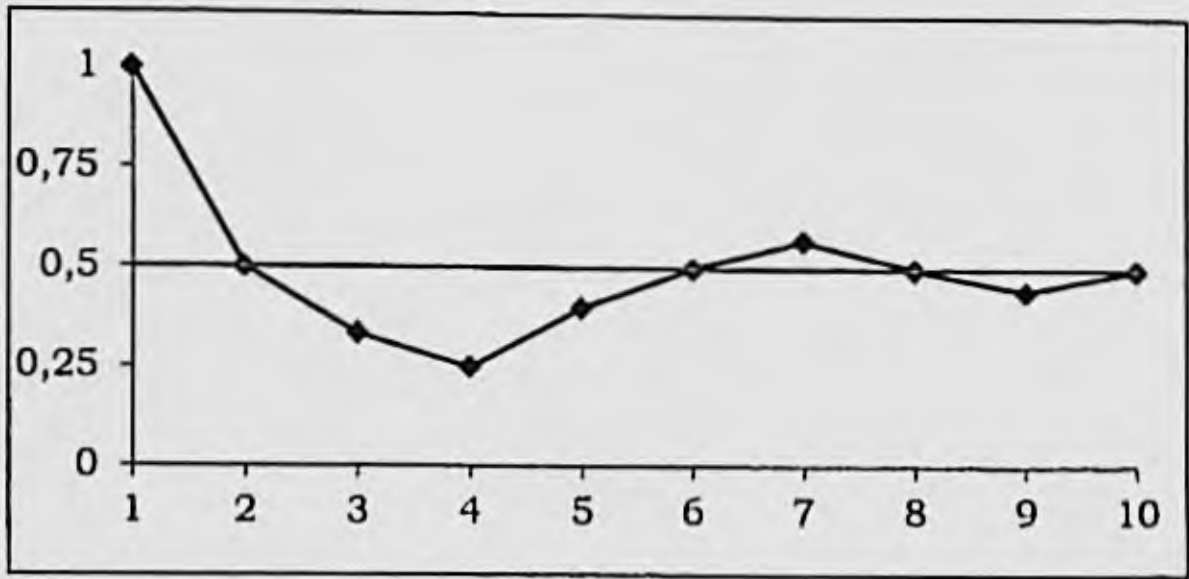
Elijamos nuestro lado favorito, que sea “cara” (C) y calculemos la frecuencia relativa de ese lado en cada tirada, presentamos los resultados resumidamente en la tabla 2. Cuando solo la he tirado una vez y como el primer resultado fue C, la frecuencia es 1 (una cara de un total de un resultado). A la segunda tirada, que es X, se obtiene $\frac{1}{2}$ (una cara de dos tiradas). A la tercera, que otra vez sale X, la frecuencia de cara es $\frac{1}{3}$ (una cara de tres tiradas) y así sigue:

Tabla 2: Frecuencias relativas correspondientes a una secuencia de diez lanzamientos de una moneda

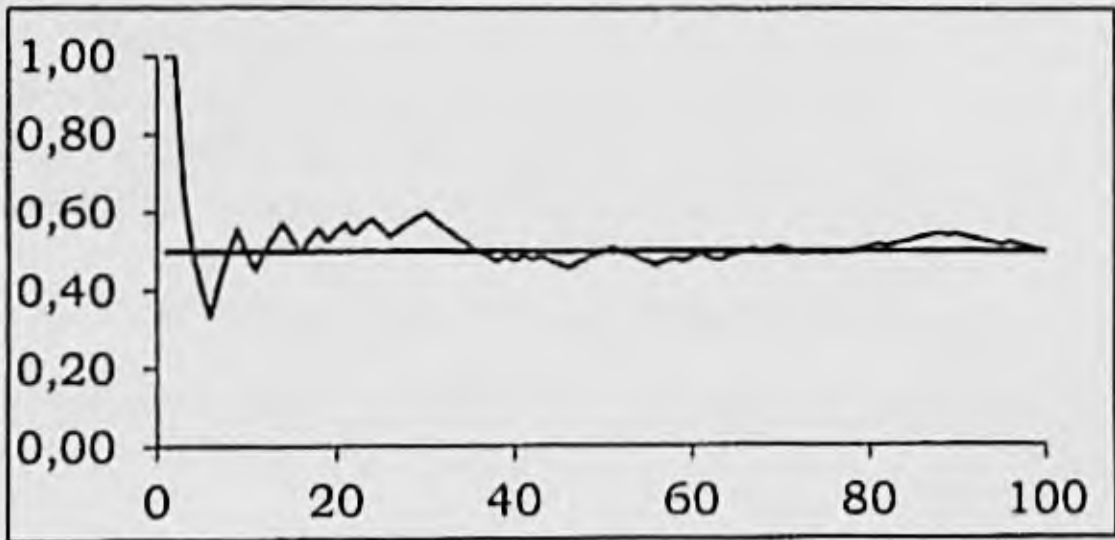
Tirada	Cantidad de tiradas	Resultado	Cantidad de caras acumuladas	Frecuencia relativa del evento “cara”
Primera	1	C	1	1/1 = 1,00
Segunda	2	X	1	1/2 = 0,50
Tercera	3	X	1	1/3 = 0,33
Cuarta	4	X	1	1/4 = 0,25
Quinta	5	C	2	2/5 = 0,40
Sexta	6	C	3	3/6 = 0,50
Séptima	7	C	4	4/7 = 0,57
Octava	8	X	4	4/8 = 0,50
Novena	9	X	4	4/9 = 0,44
Décima	10	C	5	5/10 = 0,50

En la distribución vemos que la frecuencia relativa de C toma valores alrededor de 0,50; al principio más lejos y luego “se va acercando” a ese número cuando

hemos hecho más tiradas. La representación gráfica de este proceso es la siguiente:



Donde hemos agregado una línea que muestra el valor 0,50 que es el que habíamos calculado antes de hacer el experimento. Se aprecia que la sucesión de frecuencias relativas es tal que éstas se van acercando a la probabilidad predicha. Si la moneda se hubiese tirado una cantidad mayor de veces (cien veces, por ejemplo), el gráfico tendría una forma como la siguiente:



Resulta entonces que, si se cumple que la moneda está equilibrada, entonces las frecuencias relativas de un resultado se irán acercando a la probabilidad asignada. Dicho de otra manera, la probabilidad a posteriori converge a la probabilidad a priori. Mucha atención a esto: solo en el caso que el supuesto inicial se cumpla, es decir que la moneda se comporte como esperamos (cayendo parejo de un lado y del otro). Si por el contrario, la moneda estuviese desequilibrada —y que fuera más frecuente el lado X que el lado C—, podríamos obtener, en 500 tiradas, por ejemplo, 350 veces X y la probabilidad a posteriori será entonces $P(C) = 350/500 = 0,70$ y no 0,50 como sería si estuviera equilibrada. En ese caso el supuesto inicial de moneda equilibrada se muestra falso, decimos que “el modelo no se sostiene”, en un momento veremos con más detalle el significado de esta expresión.

Hasta este punto

1. Si se sabe que los diferentes eventos tienen la misma probabilidad de ocurrir, entonces se puede asignar la probabilidad *a priori* que significa "antes de hacer ningún experimento".
2. Cuando no es posible conocer de antemano la probabilidad, entonces debe hacerse el experimento, que consiste en observar y contar las veces que sucede el evento que nos interesa. Con esta información podemos calcular de manera aproximada las probabilidades de cada evento, a través de las frecuencias relativas, a las que llamamos probabilidades *a posteriori*. A medida que sean más los casos observados, tanto más cerca estarán las frecuencias relativas de las probabilidades.
3. Si el supuesto inicial (que en este ejemplo es de iguales probabilidades) es verdadero, entonces las frecuencias relativas se acercarán a las probabilidades *a priori*.

Operando con probabilidades

Cualquiera sea el modo a través del que se hayan asignado probabilidades a eventos, las probabilidades cumplen con ciertas propiedades generales, que trataremos a continuación y que permiten hacer operaciones con ellas.

En primer lugar, y con carácter de axiomas, las siguientes características son condición para que un número $P(A)$ pueda ser considerado una probabilidad:

- La probabilidad es un número comprendido entre cero y uno: $0 \leq P(A) \leq 1$
- La probabilidad del conjunto completo de resultados posibles (del espacio muestral) es uno: $P(\Omega) = 1$
- La probabilidad de la unión de dos eventos que se excluyen mutuamente es la suma de las probabilidades de cada uno de ellos: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

La definición frecuencial (*a posteriori*), así como todos los modelos de asignación de probabilidad *a priori* que mencionamos cumplen con estas condiciones.

Con probabilidades frecuenciales

Sea una distribución conjunta de dos variables con asignación de probabilidades frecuenciales, es decir empíricas. Se trata de la relación entre la ciudad donde se vive y la intención de voto. Las categorías de la ciudad son: Córdoba, Rosario y Mendoza. Los partidos políticos son cuatro y los llamaremos Q, R, S y T. Supongamos que las siguientes son las frecuencias observadas luego de recoger los datos:

Tabla 2: Distribución del partido al que declara que va a votar y la ciudad de residencia.

Ciudad	Partido al que dice que votará				Total
	Q	R	S	T	
Córdoba	200	300	100	50	650
Rosario	100	150	60	70	380
Mendoza	50	150	100	200	500
Total	350	600	260	320	1530

Calculemos algunas probabilidades a partir de las frecuencias relativas.

Probabilidades marginales

Cuando se consideran las categorías de una variable sin tener en cuenta a la otra, usamos las frecuencias de los márgenes de la tabla, esas son las llamadas **frecuencias marginales**. La probabilidad que una persona elegida al azar viva en Córdoba (sin importar a qué partido piense votar) es 650/1530. De manera equivalente, la probabilidad de encontrar por azar a alguien que piense votar al partido S (cualquiera sea su ciudad) es 260/1530. Las escribimos simplemente $P(\text{Córdoba})$ y $P(S)$ respectivamente. En las tablas siguientes están destacadas las frecuencias que participan en el cálculo de estas probabilidades.

Tabla 3: Distribución del partido al que declara que va a votar y la ciudad de residencia. Esquema para el cálculo de la probabilidad marginal $P(\text{Córdoba})$

Ciudad	Partido al que dice que votará				Total
	Q	R	S	T	
Córdoba	200	300	100	50	650
Rosario	100	150	60	70	380
Mendoza	50	150	100	200	500
Total	350	600	260	320	1530

Tabla 4: Distribución del partido al que declara que va a votar y la ciudad de residencia. Esquema para el cálculo de la probabilidad marginal $P(S)$

Ciudad	Partido al que dice que votará				Total
	Q	R	S	T	
Córdoba	200	300	100	50	650
Rosario	100	150	60	70	380
Mendoza	50	150	100	200	500
Total	350	600	260	320	1530

Probabilidades conjuntas o de la intersección de eventos

Las usamos para hallar la probabilidad de ocurrencia simultánea de una categoría de cada variable. Por ejemplo ¿Cuál es la probabilidad de encontrar por azar a alguien que viva en Rosario años **y** que piense votar al partido R? La cantidad de individuos que cumplen **simultáneamente** las dos condiciones es de 150, por lo que la probabilidad se calcula como 150/1530. Hemos destacado la

conjunción “y”, junto al “simultáneamente” porque en este caso se piden dos condiciones juntas. Por eso estas son llamadas **probabilidades conjuntas**. En teoría de conjuntos, corresponden a la intersección de dos conjuntos, que se indica con el signo $\cap$, por lo que el evento “vivir en Rosario” y al mismo tiempo “decir que se va a votar a R”, se escribe “Rosario $\cap$ R”. Esa intersección puede verse gráficamente en el cruce de la fila con la columna correspondiente.

Tabla 5: Distribución del partido al que declara que va a votar y la ciudad de residencia. Esquema para el cálculo de la probabilidad conjunta $P(\text{Rosario y R})$

Ciudad	Partido al que dice que votará				Total
	Q	R	S	T	
Córdoba	200	300	100	50	650
Rosario	100	150	60	70	380
Mendoza	50	150	100	200	500
Total	350	600	260	320	1530

¿Qué sucede si aplicamos esta operación a dos eventos que corresponden a dos categorías de la misma variable?, por ejemplo, ¿cuál es la probabilidad de encontrar a alguien que diga que votará a Q y a R? Esos eventos no pueden suceder juntos porque son incompatibles: solo uno de los dos puede suceder. La intersección entre ellos es imposible, por lo que la probabilidad es cero. Es el mismo caso de buscar a alguien que viva en Córdoba y también en Mendoza, es claro que no hay intersección entre estos conjuntos; dicho de otra forma, la intersección es el conjunto vacío. A estos eventos que no pueden suceder simultáneamente, los llamaremos mutuamente excluyentes. Como recordamos, esa es la condición que deben cumplir las categorías de cualquier variable. Si dos eventos son mutuamente excluyentes entonces, su probabilidad conjunta es cero. En lenguaje de conjuntos:

$$\text{si } A \cap B = \emptyset \text{ entonces } P(A \cap B) = 0$$

Probabilidad de la unión de eventos mutuamente excluyentes

Estas probabilidades sirven para analizar la ocurrencia de uno u otro de dos eventos, cuando éstos no pueden suceder simultáneamente. Por ejemplo: ¿qué probabilidad hay de encontrar a alguien que piense votar a Q o a R? Esto quiere decir “una cosa o la otra”, se trata de una disyunción, es decir, la unión de los dos eventos. En el lenguaje de la teoría de conjuntos la unión de dos conjuntos se indica con el símbolo $\cup$, por lo que decir “A o B” equivale a decir “ $A \cup B$ ”. El total de quienes cumplen con la condición de votar a Q o a R (sin tener en cuenta la ciudad) es de 950 (350 + 600), por lo que la probabilidad es de 950/1530.

Tabla 6: Distribución del partido al que declara que va a votar y la ciudad de residencia. Esquema para el cálculo de la probabilidad $P(Q \text{ o } R)$ (eventos disjuntos).

Ciudad	Partido al que dice que votará				Total
	Q	R	S	T	
Córdoba	200	300	100	50	650
Rosario	100	150	60	70	380
Mendoza	50	150	100	200	500
Total	350	600	260	320	1530

De modo equivalente, la probabilidad de seleccionar al azar a alguien que viva en Córdoba o en Rosario es de $1030/1530$, donde hemos sumado las dos primeras categorías (Córdoba y Rosario).

Tabla 7: Distribución del partido al que declara que va a votar y la ciudad de residencia. Esquema para el cálculo de la probabilidad $P(\text{Córdoba o Rosario})$ (eventos disjuntos).

Ciudad	Partido al que dice que votará				Total
	Q	R	S	T	
Córdoba	200	300	100	50	650
Rosario	100	150	60	70	380
Mendoza	50	150	100	200	500
Total	350	600	260	320	1530

En estas probabilidades, admitimos que se cumpla cualquiera de las dos condiciones ($Q \text{ o } R$ en el primer caso, Córdoba o Rosario en el segundo). En los dos ejemplos se trata de eventos que no pueden suceder simultáneamente, por ser categorías de una de las variables, son mutuamente excluyentes, por lo que la probabilidad de su ocurrencia conjunta es cero. En estos casos, la probabilidad de la unión es simplemente la suma de las probabilidades de los dos eventos:
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Aplicada a los ejemplos:
 $P(Q \cup R) = P(Q) + P(R)$
 $P(\text{Córdoba} \cup \text{Rosario}) = P(\text{Córdoba}) + P(\text{Rosario})$

Probabilidad de la unión de eventos no mutuamente excluyentes

Vamos ahora a incluir en la operación de unión de eventos, aquellos que no se excluyan mutuamente. Para el ejemplo con el que venimos trabajando, cambiamos las condiciones de esta unión de eventos: Ahora preguntamos: ¿Cuál es la probabilidad de hallar por azar a alguien que viva en Córdoba o que piense votar al partido T? Otra vez es una disyunción, por lo que admitimos cualquiera de los dos eventos: que viva en Córdoba (sin importar a quién piense votar) o que piense votar a T (cualquiera sea su ciudad). Si intentamos el mismo procedimiento que en el caso anterior, deberíamos sumar las probabilidades: $650/1530 + 320/1530$, con solo observar la Tabla 8, vemos que los 50 individuos que cumplen las dos condiciones (viven en Córdoba y votarán a T), han sido contados dos veces: en los 650 y en los 320, por lo que deben descontarse del resultado haciendo $650/1530 + 320/1530 - 50/1530$.

¿Por qué sucedió esto?, porque los eventos cuya unión estamos considerando pueden ocurrir simultáneamente, tienen intersección y es esa intersección justamente la que aparece en el cálculo de las dos probabilidades que se suman. Esta última expresión tiene forma:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Y es la expresión más general para el cálculo de la probabilidad de la unión de conjuntos. Esta fórmula toma la forma simplificada que usamos antes $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ solo cuando A y B son disjuntos, es decir cuando se excluyen mutuamente como lo indica el tercer axioma.

Aplicada al ejemplo, el cálculo es:

$$P(\text{Córdoba} \cup T) = P(\text{Córdoba}) + P(T) - P(\text{Córdoba} \cap T) = \frac{650}{1530} + \frac{320}{1530} - \frac{50}{1350} = \frac{920}{1530} = 0,60$$

Tabla 8: Distribución del partido al que declara que va a votar y la ciudad de residencia. Esquema para el cálculo de la probabilidad $P(\text{Córdoba o } T)$ (eventos no disjuntos).

Ciudad	Partido al que dice que votará				Total
	Q	R	S	T	
Córdoba	200	300	100	50	650
Rosario	100	150	60	70	380
Mendoza	50	150	100	200	500
Total	350	600	260	320	1530

Probabilidad condicional

Este es el caso en que necesitamos calcular una probabilidad bajo una condición, que restringe el conjunto de resultado posibles. Se aplica cuando se cuenta con información adicional antes de calcular una probabilidad, por ejemplo que se sepa que la persona seleccionada al azar vive en Córdoba. ¿Cuál es la probabilidad que piense votar al partido S? El planteo es tal que preguntamos cuál es la probabilidad de votar a S si se sabe que vive en Córdoba. Vivir en Córdoba es la condición y se escribe: $S/\text{Córdoba}$, y lo leemos "S, dado que vive en Córdoba".

En este caso, el dato "vive en Córdoba" es una restricción sobre el conjunto total, ya no debemos tener en cuenta a las 1530 personas del total, sino solo a los que cumplen con la condición de vivir en Córdoba. Entonces ahora, el nuevo total es de solo 650 personas, los que viven en Córdoba. De ellos, 100 piensan votar a S, por lo que la probabilidad que nos interesa es $100/650$.

Entonces: $P\left(\frac{S}{\text{Córdoba}}\right) = \frac{100}{650} = 0,15$.

Tabla 9: Distribución del partido al que declara que va a votar y la ciudad de residencia. Esquema para el cálculo de la probabilidad condicional $P(S/Córdoba)$

Ciudad	Partido al que dice que votará				Total
	Q	R	S	T	
Córdoba	200	300	100	50	650
Rosario	100	150	60	70	380
Mendoza	50	150	100	200	500
Total	350	600	260	320	1530

Razonando del mismo modo, si se sabe que la persona elegida piensa votar a R, el total queda restringido a 600 casos (los que cumplen con esa condición). Si nos interesa la probabilidad que viva en Mendoza, bajo esa restricción resulta: $150/600$.

Entonces: $P(Mendoza/R) = \frac{150}{600} = 0,25$

Tabla 10: Distribución del partido al que declara que va a votar y la ciudad de residencia. Esquema para el cálculo de la probabilidad condicional $P(Mendoza/R)$

Ciudad	Partido al que dice que votará				Total
	Q	R	S	T	
Córdoba	200	300	100	50	650
Rosario	100	150	60	70	380
Mendoza	50	150	100	200	500
Total	350	600	260	320	1530

En estos dos últimos ejemplos, el cambio respecto de todos los anteriores es que el denominador de las probabilidades ya no es 1530 sino un número menor, que resulta de haber impuesto previamente una condición: que viva en Córdoba en el primer caso y que haya votado a R en el segundo. Como se ve, estas probabilidades condicionales no son conmutativas:

-Se selecciona una persona al azar entre quienes votarán a R, ¿Cuál es la probabilidad que viva en Mendoza? Se escribe $P(Mendoza/R)$ y vale $150/600$

-Se selecciona una persona al azar entre los que viven en Mendoza, ¿Cuál es la probabilidad que vaya a votar a R? Se escribe $P(R/Mendoza)$ y vale $150/500$.

Relación entre probabilidades condicionales y conjuntas

Compararemos ahora la probabilidad de hallar alguien que vaya a votar a Q y que viva en Córdoba ($P(Q \cap Córdoba)$) con la probabilidad que vaya a votarlo si se sabe que vive en Córdoba ($P(Q/Córdoba)$).

$$P(Q \cap Córdoba) = \frac{200}{1503}$$

$$P(Q/Córdoba) = \frac{200}{650}$$

Si dividimos entre si estas dos expresiones obtenemos:



$$\frac{P(Q \cap \text{Córdoba})}{P(Q/\text{Córdoba})} = \frac{\frac{200}{1503}}{\frac{200}{650}} = \frac{650}{1503}$$

El último cociente es la probabilidad marginal correspondiente a Córdoba, por lo que:

$$\frac{P(Q \cap \text{Córdoba})}{P(Q/\text{Córdoba})} = P(\text{Córdoba})$$

Esta expresión, que es general, nos ofrece una relación muy útil entre las probabilidades condicional y conjunta. Una forma más frecuente de escribir esta relación, para dos eventos cualesquiera A y B es:

$$P(A \cap B) = P(B) * P(A/B)$$

Si escribimos la intersección en orden inverso⁴⁶, tenemos:

$$P(B \cap A) = P(A) * P(B/A)$$

Como son iguales los primeros miembros de las dos expresiones anteriores, igualamos los segundos miembros, para obtener:

$$P(B) * P(A/B) = P(A) * P(B/A)$$

Esta igualdad relaciona las probabilidades condicionales en un orden o en el otro. Conociendo las probabilidades de A y B, esa igualdad nos permite pasar de $P(A/B)$ a $P(B/A)$, veremos más adelante que se trata de un resultado muy valioso.

Con probabilidades a priori

Veamos el uso de estas operaciones con probabilidades usando ahora un experimento en el que asignamos probabilidades a priori. Sea una caja que contiene 4 fichas rojas y 3 azules. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una roja en la primera extracción? Como #Roja es 4 y #Ω es 7, la probabilidad vale 4/7. De mismo modo, la probabilidad de una azul es 3/7.

Hagamos ahora dos extracciones sucesivas de modo tal que no reponemos la primera ficha antes de sacar la segunda, este tipo de extracción se llama *sin reposición*. Saco la primera, veo su color y saco la segunda sin devolver la primera. ¿Cuál es la probabilidad que salga la segunda azul si la primera fue roja? En este caso, a la segunda extracción hay 3 azules sobre un total de 6 fichas (porque ya sacamos una), entonces #Azul = 3 y #Ω = 6 y la probabilidad es $P(A_2/R_1) = 3/6$ (ó 1/2).

Otro caso: ¿Cuál es la probabilidad que la segunda sea azul si la primera fue azul? Ahora quedan 2 azules, porque ya sacamos una, sobre un total de 6 fichas, por lo que la probabilidad es $P(A_2/A_1) = 2/6$ (ó 1/3). Sucede entonces que la probabilidad de obtener una ficha azul a la segunda extracción *depende* de lo que haya resultado en la primera.

Otro problema: ¿cuál es la probabilidad de sacar dos rojas en dos extracciones sin reposición? Lo escribimos: $P(R_1 y R_2) = P(R_1 \cap R_2)$

Y aplicamos la relación que encontramos al final del apartado anterior:

⁴⁶La intersección de dos eventos es conmutativa: $P(A \cap B) = P(B \cap A)$

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) * P(R_2 / R_1) = (4/7) * (3/6) = 2/7$$

Que es la probabilidad que salga roja la primera multiplicada por la probabilidad que salga roja la segunda condicionada a que ya haya salido roja la primera (es decir, con el espacio muestral restringido) .

Del mismo modo, la probabilidad de sacar dos azules es

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) * P(A_2 / A_1) = (3/7) * (2/6) = 1/7$$

Nuevamente, es la probabilidad de azul la primera por la probabilidad de azul la segunda condicionada a que ya haya salido azul la primera.

Ahora preguntamos por la probabilidad de obtener una azul y una roja, en cualquier orden. Esto equivale a pedir azul la primera y roja la segunda o bien roja la primera y azul la segunda, por lo que:

$$P((A_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap A_2)) = P(A_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap A_2) = P(A_1)P(R_2 / A_1) + P(R_1) * P(A_2 / R_1)$$

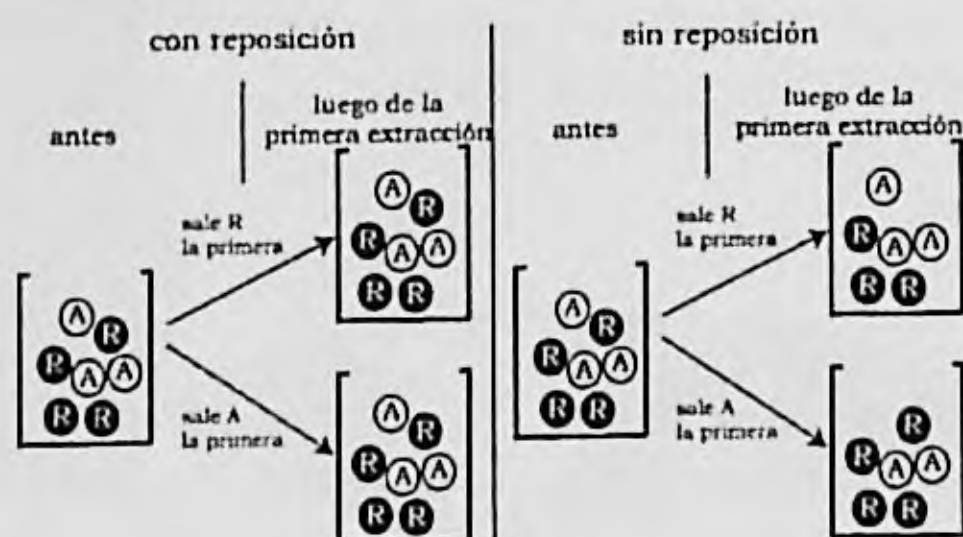
Si cambiamos el experimento reponiendo ahora la primera ficha antes de extraer la segunda, llamamos al experimento *extracción con reposición*. De este modo se restaura el espacio muestral al estado inicial. Por esta razón, la probabilidad de la segunda extracción será la misma que la de la primera para cualquier evento. Por ejemplo, $P(A_2 / A_1)$ es $3/7$, como lo es también $P(A_2 / R_1)$. Que la primera haya sido azul o roja no afecta la probabilidad de la segunda extracción, ya que se la repone: la segunda extracción no depende de la primera. En el caso de extracciones con reposición —en que la segunda extracción no se ve afectada por el resultado que haya dado la primera—decimos que los eventos son **independientes** y resulta que, para dos eventos cualesquiera A y B:

$$P(A/B) = P(A)$$

Lo cual, dicho en lenguaje cotidiano nos indica que, para la ocurrencia del evento A, no importa que haya sucedido o no el evento B. Debido a esto, en nuestro ejemplo, la probabilidad de obtener dos rojas es:

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) * P(R_2)$$

Esquema 1: Efectos de extraer una ficha sin reponerla o reponiéndola, en las condiciones que quedan para la segunda extracción



Este concepto de independencia entre eventos es muy valioso para analizar uno de nuestros más importantes problemas: las relaciones entre variables. Veamos su aplicación a la Tabla 2. Si la intención de voto fuera independiente de la ciudad donde se vive (quiere decir si votaran del mismo modo personas de las diferentes ciudades) la probabilidad de encontrar una persona que vote a R si vive en Córdoba sería simplemente la probabilidad de votar a R, es decir $P(R/Córdoba)=P(R)$ y del mismo modo para los demás eventos. En nuestro ejemplo no se obtiene esa igualdad, ya que:

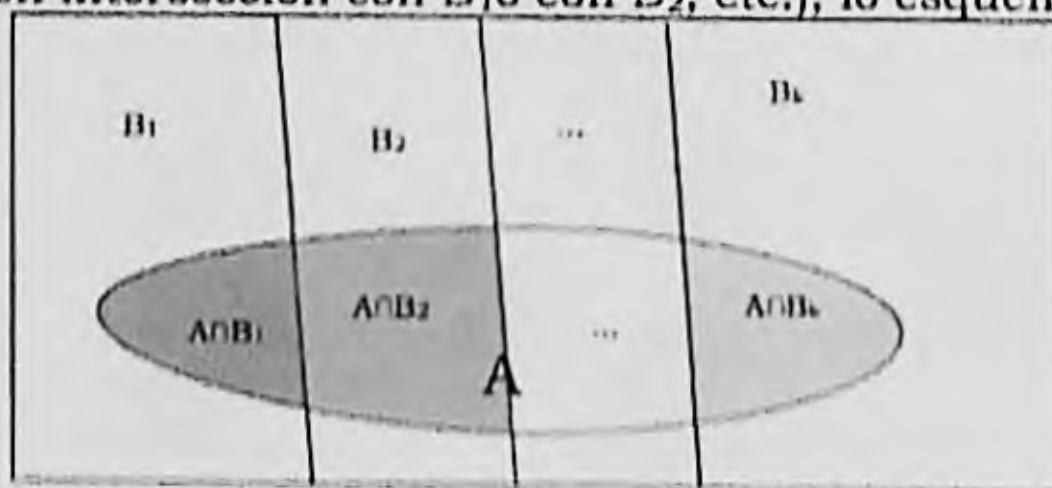
$$P(R/Córdoba)=300/650=0,46, \text{ mientras que: } P(R)=600/1530=0,39$$

Por lo que estos eventos no son independientes en sentido estadístico. Cuando se trataron las relaciones entre variables, se discutió este problema, al calcular las frecuencias que se esperarían si las variables fueran independientes. Se concluyó que dos variables son independientes si la frecuencia relativa de cada celda resulta del producto de las frecuencias relativas marginales que le corresponden. En el lenguaje de las probabilidades, encontramos ahora el mismo resultado y lo expresamos diciendo que si los eventos A y B son independientes, entonces $P(A \cap B)=P(A) \cdot P(B)$.

El teorema de Bayes

La aplicación que presentamos en este último apartado usa probabilidades condicionales para deducir la probabilidad que tiene un evento observado de provenir de diferentes eventos previos. Por esta razón se denomina también "teorema de las causas"⁴⁷. Nos interesa porque es un resultado que permite "aprender de la experiencia", lo que quiere decir que da los medios para usar la información disponible para modificar las probabilidades de determinados eventos. Tiene mucho valor en Ciencias de la Salud, porque es frecuente conocer cuál es la probabilidad a priori que un paciente tenga determinada patología (la prevalencia de la enfermedad) pero, una vez que se dispone de indicadores clínicos, esa probabilidad cambia. De manera equivalente, si se conoce cuál es la probabilidad que un alumno termine una carrera universitaria, esa probabilidad puede modificarse, una vez que se cuenta con información adicional, como el número de materias que ya ha aprobado.

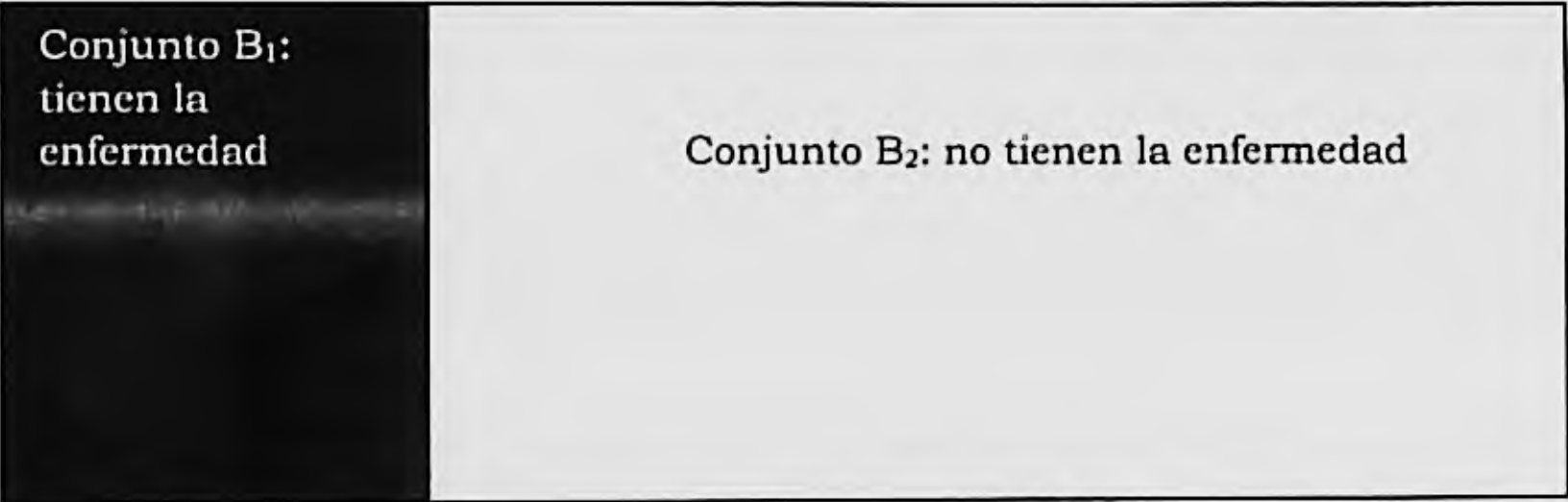
De manera general, si $B_1, B_2 \dots B_k$ son eventos mutuamente excluyentes que completan el espacio muestral (es decir que la unión de todos esos eventos es Ω), y un evento A puede suceder en intersección con cualquiera de ellos (es decir que A puede suceder en intersección con B_1 o con B_2 , etc.), lo esquematizaremos así:



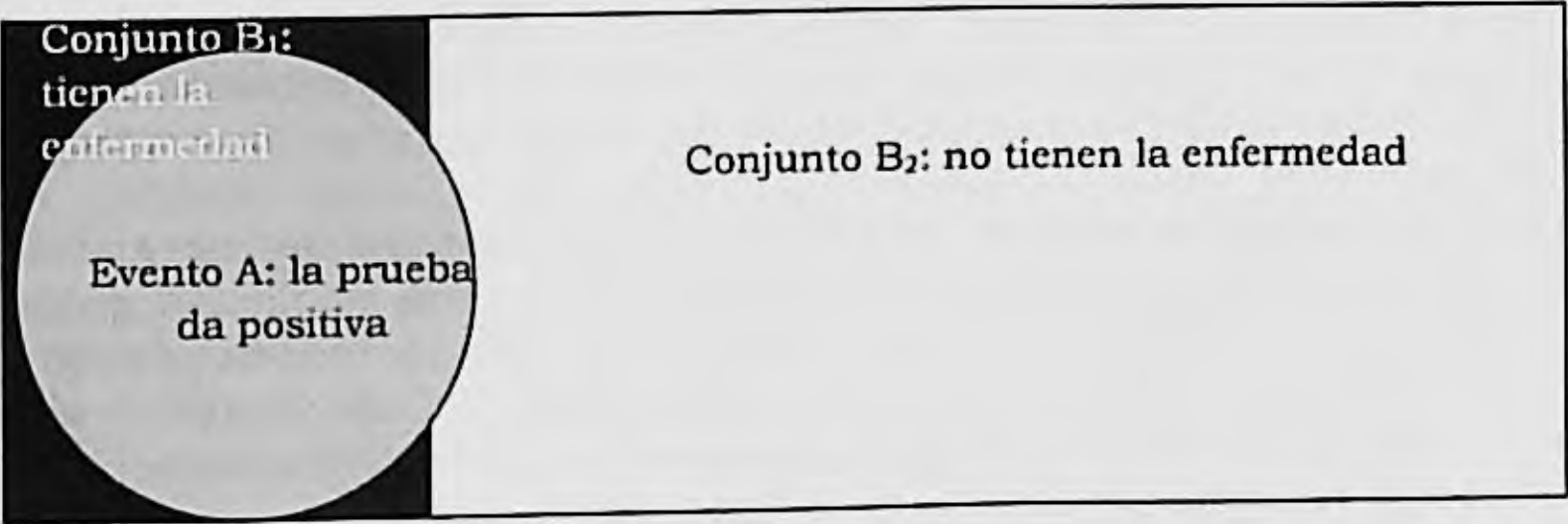
⁴⁷Fue enunciado por Thomas Bayes (1702-1761), matemático inglés.

Por ejemplo, los eventos B pueden ser los diferentes tipos de escuela secundaria de la que provienen los alumnos y el evento A es “terminar la carrera”. Hay quienes terminan la carrera (quienes están dentro de la elipse) y quienes no lo hacen (dentro del rectángulo pero fuera de la elipse), y tanto unos como otros pueden provenir de escuelas de cualquiera de los tipos B_1, B_2 , etc. La primera de las intersecciones (la grisada más oscura) representa a alumnos que cumplen simultáneamente A (haber terminado la carrera) y B_1 (provenir de una escuela del tipo que ese grupo define).

Otro ejemplo es que los eventos B sean solo dos:
 B_1 : tener una determinada enfermedad
 B_2 : no tener esa enfermedad



Si el evento A es “una prueba diagnóstica dio positiva”, aparecen intersecciones entre el resultado de la prueba y la condición de las personas a quienes se aplica. La primera es la zona dentro del círculo a la izquierda: $(A \cap B_1)$, son los casos correctamente diagnosticados. Los que quedan fuera del círculo a la izquierda representa casos en los que la prueba no indicó la enfermedad aun cuando se trataba de personas enfermas, se llaman “falsos negativos”. A la derecha, la pequeña parte de círculo es $(A \cap B_2)$ e indica los casos en que la prueba dio positiva cuando fue aplicada a personas que no tenían la enfermedad, se llaman “falsos positivos”. Por último, la parte blanca del rectángulo a la derecha son los casos en que dio correctamente negativa en personas que no tenían la enfermedad.



Con esta notación y esa relación entre los eventos $B_1, B_2...B_k$ y A, el teorema de Bayes se expresa de la siguiente manera:

$$P(B_j/A) = \frac{P(B_j)P(A/B_j)}{\sum_{i=1}^k P(B_i)P(A/B_i)}$$

El valor de este teorema es que permite pasar de la probabilidad simple de uno de los eventos B (en general, del que llamamos B_j), a la probabilidad “corregida”, a partir de la información que aporta el evento A. Si se conoce inicialmente la probabilidad del evento B_j , el teorema permite calcular la probabilidad de B_j , luego de haber agregado la condición A.

Veamos un ejemplo sencillo: se dispone de dos frascos, el primero de ellos tiene 20 fichas azules y 10 rojas, el segundo contiene 20 azules y 20 rojas. Se elige un frasco al azar y luego se extrae de él una ficha, que resulta ser azul, nos preguntamos por la probabilidad que la ficha provenga del primer frasco. En ausencia de toda información, los dos frascos son igualmente probables, por lo que la probabilidad de cada uno es 0,50: $P(F_1)=0,50$ y $P(F_2)=0,50$. Si la ficha fue extraída del primer frasco, la probabilidad de que sea azul es: $P(A/F_1)=20/30=0,67$, mientras que si proviene del segundo frasco es $P(A/F_2)=20/40=0,50$. La pregunta es por $P(F_1/A)$, debemos invertir una probabilidad condicional, por lo que usaremos el teorema de Bayes:

$$P(F_1/A) = \frac{P(A/F_1) * P(F_1)}{P(A/F_1) * P(F_1) + P(A/F_2) * P(F_2)}$$

Reemplazando, tenemos:

$$P(F_1/A) = \frac{0,67 * 0,50}{0,67 * 0,50 + 0,50 * 0,50} = \frac{0,33}{0,58} = 0,57$$

Este resultado dice que, con el dato que la ficha extraída es azul, corregimos la probabilidad de provenir del primer frasco, que a priori era de 0,50; a 0,57. En este sentido la fórmula de Bayes nos permite usar la información para corregir probabilidades a priori.

En el ejemplo sobre la enfermedad y su diagnóstico, se dispone inicialmente de la probabilidad que tiene una persona cualquiera de padecer la enfermedad, esa es $P(B_1)$, luego esa probabilidad cambia cuando se agrega el dato que dice que a la persona la prueba le dio positiva.

Veamos un ejemplo que presentó Cohen (1994) en un artículo crítico hacia los procedimientos tradicionales de análisis estadístico. La aplicación ilustra el aporte del teorema a las interpretaciones de los resultados que arrojan las pruebas diagnósticas.

La prevalencia de esquizofrenia en adultos es de aproximadamente el 2%, que indica que aproximadamente 2 de cada 100 personas en la población general de adultos padece la enfermedad. Se dispone de un conjunto de pruebas diagnósticas del que se estima que tiene al menos un 95% de precisión al hacer diagnósticos positivos (sensibilidad) y aproximadamente 97% de precisión al declarar normalidad (especificidad).

Para expresar formalmente estos datos, tratamos por un lado, la situación real, la de ser esquizofrénico o no serlo. Llamamos E al evento “el paciente es esquizofrénico” y noE al evento “el paciente no es esquizofrénico”. Por lo que,

elegida una persona al azar, su probabilidad de ser esquizofrénico es $P(E)=0,02$, la probabilidad que no lo sea es $P(\text{no}E)=0,98$.

Por otro lado tenemos el resultado del conjunto de pruebas, que pueden dar positivas o negativas. La sensibilidad se escribe así: $P(+/E)=0,95$, que quiere decir que, aplicada a sujetos esquizofrénicos, el 95% de las veces la prueba dará un resultado positivo, que conducirá al diagnóstico correcto de la enfermedad. El complemento de esa probabilidad, 5%, es la probabilidad de dar un resultado negativo ante un caso de alguien que si es esquizofrénico, se denomina resultado "falso negativo" y solo puede identificarse ante pruebas posteriores más sensibles o por el desarrollo de otros síntomas, que dan más elementos para realizar el diagnóstico. Escribimos entonces que $P(-/E)=0,05$.

Ante personas que no son esquizofrénicas, la prueba da, en el 97% de los casos resultado negativo (correctamente), es decir: $P(-/\text{no}E)=0,97$. Su complemento, del 3%, es la probabilidad de hallar un resultado positivo en alguien que no es esquizofrénico⁴⁸, se denomina "falso positivo" y su probabilidad se escribe: $P(+/\text{no}E)=0,03$.

Dado un sujeto cuyas pruebas dan un resultado positivo, nos preguntamos por la probabilidad que efectivamente sea esquizofrénico. Antes de conocer la respuesta al problema piénselo un momento por su cuenta y ofrezca un valor aproximado para esa probabilidad.

Este es un problema que requiere que se invierta una probabilidad condicional, ya que conocemos la probabilidad de obtener un resultado positivo si el individuo es esquizofrénico $P(+/E)$, y queremos saber la probabilidad que sea esquizofrénico dado que la prueba dio positiva, que es $P(E/+)$.

En la aplicación del teorema de Bayes, el universo está compuesto por un 98% de no esquizofrénicos y un 2% de esquizofrénicos y la prueba puede dar positiva tratándose de alguien enfermo (muy frecuentemente) o estando sano (con poca probabilidad). Reemplazamos en la expresión del teorema de Bayes y tenemos:

$$P(E/+) = \frac{P(+/E) * P(E)}{P(+/E) * P(E) + P(+/\text{no}E) * P(\text{no}E)} = \frac{0,95 * 0,02}{0,95 * 0,02 + 0,03 * 0,98} = \frac{0,019}{0,019 + 0,029} = 0,396$$

Entonces, si a una persona estas pruebas le han dado resultado positivo, la probabilidad que efectivamente sea esquizofrénico es menos del 40%, que es mucho mayor que la prevalencia en la población general, del 2%, pero que no resulta concluyente para el diagnóstico, el cual debe completarse con otros procedimientos. Es posible que este resultado no esté cerca de la estimación intuitiva que uno haría y nos pone muy en alerta sobre la interpretación de pruebas de este tipo. El razonamiento intuitivo quizás nos habría llevado a creer que alguien a quien la prueba da positiva tiene muchas posibilidades de tener la enfermedad, pero no debemos confundir la probabilidad que la prueba de positiva si se tiene la enfermedad ($P(+/E)$) con la probabilidad de tener la enfermedad si la prueba da positiva ($P(E/+)$). Si una persona es esquizofrénica, la prueba le da

⁴⁸Nuevamente en este caso, esto puede conocerse a posteriori, luego de otras pruebas o del seguimiento del sujeto

positiva en el 95% de las veces; pero si da positiva, la probabilidad que sea esquizofrénica es menor al 40%.

Este resultado no debe conducir a creer que la prueba no sirva para el diagnóstico. Por el contrario, ante una persona de la que no se tiene ninguna información, la probabilidad que sea esquizofrénico es 0,02; cuando se agrega el dato que dice que el test dio positivo, la probabilidad que sea esquizofrénico asciende a 0,39. Nuevamente, se ve con claridad cómo este teorema permite usar los resultados de la experiencia para corregir probabilidades asignadas a priori.

En este ejemplo, la probabilidad de ser esquizofrénico para alguien que obtuvo resultado positivo en las pruebas es tan baja debido a la baja frecuencia de la esquizofrenia en la población general (prevalencia), pero demuestra lo equivocado que puede estarse si no se tienen en cuenta resultados falso positivo y falso negativo asociados a las pruebas diagnósticas.

Un abordaje alternativo a este problema es usando una tabla de contingencia. Suponiendo que aplicamos el conjunto de pruebas a un universo de un millón de personas y usando las probabilidades enunciadas antes:

Condición	Resultado de las pruebas		Total
	Positivo	Negativo	
Esquizofrénicos	19.000	1.000	20.000
No esquizofrénicos	29.400	950.600	980.000
Total	48.400	951.600	1.000.000

Queremos responder ¿cuál es la probabilidad que el sujeto sea esquizofrénico, si sabemos que la prueba le dio positiva? Para ello:

$$P(E/+) = \frac{19.000}{48.400} = 0,39$$

Que es el mismo resultado que obtuvimos aplicando el teorema de Bayes. La ventaja de la presentación a través de una tabla de doble entrada es que permite distinguir dos conjuntos de eventos sobre los que tenemos diferente conocimiento:

- Un *estado de realidad*, que es la condición de esquizofrénico o no esquizofrénico del sujeto. Este estado nos es desconocido.
 - La *evidencia observable*, que está dada por el resultado de la prueba que aplicamos, que conocemos.
- Como las pruebas nos son perfectas, los resultados deben leerse en términos probabilísticos y no determinísticos.

Cuando ingresemos a inferencia estadística veremos que ésta es la situación más frecuente: que dispongamos de cierta evidencia y debemos usarla para tomar una decisión acerca de un estado de realidad al que no conocemos.

El de Bayes es un teorema de gran importancia, por las consecuencias que tiene para muchas pruebas diagnósticas que se usan a menudo. Lo que hemos encontrado también implica el cuidado con que deben leerse los resultados de

pruebas de cualquier tipo: diagnósticos, dosaje de productos prohibidos en deportistas, pruebas genéticas, etc. Para una correcta interpretación de los resultados de esas pruebas se deben conocer cuáles son los errores de tipo “falso positivo” y “falso negativo” que las acompañan.

Variables aleatorias

Es necesario hacer más explícita una parte del vocabulario que hemos usado. Al tratar con eventos aleatorios (resultados de experimentos aleatorios), en algunos hemos usado una notación más textual, como “que la moneda salga cara” y en otros una más numérica, por ejemplo “ $S=4$ ”. De aquí en adelante trabajaremos con la segunda notación que tiene muchas ventajas. La razón es que pasamos a tratar a los experimentos como observación de variables, cuyas categorías (o valores) son los resultados del experimento. En la tirada de la moneda, no es difícil cuantificar los eventos, podemos elegir cara como lado preferido y definir la variable X = “número de caras que se obtienen al lanzar una moneda equilibrada”, los valores posibles son 0 (si sale cruz) y 1 (si sale cara). En la suma de los puntos de los dos dados, S asume valores discretos del 2 al 12. La descripción como distribución de frecuencias que hacíamos antes, se transforma ahora en distribución de probabilidades y, para los dos ejemplos citados, toma la forma:

X		S	
número de caras que se obtienen al lanzar una moneda equilibrada	$P(X)$	suma de puntos obtenidos al lanzar dos dados equilibrados	$P(S)$
0	$1/2$	2	$1/36$
1	$1/2$	3	$2/36$
Total	1	4	$3/36$
		5	$4/36$
		6	$5/36$
		7	$6/36$
		8	$5/36$
		9	$4/36$
		10	$3/36$
		11	$2/36$
		12	$1/36$
		Total	1

Estas variables se denominan **variables aleatorias**, porque sus valores dependen del azar y serán muy necesarias en todo lo que sigue de la materia. El aspecto de estas tablas de distribución de probabilidades es en un todo equivalente al de las de distribución de frecuencias: el total igual a uno indica la probabilidad del espacio muestral ($P(\Omega) = 1$). Sobre ellas pueden hacerse operaciones similares a las descripciones de variables ya vistas.

Cuando la variable aleatoria puede asumir valores continuos, ya no es posible asignar probabilidades individualmente y debe hacerse a través de intervalos. Es el mismo problema que hallamos en las distribuciones de frecuencia, y lo resolvemos del mismo modo. Se usan probabilidades acumuladas, ya sea entre

valores de la variable o desde ciertos valores hacia los mayores o desde ciertos valores hacia los menores⁴⁹.

También es posible, sobre distribuciones de probabilidad, calcular algunas medidas descriptivas, veamos en qué se transforma la media. El procedimiento para calcularla que hemos visto consiste en multiplicar cada valor de la variable por su frecuencia y dividir por el total de casos; para las variables aleatorias eso se hace de una sola vez, multiplicando cada valor por la probabilidad y se obtiene:

$$E(x) = \sum_{i=1}^n x_i * P(x_i)$$

Que se llama **esperanza matemática**, la indicaremos $E(x)$. Aunque esta expresión proviene del cálculo de la media⁵⁰, tiene una diferencia conceptual importante: la media es una medida resumen, por lo que describe hechos que han sido observados, puede decirse que hace referencia a algo que ya sucedió. Por el contrario la esperanza se refiere a eventos que pueden llegar a suceder, por eso tiene ese nombre, es la expectativa que tenemos sobre el devenir futuro de un experimento. Uno de los usos más difundidos de este concepto es la esperanza de vida, que mide el número promedio de años que viviría un conjunto de personas si a lo largo de toda su vida se mantuvieran las mismas tasas de mortalidad que en la actualidad (las tasas de mortalidad se usan para estimar las probabilidades de morir a cada edad). Un "promedio a futuro" es una descripción sobre algo que aún no sucedió, por eso se llama esperanza.

De manera análoga puede calcularse la varianza de una variable aleatoria, su fórmula es:

$$V(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(x))^2 * P(x_i)$$

Al referirse a una variable aleatoria, la interpretación de la varianza difiere levemente de aquella que se usó como medida descriptiva de la dispersión. Aquí indica el modo en que se alcanzará el valor de la esperanza. Una varianza grande indica un proceso aleatorio muy variable, con valores dispares que convergen lentamente al valor de la esperanza. Por el contrario, un valor pequeño de la varianza indica un proceso más estable en el que los valores difieren poco de un paso al siguiente y rápidamente se aproximan a la esperanza.

⁴⁹ Sin embargo hay algo importante que cambia; porque en lugar de sumar un número finito de valores discretos, cuando se trata de variables continuas se debe sumar una cantidad infinita de valores infinitesimales, ese cambio se refleja en que la operación de suma se transforma en otra operación que se llama integral. No disponemos de los elementos matemáticos suficientes para ir más allá de esta mención imprecisa del concepto, pero tampoco es necesario a los fines de este curso.

⁵⁰ Puede deducirse esto a partir del cálculo de la media, si se reemplazan las frecuencias relativas por las probabilidades de cada valor de la variable, tenemos:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i * f_i}{n} = \sum_{i=1}^n x_i * \frac{f_i}{n} = \sum_{i=1}^n x_i * f'_i = \sum_{i=1}^n x_i * P(x_i) = E(x)$$

Un ejemplo común que ilustra el uso de estas medidas es el juego de la ruleta. En este juego, por cada ficha que se apuesta a un color se obtiene una de premio si sale ese color y, por cada ficha que se apuesta a un solo número, se obtienen 35 como premio. En ambos tipos de apuesta, la ganancia esperada⁵¹ vale -0,027. Esto significa que, jugando indefinidamente, se espera perder (porque es negativa) 0,027 pesos por cada peso que se apueste; esa es la ganancia esperada del organizador del juego.

Sin embargo, las varianzas son diferentes; para las apuestas a color, vale poco menos de 1 y para la apuesta a número único es más de 34. Esto describe la dinámica del juego; mientras con la primera modalidad se gana y se pierde a menudo, con la segunda forma de apostar, se pierde muchas veces y cuando se gana es grande la recompensa. De todos modos en ambos tipos de apuesta, el balance entre ganancias y pérdidas es negativo, como lo indica la esperanza

⁵¹ Para el caso de ruletas con un solo cero, existen algunas que tienen además del cero el doble cero, en esos casos la esperanza de pérdida es mayor.

Capítulo 8 Probabilidad: los modelos

Concepto de modelización

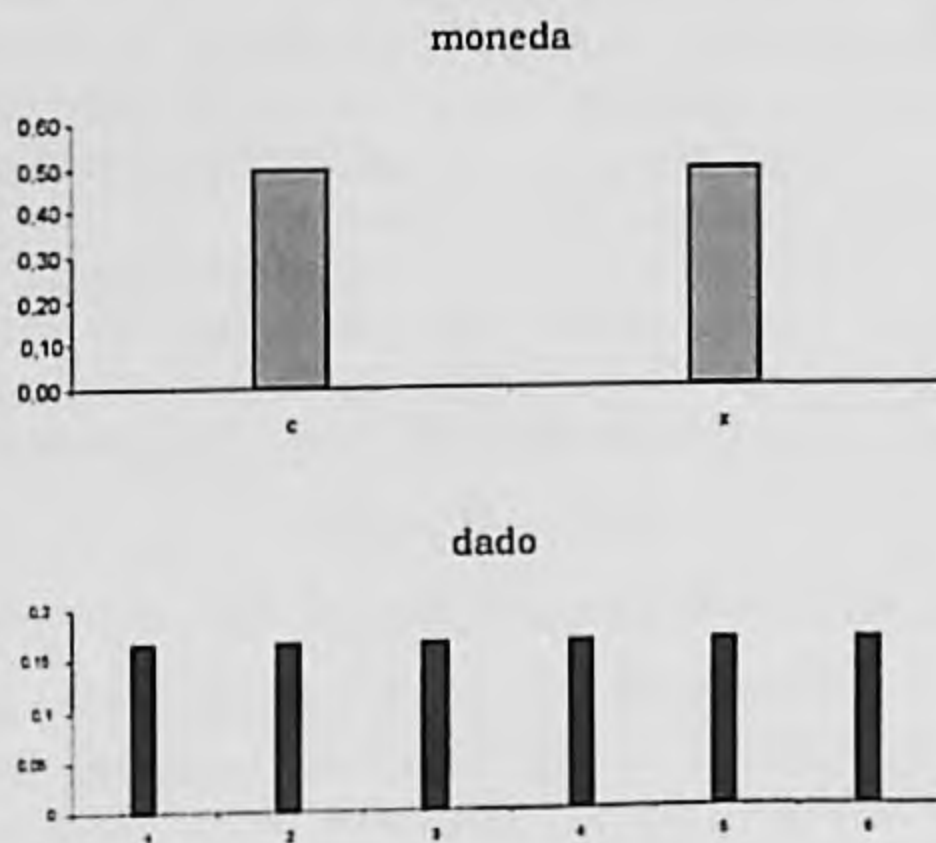
La asignación a priori de probabilidades, presentada con los ejemplos elementales de la moneda o el dado es parte de una forma muy general de tratar con los fenómenos que dependen del azar. El supuesto inicial de probabilidad $\frac{1}{2}$ a cada lado, constituye un *modelo de probabilidad*, es una anticipación acerca de lo que se espera que suceda. No es arbitrario, ya que deben tenerse razones para suponer que el modelo se sostiene, pero en todos los casos es una aproximación a lo que sucede en la realidad. Tratamos de modelar (o modelizar) lo que observamos a fin de simplificarlo, pero un modelo puede ser más o menos adecuado a la realidad, por eso dijimos que cabe la posibilidad que "el modelo no se sostenga". La idea de simplificar está aquí utilizada en el sentido de elegir algunos aspectos de la realidad para construir un modelo que luego se usa para asignar probabilidades a los diferentes resultados posibles. La riqueza y complejidad de los fenómenos sociales no se menoscaba porque se usen modelos, salvo si se comete el error de confundir el modelo con la realidad. Disponer de un modelo de probabilidad permite calcular probabilidades de manera sencilla bajo ciertos supuestos, que deben explicitarse.

Para seguir con nuestra moneda, digamos que el modelo que resume el supuesto de iguales chances para todos los resultados, se llama *distribución uniforme*, es válido también para un dado, si está equilibrado, o para cualquier fenómeno aleatorio en el que se pueda suponer que los resultados son igualmente probables. La expresión formal de ese modelo es la siguiente:

"Si un experimento aleatorio tiene distribución uniforme y k resultados posibles, entonces $P(A_i) = \frac{1}{k}$, donde A_i es uno cualquiera de los k resultados"

Por lo tanto si se trata de una moneda (2 caras) la probabilidad de cualesquiera de sus caras será $\frac{1}{2}$, si es un dado, cada lado tiene probabilidad $\frac{1}{6}$, y si es un icosaedro regular (veinte caras iguales, parecido a un globo de espejos) cada cara tendrá probabilidad $\frac{1}{20}$ de salir.

La representación gráfica de este modelo, es para cada uno de los ejemplos, la siguiente:



icosaedro



En estos gráficos, la idea de uniformidad (para todos los eventos la misma probabilidad) se transmite en la igual altura de todas las columnas.

Además de este modelo uniforme, en este capítulo presentaremos cinco modelos de probabilidad que serán necesarios para lo que sigue de nuestros contenidos; el primero para variables discretas y los demás para continuas. Hay una gran cantidad de modelos que permiten asignar probabilidades a priori a diferentes fenómenos observables. El tratamiento que haremos a continuación será de carácter utilitario, es decir estará centrado en el uso que podemos hacer de cada distribución teórica. Haremos las referencias matemáticas mínimas que sean necesarias para comprender las propiedades y condiciones de aplicación de los modelos.

Distribución binomial

Esta distribución se usa para modelar fenómenos aleatorios que pueden dar solo dos resultados, a los que se llama "éxito" y "fracaso". La elección de cuál es éxito es arbitraria y corresponde a la categoría que el investigador toma como de interés. La variable aleatoria que se considera es el número de veces que se obtienen éxitos, o simplemente el número de éxitos que resultan luego de una cierta cantidad de repeticiones de la experiencia. La condición para que este modelo sea válido es que cada repetición sea independiente de las anteriores, es decir, que cada realización del experimento no incida sobre la siguiente.

Nuevamente con la moneda equilibrada que hemos tratado, este modelo va a facilitar el cálculo de, por ejemplo, qué probabilidad hay de obtener 3 caras en 4 tiradas de la moneda. Resolvamos primero el problema de manera manual. En la tabla siguiente mostramos los resultados posibles de ese experimento (lanzar cuatro veces una moneda equilibrada) y el valor que corresponde a la variable aleatoria "número de caras", a la que llamaremos x^{52} .

⁵²Con lo que hemos elegido tomar como éxito el resultado *cara*

Resultado del experimento	Valor de la variable "número de caras" x
XXXX	0
XXXC	1
XXCX	1
XXCC	2
XCXX	1
XCXC	2
XCCX	2
XCCC	3
CXXX	1
CXXC	2
CXCX	2
CXCC	3
CCXX	2
CCXC	3
CCCX	3
CCCC	4

Como estos 16 resultados son igualmente probables, le corresponde una probabilidad de $1/16$ (0,0625) a cada uno, por lo que podemos calcular las probabilidades de cada valor sumando los que corresponden a las formas en que pueden lograrse. Por ejemplo, tres caras ($x=3$) puede ser consecuencia de cualquiera de los eventos XCCC, CXCC, CCXC, CCCX, por lo que hay cuatro eventos a su favor y su probabilidad es $4/16$. Resumiendo entonces la tabla anterior, tenemos:

x	$P(x)$
0	$1/16$ (0,0625)
1	$4/16$ (0,25)
2	$6/16$ (0,375)
3	$4/16$ (0,25)
4	$1/16$ (0,0625)
Total	1

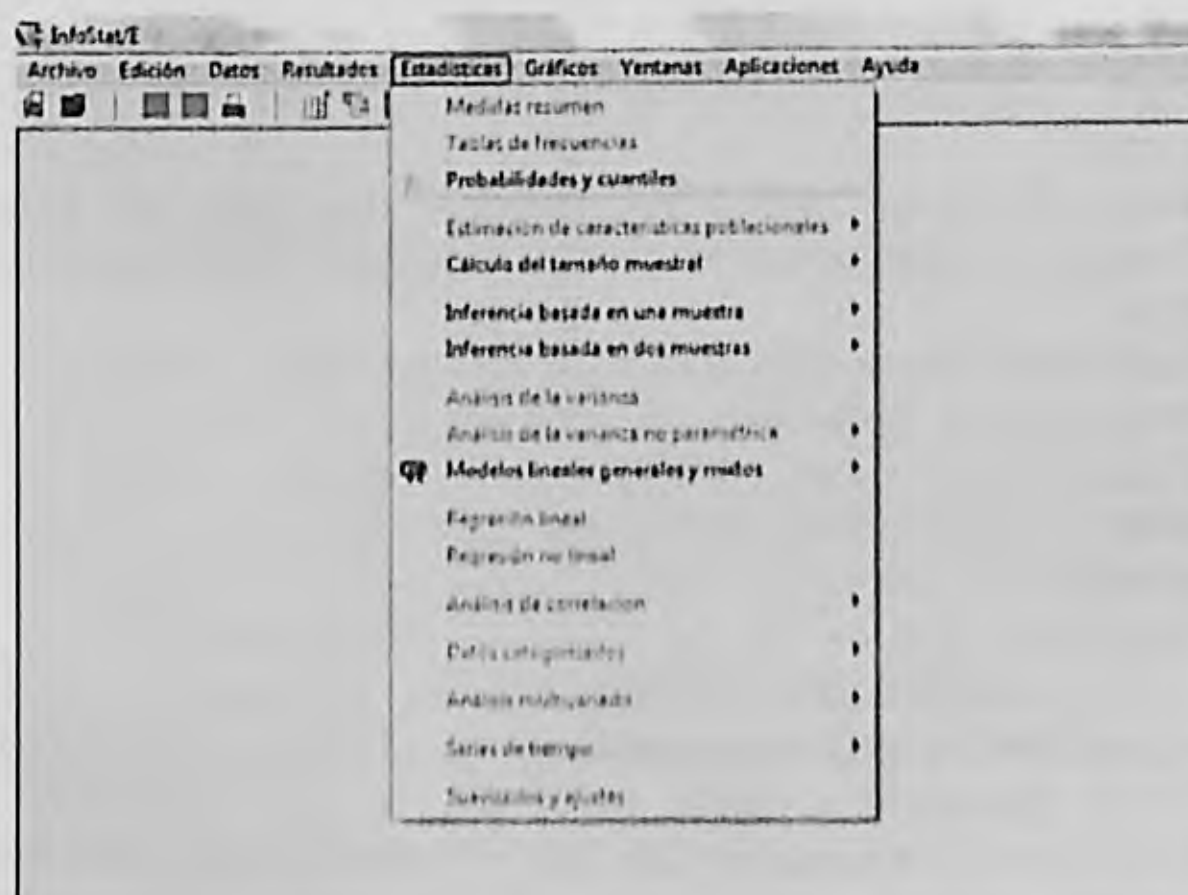
Como esperábamos, "lo más probable" es obtener dos caras, porque se espera que la moneda caiga cara la mitad de las veces, ahora sabemos también cuán probable es que caiga una cantidad diferente de veces cara. La respuesta a la pregunta que formulamos arriba es 0,25 y lo expresamos simplemente:

$$P(x = 3) = 0,25$$

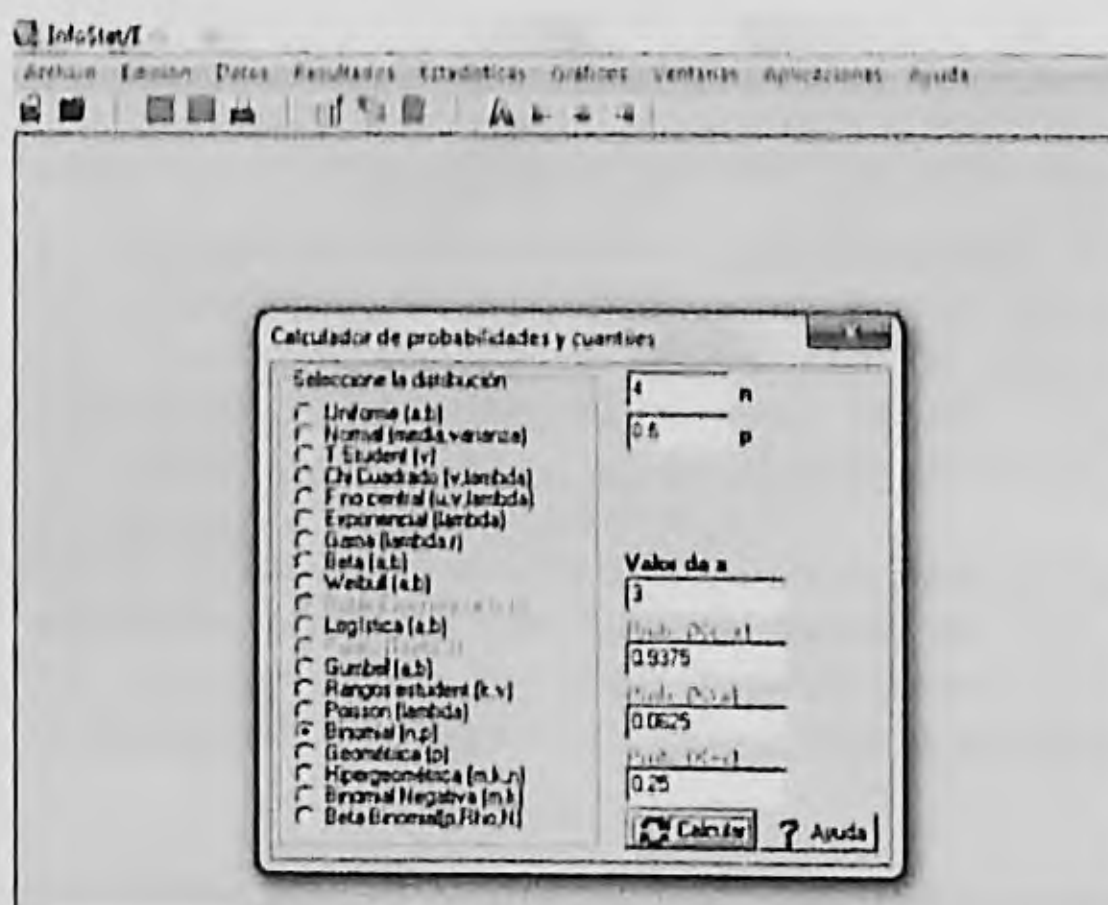
Para construir la tabla y responder a la pregunta hemos usado como información:

- la cantidad de repeticiones del experimento ($n=4$)
- la probabilidad del evento cada vez que se lo repite ($p=0,5$)
- el número de veces cuya probabilidad calculamos (el número de éxitos) ($x=3$)

Esta información es suficiente para aplicar el modelo binomial y solicitar⁵³ directamente la probabilidad a InfoStat®. Sin necesidad de tener una base de datos abierta, en “Estadísticas” elegimos “Probabilidades y cuantiles”:



La ventana siguiente, nos pregunta por la distribución de probabilidad que usaremos, elegimos “binomial (n, p)”, en el valor de n indicamos 4 y p es 0,5. En “valor de x ” ingresamos nuestra pregunta que corresponde a $x=3$, solicitamos “Calcular” y obtenemos:



⁵³ La expresión formal del modelo es: $P(x, n, p) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1 - p)^{n-x}$, en la que x es el número de éxitos, n el número de repeticiones del experimento y p la probabilidad de éxito a cada repetición. Pero no la usaremos para el cálculo.

Esta operación nos ofrece tres resultados:

$P(x \leq 3) = 0,9375$ Es la probabilidad de obtener tres caras o menos

$P(x > 3) = 0,0625$ Es la probabilidad de obtener más de tres caras

$P(x = 3) = 0,25$ Es la probabilidad de obtener *exactamente* tres caras, que es nuestra pregunta.

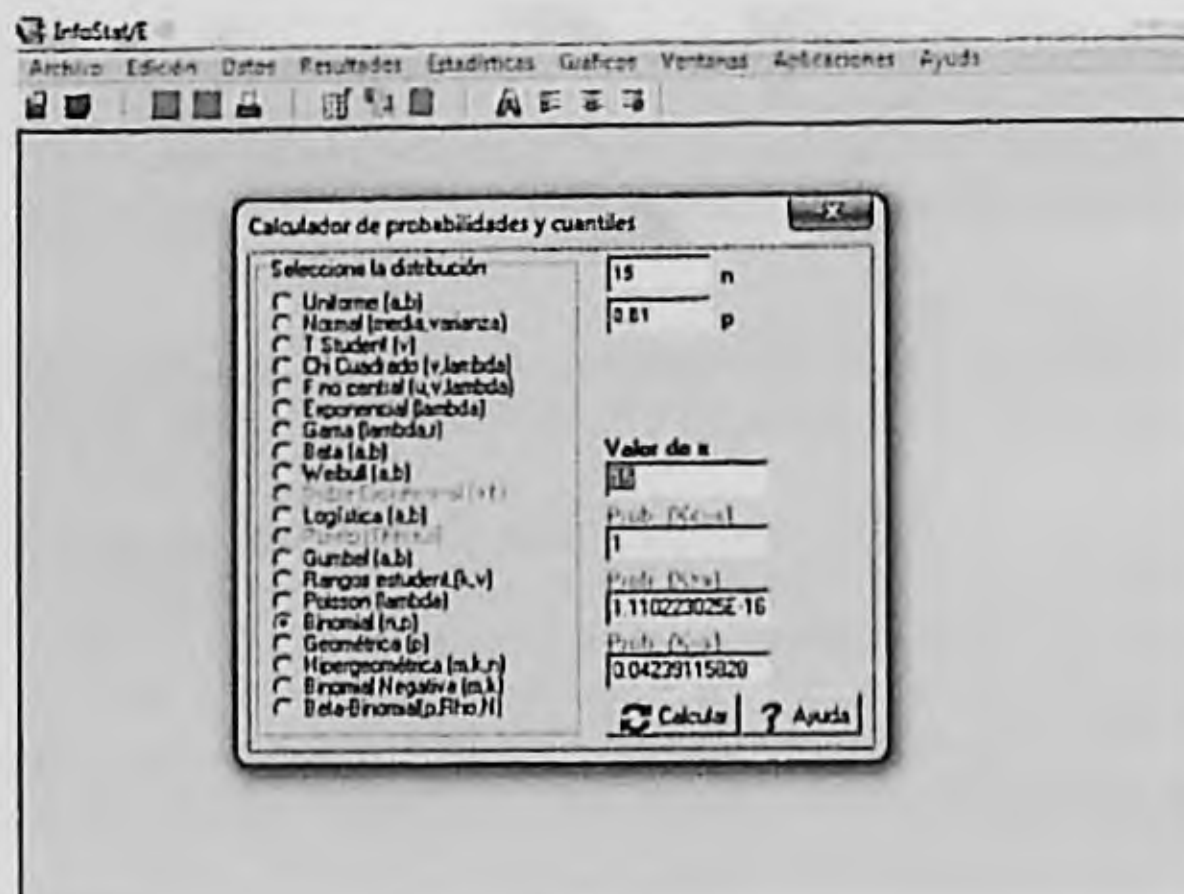
Escribimos entonces $B(X = 3; 4; 0,50) = 0,25$

Que leemos como “bajo un modelo binomial, la probabilidad de obtener 3 éxitos en 4 repeticiones de un experimento en el que cada éxito tiene probabilidad 0,50, es 0,25”.

Cada vez que estemos ante un experimento en el que queramos calcular la probabilidad de una cierta cantidad de casos (x) de una categoría de una variable dicotómica (a la que llamamos éxito) que se presenta con una frecuencia relativa conocida y constante (p), luego de un determinado número de extracciones (n); usaremos este modelo y no serán necesarias las operaciones que realizamos antes manualmente. Esa es la utilidad de contar con un modelo de probabilidades.

Un ejemplo de más interés es el siguiente. Se elige una muestra al azar de 15 estudiantes de primer año de Psicología para un experimento, si no se establece ninguna restricción sobre la composición de la muestra y se sabe que la proporción de mujeres en primer año de Psicología es 0,81. ¿Cuál es la probabilidad que en la muestra resulten todas mujeres? Aquí el experimento que se repite es el de elegir al azar a un estudiante de primer año, y se repite 15 veces, por lo que $n=15$, la probabilidad que una persona elegida al azar sea mujer es la frecuencia relativa, $p=0,81$. La pregunta es que sean *todas* mujeres, es decir que sean 15 éxitos: $x=15$, por lo que se expresa $B(15; 15; 0,81)$. Usando InfoStat® para calcular la probabilidad binomial⁵⁴, obtenemos:

⁵⁴El supuesto de independencia puede objetarse aquí, porque a cada extracción de una mujer, la proporción de mujeres en primer año se reduce, ya que no podemos seleccionar dos veces a la misma persona. Por ejemplo, si en primer año hay 1400 alumnos, de los cuales 1134 son mujeres, la proporción de mujeres es $1134/1400=0,81$. Si la primera persona seleccionada es mujer, al momento de la segunda extracción, ya no hay 1134 mujeres, sino 1133, por lo que la proporción es ahora $1133/1399=0,8099$. Si la primera extracción hubiese sido varón, la probabilidad de mujer para la segunda es $1134/1399=0,8106$. Como estos números no son muy diferentes de 0,81, podemos usar el modelo binomial, que exige que esa probabilidad sea siempre la misma (independencia). Esta aproximación es válida si el universo del cual se extraen las muestras (que en este caso está formado por todos los alumnos de primer año) es mucho mayor que la cantidad de casos que constituyen la muestra; cuando así sucede, se dice, de manera breve, que es una “población infinita”.



Donde:

$P(x \leq 15) = 1$ Es la probabilidad de obtener 15 mujeres o menos, vale 1 porque no pueden obtenerse más de 15 mujeres en 15 casos.

$P(x > 15) = 1,11E-16$ Esto es un número muy pequeño, que se interpreta como cero, es la probabilidad de obtener más de 15 mujeres en la muestra.

$P(x = 15) = 0,0424$ Es la probabilidad de obtener *exactamente* 15 mujeres en la muestra, que es nuestra pregunta.

La respuesta se expresa:

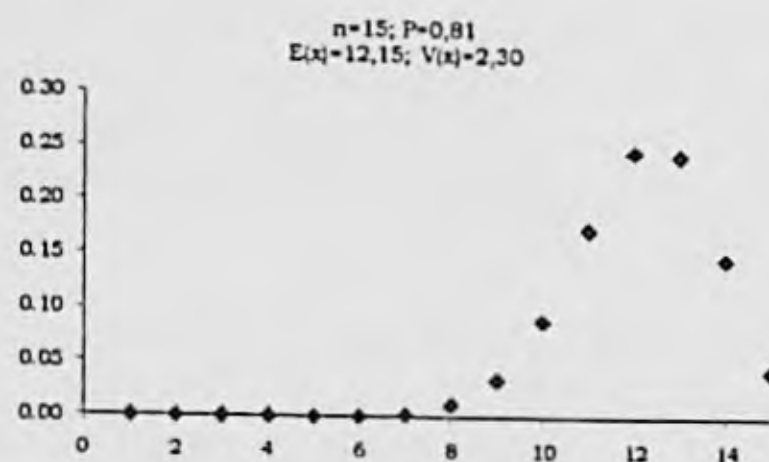
$$P(x = 15) = B(15; 15; 0,81) = 0,0424$$

Esperanza y varianza

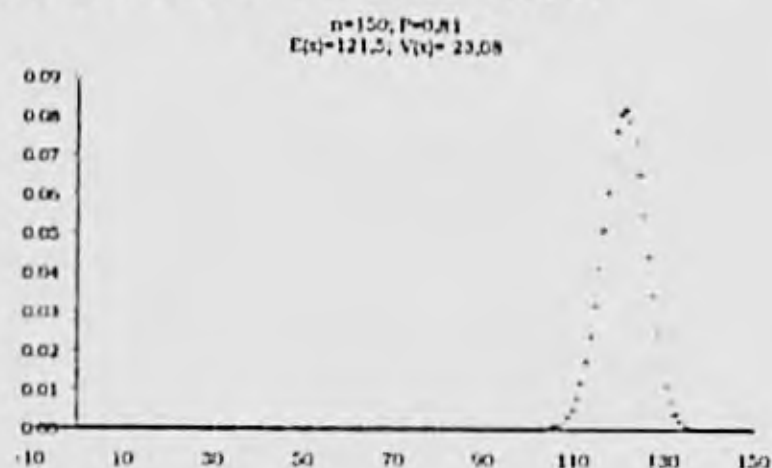
En este modelo de probabilidad, la esperanza es $n \cdot p$, que representa el número esperado de casos favorables a obtener en n repeticiones. En el primer ejemplo, la esperanza es $4 \cdot 0,50 = 2$, que quiere decir que en 4 tiradas de la moneda equilibrada, esperaríamos obtener 2 caras, como sabemos, esto es lo que sucede luego de un gran número de repeticiones del experimento. En el segundo ejemplo, la esperanza es $0,81 \cdot 15 = 12,15$, aunque este número decimal no es una cantidad posible de casos favorables (mujeres) a obtener en la muestra, es el promedio a futuro, luego de la realización reiterada de este experimento muchas veces.

La varianza de la distribución binomial es $n \cdot p \cdot (1-p)$, que es una medida de la variabilidad del proceso. Más adelante volveremos sobre este tema.

El gráfico de esta distribución se construye calculando las probabilidades de los diferentes valores de x , que puede ir desde 0 hasta el número total de repeticiones del experimento. El siguiente es el correspondiente a los datos del ejemplo:



Veamos el cambio que sucede en el gráfico si el número de repeticiones es de 150 en lugar de 15 y mantenemos P en el mismo valor:



Observemos la forma en que aparece representada la diferencia entre las varianzas de las dos distribuciones⁵⁵.

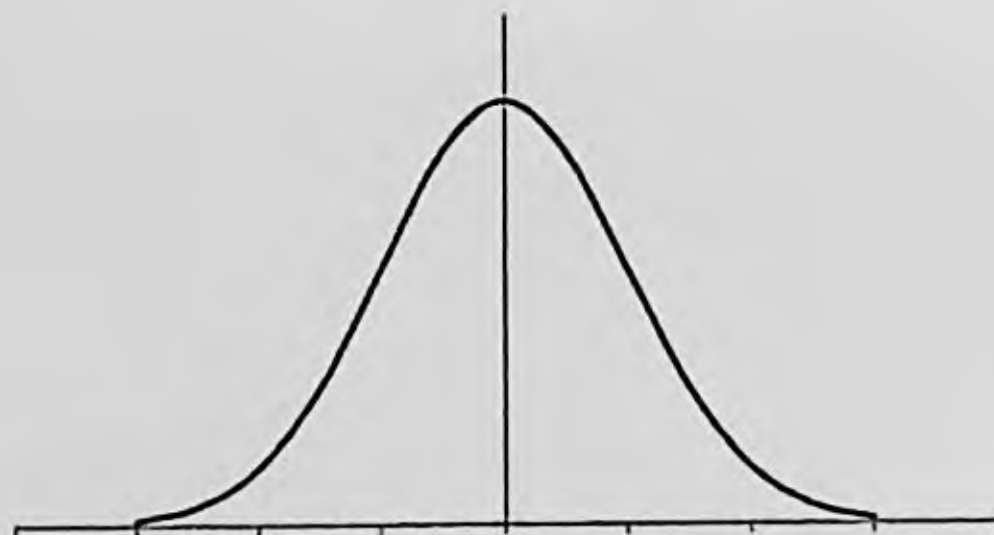
Distribución normal

La mayoría de los fenómenos naturales, sociales, psicológicos no tienen distribución uniforme, es decir, no es igualmente probable que resulte cualquiera de los resultados. Por ejemplo, para una determinada población, el peso de los niños al nacer tiene un valor promedio y cuando un niño nace se espera que tenga un peso cercano a ese valor medio. No es igualmente probable que un niño nazca con 3500 gramos que con 5800. Son menos frecuentes los niños que nacen con pesos muy por encima o muy por debajo del promedio. De modo similar sucede con medidas psicológicas como el Cociente intelectual (CI); se hallan con mayor frecuencia valores cercanos al promedio y la probabilidad de encontrar personas muy por encima o muy por debajo de ese promedio es menor. Para este tipo de fenómeno, hay un modelo que suele ajustar bien las probabilidades, se llama distribución normal⁵⁶ y su representación gráfica, una curva unimodal, simétrica, de forma acampanada es llamada “campana de Gauss”⁵⁷ en referencia a Johann Carl Friedrich Gauss⁵⁸.

⁵⁵ Para explicar la diferencia, considere los coeficientes de variación de las dos distribuciones.

⁵⁶ El nombre “normal” de este modelo no hace referencia al sentido coloquial del término, como juico acerca de la salud o el comportamiento humano, sino a un modelo de distribución en el que es más frecuente hallar valores cercanos al promedio y resultan igualmente infrecuentes valores extremos mayores o menores.

⁵⁷ Este modelo tiene una expresión matemática más compleja que la primera que vimos, solo a título ilustrativo la mencionamos:



Un primer elemento a tener en cuenta es que, a diferencia de los gráficos anteriores, ahora se trata de una curva con trazado continuo. Esto se debe a que esta distribución es adecuada para modelar variables continuas. Recordemos que cuando se construyeron las distribuciones de frecuencia, resultaba imposible enumerar todas las categorías de una variable de este tipo, ya que son infinitas. Dijimos en ese momento que no es posible indicar la frecuencia de un valor único de una variable continua. Lo mismo vale ahora para las probabilidades: no calculamos probabilidades para valores simples de variables continuas, si calculamos probabilidades acumuladas y, como sucedía con las frecuencias acumuladas, éstas están representadas gráficamente en el área bajo la curva, pero en lugar de sumar las frecuencias de valores discretos, se realiza una operación que se llama integración⁵⁹.

Dado que la curva que describe la distribución normal es unimodal y simétrica; el modo, la media y la mediana coinciden, el coeficiente de asimetría es cero ($g_1=0$) y la distribución es mesocúrtica ($g_2=0$).

El cálculo de las probabilidades bajo el modelo normal —o, lo que es lo mismo, de las áreas bajo la curva—, es muy complejo, por lo que se encuentra tabulado, es decir, precalculado para algunos valores de la variable. ¿De qué variable?, hemos mencionado el peso al nacer, el IQ, ¿con qué método calcularemos probabilidades para fenómenos tan disímiles? Antes que se difundiera el uso de la computadora personal, se usaban tablas, ahora usamos cualquier hoja de cálculo, donde se indica la probabilidad acumulada para diferentes valores de una variable abstracta, sin unidades, adaptable a una diversidad de fenómenos. Se trata de la variable z , que ya fue definida y que mide el número de desviaciones estándar —contadas desde la media—, a las que se encuentra un caso individual. Una de las aplicaciones prácticas de esta variable es que permite comparar variables que miden cualidades muy diferentes. Sabemos ya que la cantidad de desviaciones estándar (z) es una medida de lo cerca o lejos que un caso se encuentra del promedio. Si la variable en estudio es adecuadamente modelada con la

$$P(z < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

jamás la usaremos para calcular probabilidades.

⁵⁸1777–1855, matemático, astrónomo y físico alemán. El primero en expresar la función y calcular áreas fue Abraham De Moivre matemático francés que trabajó en Inglaterra junto a Newton y Halley (Tankard, 1984).

⁵⁹El símbolo de esta operación es $\int$, una S estilizada, que indica su origen en una suma.

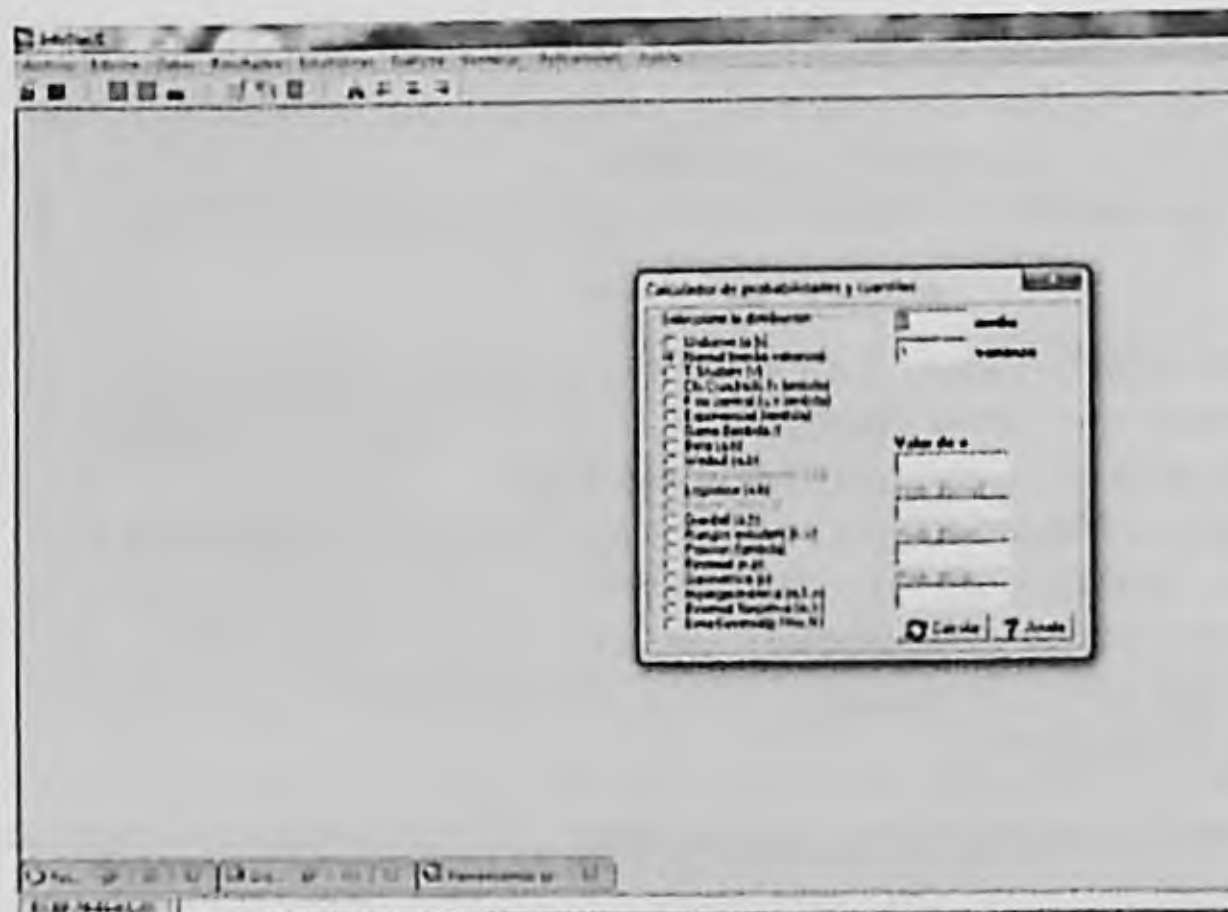
Recordemos que la variable z está definida, para un valor particular de x como:

$$Z = \frac{x - \bar{x}}{S}$$

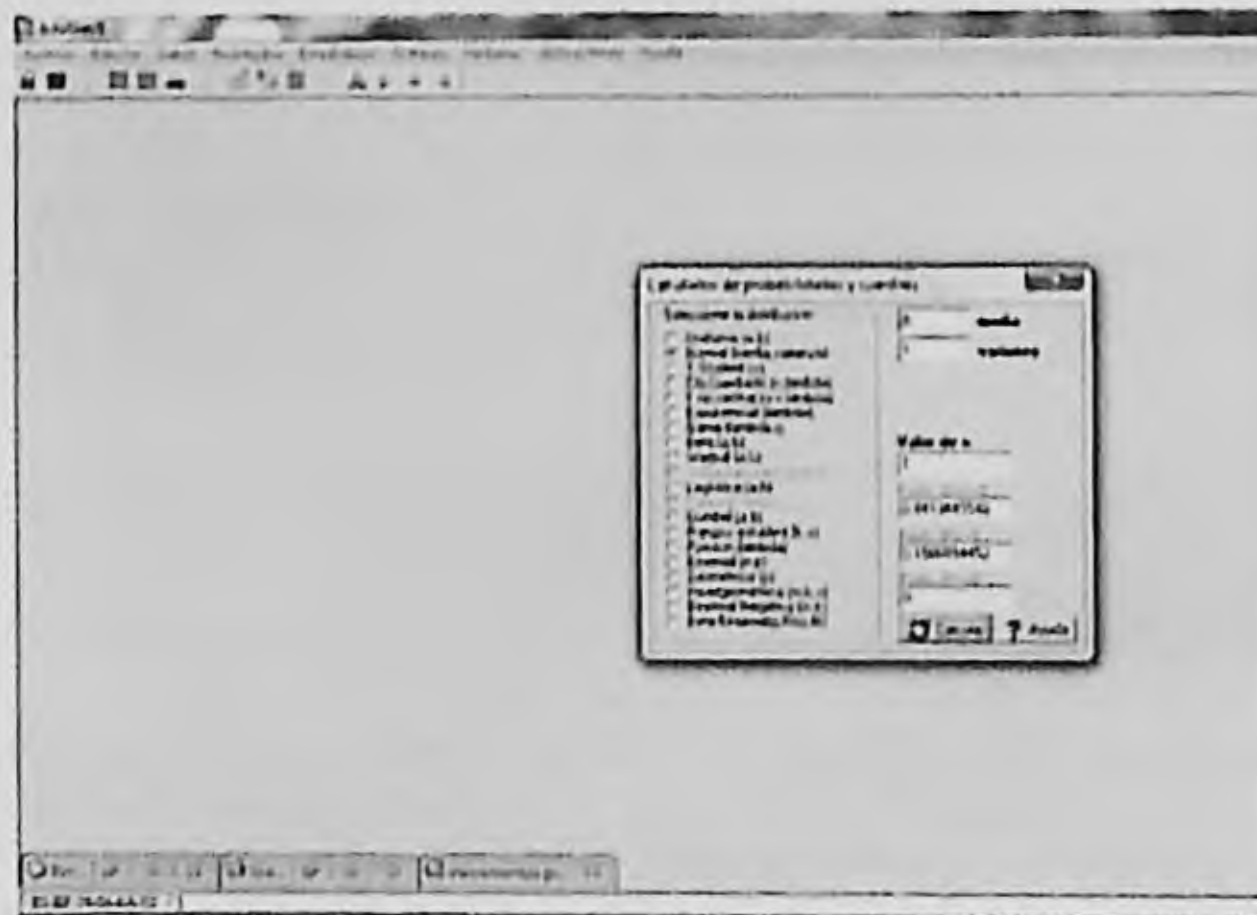
Dijimos que cualquier hoja de cálculo (como OpenOfficeCalc o Excel) calcula las probabilidades (o áreas) bajo la curva normal. Nos resulta más cómodo utilizar InfoStat®, que tiene estas operaciones incorporadas. Como con la binomial, no es necesario tener una base de datos abierta, nuevamente en “Estadísticas” elegimos “probabilidades y cuantiles”:



205



El “valor de x” es el puntaje z a partir del cual calcularemos la probabilidad. Vamos a introducir el valor 1 y solicitamos “calcular”.



Obtenemos tres resultados expresados así (redondeados):

Prob ($X \leq x$) = 0,8413

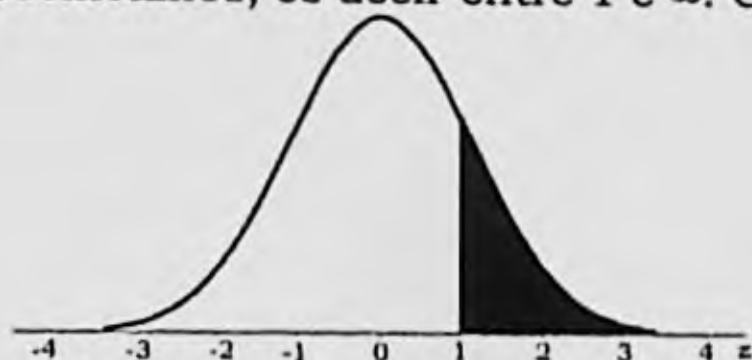
Prob ($X > x$) = 0,1587

Prob ($X = x$) = 0

El primero es la probabilidad de hallar valores de z iguales o menores que 1. Eso significa, gráficamente, el área bajo la curva normal, desde 1 hacia la izquierda, hasta menos infinito ($-\infty$). La representación gráfica de esta área es la siguiente:



El segundo valor es el complemento del primero (lo que le falta para llegar a 1, que es el área completa) y representa ahora la probabilidad de hallar valores por encima del valor que especificamos, es decir entre 1 e ∞ . Gráficamente es:



Esta probabilidad podría haberse obtenido restando de 1, la probabilidad anterior, ya que: $P(z \leq x) = 1 - P(z > x)$

El tercer valor dice que la probabilidad que tiene la variable de valer exactamente uno, es cero. Esto es así porque se trata de una variable continua, para la cual, como ya mencionamos, las probabilidades exactas son nulas. El equivalente gráfico de esta situación es que no hay área si se trata de un único valor de la variable. Al solicitar el resultado a InfoStat® para una variable continua, en ese recuadro siempre se obtiene un cero.

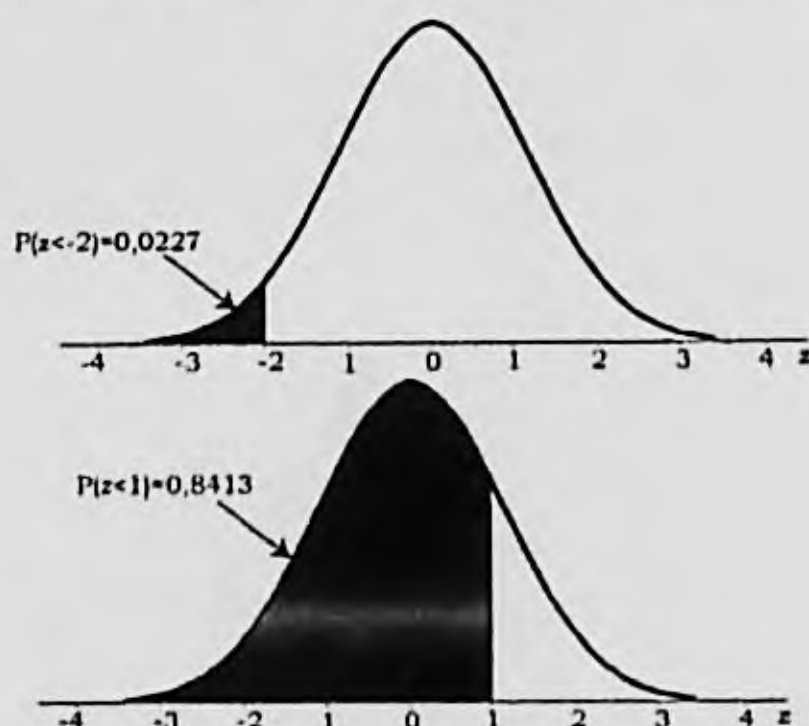
Por ahora usaremos el primero de los resultados, el que provee la probabilidad acumulada por debajo del valor que elegimos. Si solicitamos las probabilidades acumuladas por debajo de diferentes valores de z , empezando con los negativos, pasando por el cero y siguiendo por los positivos, obtenemos lo siguiente:

z	$P(<z)$	Ubicación
-3,0	0,00135	
-2,0	0,02275	
-1,0	0,15866	

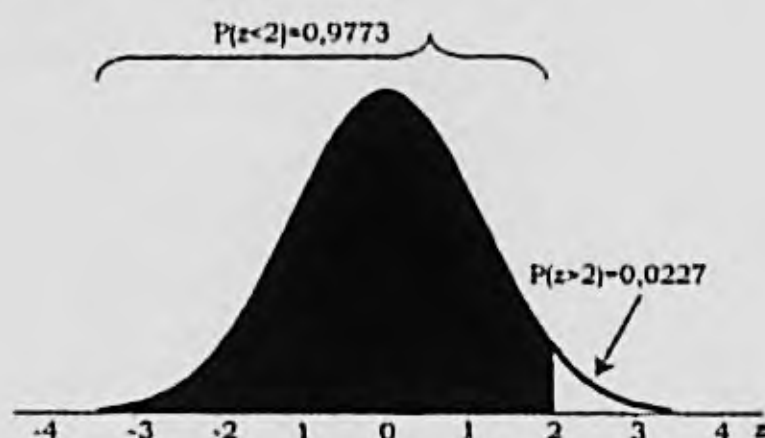
z	$P(<z)$	Ubicación
0,0	0,50000	
1,0	0,84134	
2,0	0,97725	
3,0	0,99865	

Las probabilidades acumuladas (es decir, las áreas a la izquierda) van creciendo desde casi cero en el valor más pequeño que pusimos ($z = -3$) y llegan hasta casi uno en el máximo valor ($z = 3$). En el modelo matemático, z tiene como campo de variación todos los valores, es decir, desde menos infinito hasta más infinito ($-\infty < z < \infty$), pero como vemos, en la realidad, los valores -4 y 4 son muy extremos, en

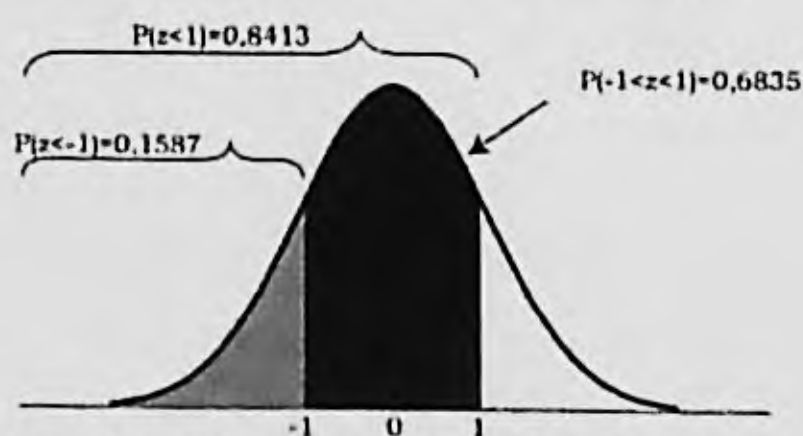
el sentido que las probabilidades acumuladas son **casi** cero y **casi** uno respectivamente. Aunque el modelo teórico tiene un comportamiento asintótico respecto del eje horizontal, en el gráfico, la curva se confunde con el eje para valores cercanos a 4. La notación para estos resultados es la siguiente (usando hasta cuatro decimales que es lo más frecuente), por ejemplo: $P(z < -2) = 0,0227$ ó también $P(z < 1) = 0,8413$. Las representaciones gráficas de estas probabilidades son las siguientes:



A continuación vemos la representación gráfica de la relación entre las probabilidades “por encima” y “por debajo” de $z=2$.



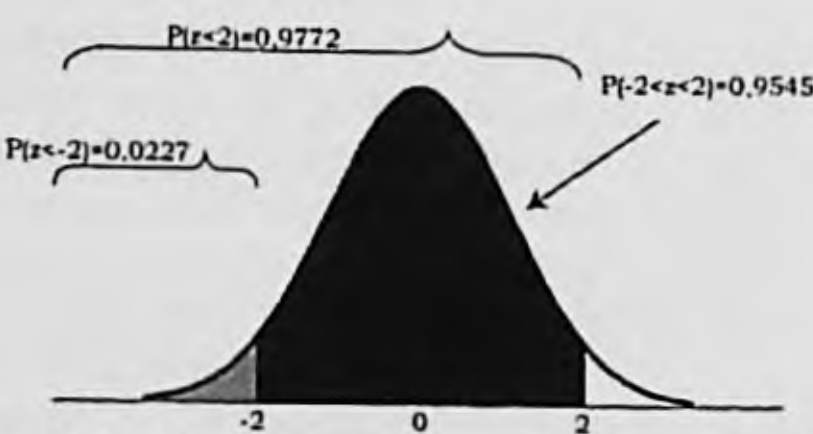
También se pueden identificar probabilidades **entre** valores de z , por ejemplo cuál es el área entre -1 y 1 (es decir cuál es la probabilidad de encontrar a z entre esos valores). Esto se escribe así: $P(-1 < z < 1)$. Para calcularla solo usaremos la información sobre la probabilidad acumulada: el área por debajo de -1 vale 0,1587 y el área por debajo de 1 es 0,8413, si restamos esas dos áreas tendremos lo que queda entremedio: $0,8413 - 0,1578 = 0,6835$, gráficamente:



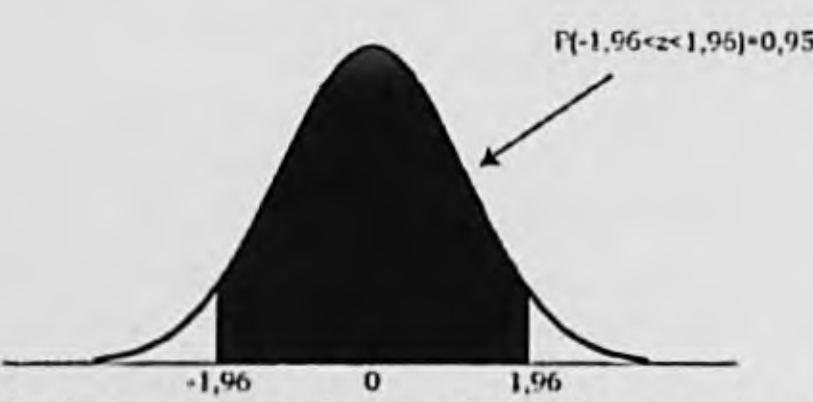
El área comprendida entre -2 y 2 se calcula del mismo modo, ya que

$$P(-2 < z < 2) = P(z < 2) - P(z < -2) = 0,9772 - 0,0227 = 0,9545$$

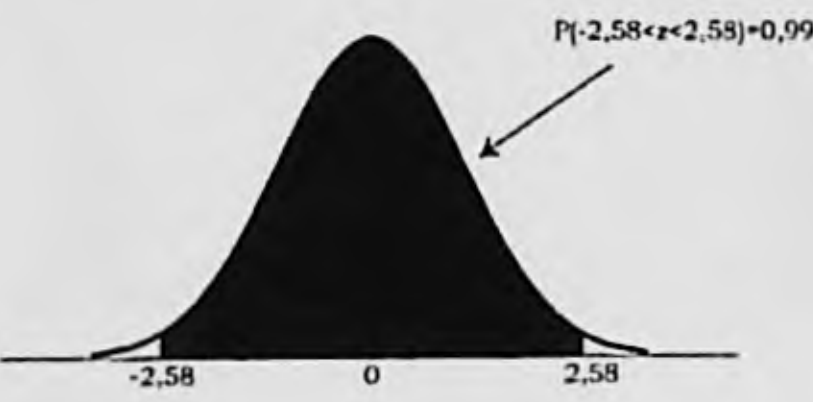
Verifique estos valores usando el procedimiento indicado con InfoStat®. La representación gráfica de esta área es:



Hay dos valores de z que conviene recordar, ya que delimitan áreas centrales que son de uso muy frecuente. El primero es el par de valores que dejan un 95% de los casos entre ellos. Según el cálculo del párrafo anterior, deben ser cercanos a -2 y 2 (± 2), ya que entre ellos se ubica el 95,45% del área total. En efecto, los valores exactos son $\pm 1,9599$, que alcanza con tomarlo como $\pm 1,96$. Gráficamente, tenemos entonces:



El otro par de valores de interés es el que delimita un área central del 99%, es el valor $\pm 2,5758$, al que podemos recordar como $\pm 2,58$. El gráfico de esta relación entre valor z y área es:



Usos de la distribución normal

La distribución normal es muy valiosa, por muchas razones, de las cuales nos interesan dos.

La primera es que es adecuada para modelar muchos fenómenos observables, en especial variables biológicas como el *peso* de los niños al nacer, la *talla* para diferentes edades. Hay variables psicológicas como el *coeficiente intelectual*, para las que se elaboran instrumentos de medición cuyos puntajes se distribuyen de manera normal. Otras variables, como el *rendimiento en la escuela*, a menudo, pueden aproximarse de manera adecuada con un modelo normal.

La segunda razón es que cuando se extraen muestras aleatorias de una población, algunas medidas que se calculan sobre esas muestras tienen una distribución que se aproxima a la normal a medida que las muestras tienen

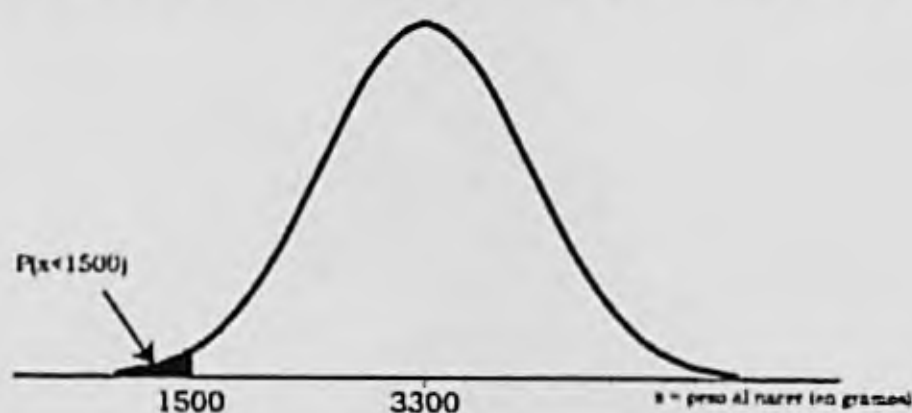
mayor tamaño. Eso será lo que nos permita realizar nuestras primeras estimaciones de valores poblacionales a partir de muestras.

Hasta este punto trabajamos con la distribución normal de una variable abstracta, sin unidades, a la que llamamos z , a cuyos valores pudimos asignar probabilidades. Es en términos de z que está expresada la función que describe la curva acampanada. Pero cuando vamos a trabajar con una variable real, como las que mencionamos, por ejemplo, el peso de los niños cuando nacen o el CI, es necesario disponer de una variable concreta, a la que llamamos x . ¿Qué relación tiene esa variable, cuya distribución podría modelarse bien con una curva normal, con la z , que nos permite hallar las probabilidades bajo el modelo normal? Es decir, ¿qué relación tiene x con z ? Ya la conocemos, porque z es el desvío estándar que definimos en el capítulo 3, es:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

Que cuenta la cantidad de desviaciones estándar (s) a que se encuentra un valor (x) de la media ($\bar{x}$). Para encontrar probabilidades correspondientes a valores reales de una variable y no solo los z abstractos, debemos transformar esos valores en puntajes z , con la expresión de arriba.

Veamos esto en un ejemplo: a partir de las historias clínicas de varios años de un hospital materno infantil, conocemos que el peso medio en el momento de nacer (de niños varones, a término, con madre entre 20 y 29 años) son 3300 gramos y que la desviación estándar es de 800 gramos. Además sabemos que la distribución normal es adecuada para describir la variable *peso al nacer*. Entonces podemos calcular la probabilidad que un niño al nacer tenga un peso por debajo de los 1500 gramos. El problema es averiguar el área sombreada en el siguiente gráfico:



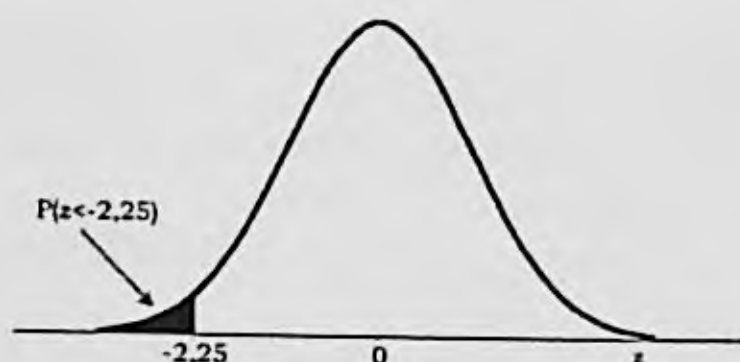
Para calcular el área marcada —que corresponde a la probabilidad solicitada—, vamos a transformar el valor de x (1500) a puntaje z , haciendo:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{1500 - 3300}{800} = -2,25$$

Ahora es equivalente solicitar la probabilidad de x menor que 1500 que la de z menor que -2,25, en símbolos:

$$P(x < 1500) = P(z < -2,25)$$

Y el gráfico anterior expresado en términos de z resulta:



A esta probabilidad sabemos cómo calcularla y obtenemos 0,0122.

Ésta es la probabilidad de hallar niños que al nacer tengan pesos inferiores a los 1500 gramos.

Del mismo modo podemos operar si nos interesa conocer la probabilidad de hallar niños que nazcan con peso comprendido entre 3500 y 4500 gramos. Transformando cada uno de los valores se obtiene:

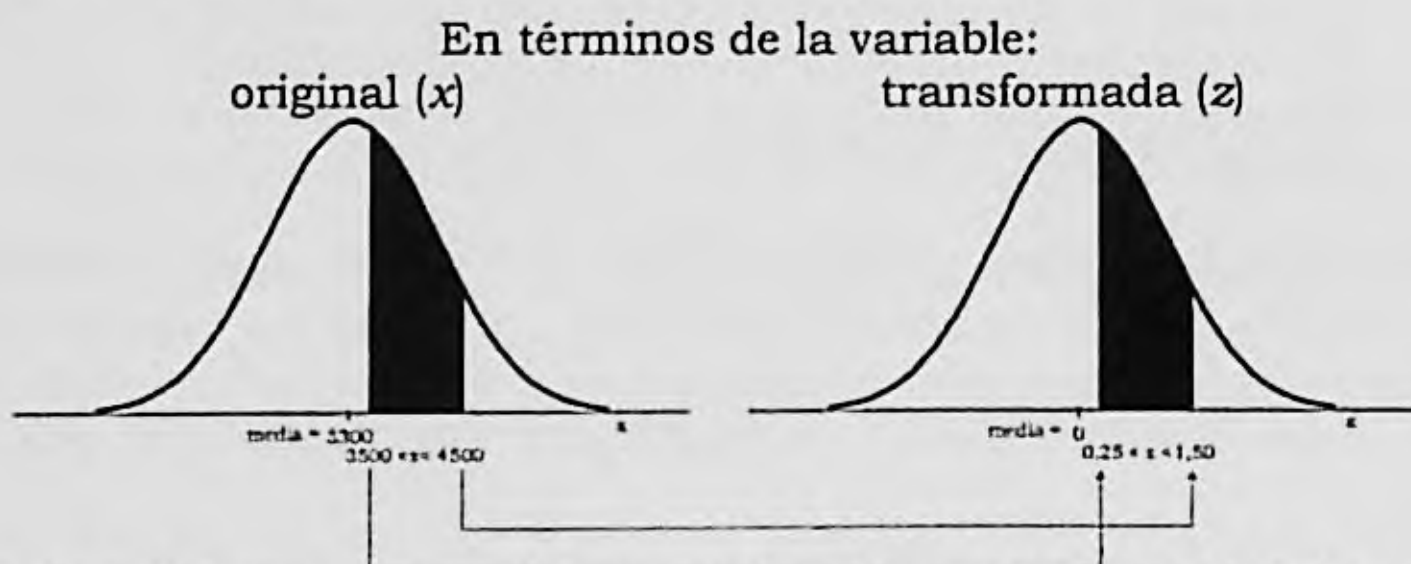
$$x = 3500 \rightarrow z = \frac{3500 - 3300}{800} = 0,25$$

$$x = 4500 \rightarrow z = \frac{4500 - 3300}{800} = 1,50$$

Entonces, que x (el peso de los niños al nacer) esté entre 3500 y 4500 gramos, equivale a que z (cantidad de desviaciones estándar) se encuentre entre 0,25 y 1,50. Esto se expresa simbólicamente así:

$$P(3500 < x < 4500) = P(0,25 < z < 1,50)$$

Y se representa gráficamente así:



Para calcular el área comprendida entre los dos puntos, es decir la probabilidad de hallar a x entre 3500 y 4500, restamos, a la probabilidad acumulada hasta $z=1,50$, la acumulada hasta $z=0,25$:

$$P(3500 < x < 4500) = P(0,25 < z < 1,50) = P(z < 1,50) - P(z < 0,25) = 0,9332 - 0,5987 = 0,3345$$

Leemos el resultado diciendo que la probabilidad de hallar a un niño que haya nacido con un peso comprendido entre los 3500 y los 4500 gramos es de 0,3345.

Toda variable que puede modelarse con una distribución normal puede transformarse a puntaje z y así hallar la probabilidad asociada a diferentes intervalos.

Las hojas de cálculo y, por cierto, los programas de análisis de datos incorporan esta operación, por lo que es posible ingresar directamente con los valores de la

variable e informar la media y la desviación estándar, para obtener las probabilidades correspondientes. Veamos el modo de obtener el resultado de manera directa, sin pasar por z . La probabilidad que nos interesa es, como antes:

$$P(3500 < x < 4500)$$

Que se calcula como la diferencia entre la probabilidad acumulada hasta 4500 menos la acumulada hasta 3500.

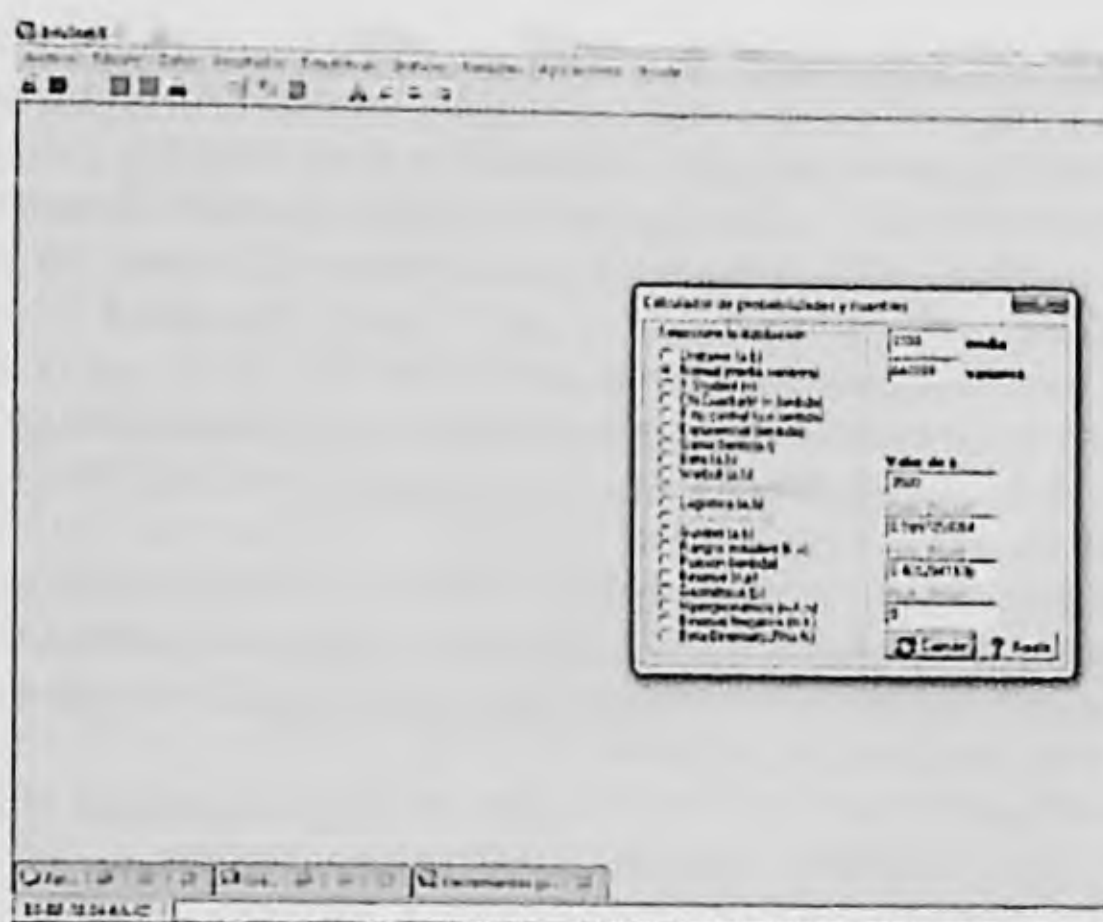
$$P(3500 < x < 4500) = P(x < 4500) - P(x < 3500)$$

Usando InfoStat®, solicitamos la distribución normal, pero ahora cambiamos la media y la varianza que aparece por defecto como cero y uno (para la variable z), por los valores de la media y la varianza que conocemos⁶⁰ e indicamos el primer valor de x :



La probabilidad acumulada hasta 4500 es 0,9332. Del mismo modo obtenemos la otra:

⁶⁰Contábamos con el dato de desviación estándar igual a 800, por lo que la varianza es de 640000



Que es 0,5987, entonces

$$P(3500 < x < 4500) = P(x < 4500) - P(x < 3500) = 0,9332 - 0,5987 = 0,3345$$

Es el mismo resultado al que habíamos llegado a través de la transformación a puntaje z , pero ahora pidiéndola directamente desde x . Aunque éste sea el procedimiento más cómodo para calcular probabilidades, es necesario estar familiarizado con la distribución normal estándar (en z), por los usos que haremos en los próximos capítulos.

La distribución normal tiene un uso muy amplio y varios campos de aplicación. Más adelante veremos que para aplicar algunos procedimientos de análisis, es necesario que los datos provengan de una distribución normal, y existen pruebas para verificar que esto se cumpla. Una primera aproximación para ver si un conjunto de datos tiene distribución cercana a la normal es observar el histograma y evaluar si su forma se aproxima a la normalidad: si es unimodal y aproximadamente simétrica, es decir si la mediana es semejante a la media. Luego se calculan los coeficientes de curtosis y asimetría y, si éstos están entre -0,50 y +0,50, puede aceptarse, en primera instancia, la normalidad de los datos.

La idea de grados de libertad

Antes de avanzar hacia los otros modelos de probabilidad que presentaremos en este capítulo, es necesario tener una idea aproximada de un concepto que juega un papel de importancia en esas distribuciones, el de "grados de libertad", un número que, como veremos enseguida, determina la forma de algunas distribuciones. Se trata de un concepto matemático complejo, al que vamos a definir como el número de observaciones linealmente independientes que existen en una suma de cuadrados⁶¹, pero del que haremos un uso exclusivamente instrumental. Su denominación es gl o bien df en inglés (degrees of freedom).

⁶¹Solo nos interesará contar con una idea intuitiva y ejemplos de aplicación.

Consideremos el caso del cálculo de la varianza, cuyo numerador es: $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$. Que es la suma de n términos, cada uno de ellos elevado al cuadrado. Identificar los grados de libertad de esa expresión equivale a responder a ¿cuántos términos de esa suma no dependen del valor que asumen los demás? Supongamos que se conoce la media muestral; esto establece un número fijo para la suma de las n observaciones: $x_1, x_2, \dots, x_n$, por lo que solo $n-1$ de ellas pueden elegirse “libremente”, la última observación queda determinada.

Por ejemplo, si se trata de cuatro observaciones de las que sabemos que su media es cinco, entonces la suma de los cuatro números debe ser 20 ¿Cuáles son los valores posibles para las cuatro observaciones x_1, x_2, x_3, x_4 ? Hay infinitas combinaciones posibles que darían suma igual a 20, fijemos arbitrariamente algunos de los valores: $x_1=2, x_2=4, x_3=4$, estos tres números suman 11, por lo que el cuarto solo puede ser 9 (para lograr la suma de 20 y que entonces la media sea 5). Otra combinación posible de valores es $x_1=4, x_2=5, x_3=10$, con lo que $x_4=1$ necesariamente. Cualquiera sea la elección que se haga, siempre serán tres de los cuatro valores los que puedan elegirse libremente; decimos entonces que los grados de libertad son tres.

En general, para este problema, los grados de libertad se calcularán como $n-1$, donde n es el número de observaciones, diremos así que, de n observaciones, $n-1$ son independientes, si se fija el resultado de la suma.

Una situación diferente es cuando se trata con una tabla de doble entrada con frecuencias marginales fijas; allí los grados de libertad se interpretan de modo distinto. No están relacionados con el número de observaciones sino con la dimensión de la tabla. Veamos la siguiente tabla de dos por tres, con frecuencias marginales fijadas:

	A	B	C	Total
R				10
S				30
Total	5	10	25	40

En ella se relacionan dos variables cuyas categorías son A, B y C para la de las columnas y R y S para la de las filas. En la tabla, hemos fijado las frecuencias marginales. No hay dudas que hay infinitos valores posibles para las frecuencias conjuntas que podrían sumar lo que piden las marginales. Nos preguntamos ¿Cuántas de las frecuencias de las celdas (frecuencias conjuntas) pueden elegirse libremente? Si elegimos el valor 2 para la celda RA, queda determinado un 3 en la celda SA (para que cumpla con sumar 5 verticalmente). Si luego elegimos un 4 en la celda RB, la SB queda determinada a ser 6 (para sumar 10 en la segunda columna). Al mismo tiempo, la celda RC debe ser también 4 para sumar 10 en la primera fila y también se determina la celda SC, que no puede ser sino 21, para sumar 30 en la segunda fila y 25 en la tercera columna. La tabla queda así completada, solo las celdas RA y RB fueron elegidas, las demás quedaron determinadas por la exigencia de respetar las frecuencias marginales.

	A	B	C	Total
R	2	4	4	10
S	3	6	21	30
Total	5	10	25	40

¿Cuántos serán los grados de libertad en este ejemplo?, de las seis celdas que debían completarse con frecuencias, solo 2 pudieron elegirse libremente. Éstos últimos son los grados de libertad: 2.

De manera general, para una tabla de dimensión f por c (donde f es la cantidad de filas y c la de columnas, como antes), los grados de libertad se calculan multiplicando $(f-1)$ por $(c-1)$. En la tabla que acabamos de usar como ejemplo, la dimensión es 2 por 3, por lo que los grados de libertad son $(2-1)*(3-1)=1*2=2$, que son las dos celdas cuyas frecuencias pudimos fijar “libremente”.

A los fines de nuestro curso, esta introducción a la idea de grados de libertad es suficiente, el concepto es amplio y su tratamiento más profundo exigiría algunos conocimientos de álgebra lineal, que no necesitamos desarrollar aquí.

La distribución ji cuadrado (χ^2)

Esta distribución es el primer modelo que veremos con forma asimétrica⁶². Una de sus aplicaciones es la estimación de la varianza, nosotros la utilizaremos más adelante, cuando tratemos sobre estadística no paramétrica, en especial para probar si una variable puede modelarse con cierta distribución (pruebas de bondad de ajuste) y también para analizar la independencia entre variables nominales.

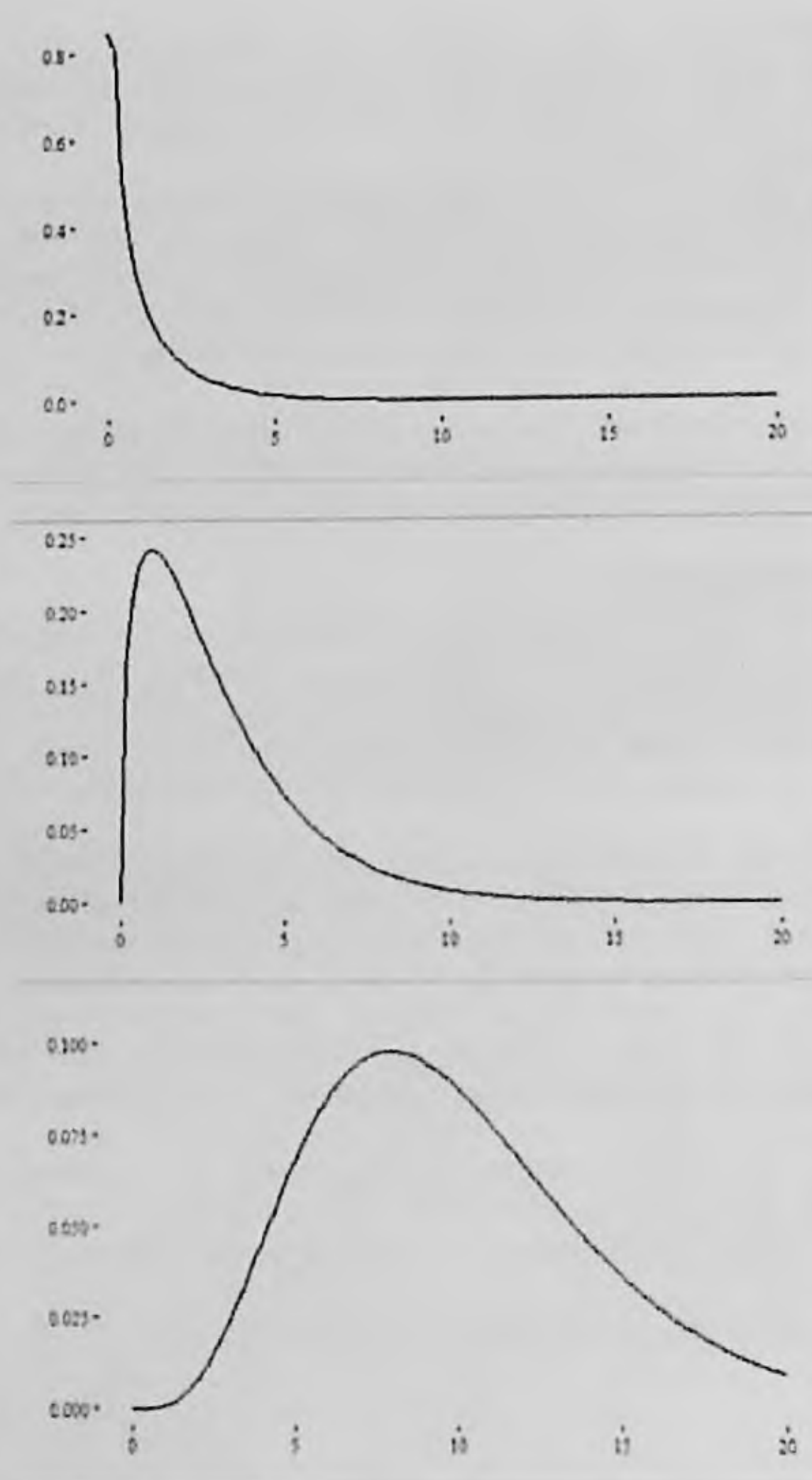
Del mismo modo en que tratamos a la distribución normal, no haremos uso de la fórmula para calcular probabilidades, sino que las buscaremos en una tabla disponible en cualquier hoja de cálculo. Además de la forma asimétrica, hay otra diferencia con la distribución normal, la χ^2 no es una distribución única: no es suficiente especificar un valor de la variable para conocer su probabilidad acumulada sino que la forma que tenga dependerá de los recientemente mencionados “grados de libertad”, los cuales en una primera aproximación tomaremos como $n-1$.

Las siguientes son las formas diferentes que tiene la distribución χ^2 para diferentes valores de los gl , el eje horizontal indica los valores de la variable χ^2 . Como en la normal, las probabilidades se representan como áreas bajo la curva:

Distribución χ^2 con uno, tres y diez grados de libertad:



⁶²La definición de la variable χ^2 con n grados de libertad es la suma de n variables aleatorias normales estándar elevadas al cuadrado: $\chi^2 = \sum_{i=1}^n z_i^2$, en la que cada z es una variable distribuida normalmente con media cero y desviación estándar igual a uno.



Los gráficos muestran que a medida que se incrementan los grados de libertad, la forma de la distribución gana en simetría y se asemeja a la distribución normal.

Para hallar las probabilidades correspondientes a valores de la variable, usaremos nuevamente InfoStat®. Vamos a calcular la probabilidad de hallar valores de una variable con distribución χ^2 con diez grados de libertad, superiores a 8, a lo que expresamos como:

$$P(\chi_{10}^2 > 8)$$

Donde hemos indicado los grados de libertad (10) como subíndice.



Nuevamente obtenemos dos resultados válidos: el área por debajo ($P(X \leq x)$) y el área por encima ($P(X > x)$) del valor que especificamos, las cuales son complementarias, es decir que su suma es igual a uno, que es el área completa bajo la curva. Nos interesa la segunda, por lo que:

$$P(\chi^2_{10} > 8) = 0,6288$$

Que es la superficie que está sombreada en el gráfico anterior.

La distribución χ^2 tiene muchas aplicaciones, una de las más frecuentes es para poner a prueba la independencia entre dos variables nominales. El vínculo entre esta distribución y el puntaje χ^2 que ya se mencionó, se verá más adelante.

La distribución t de Student

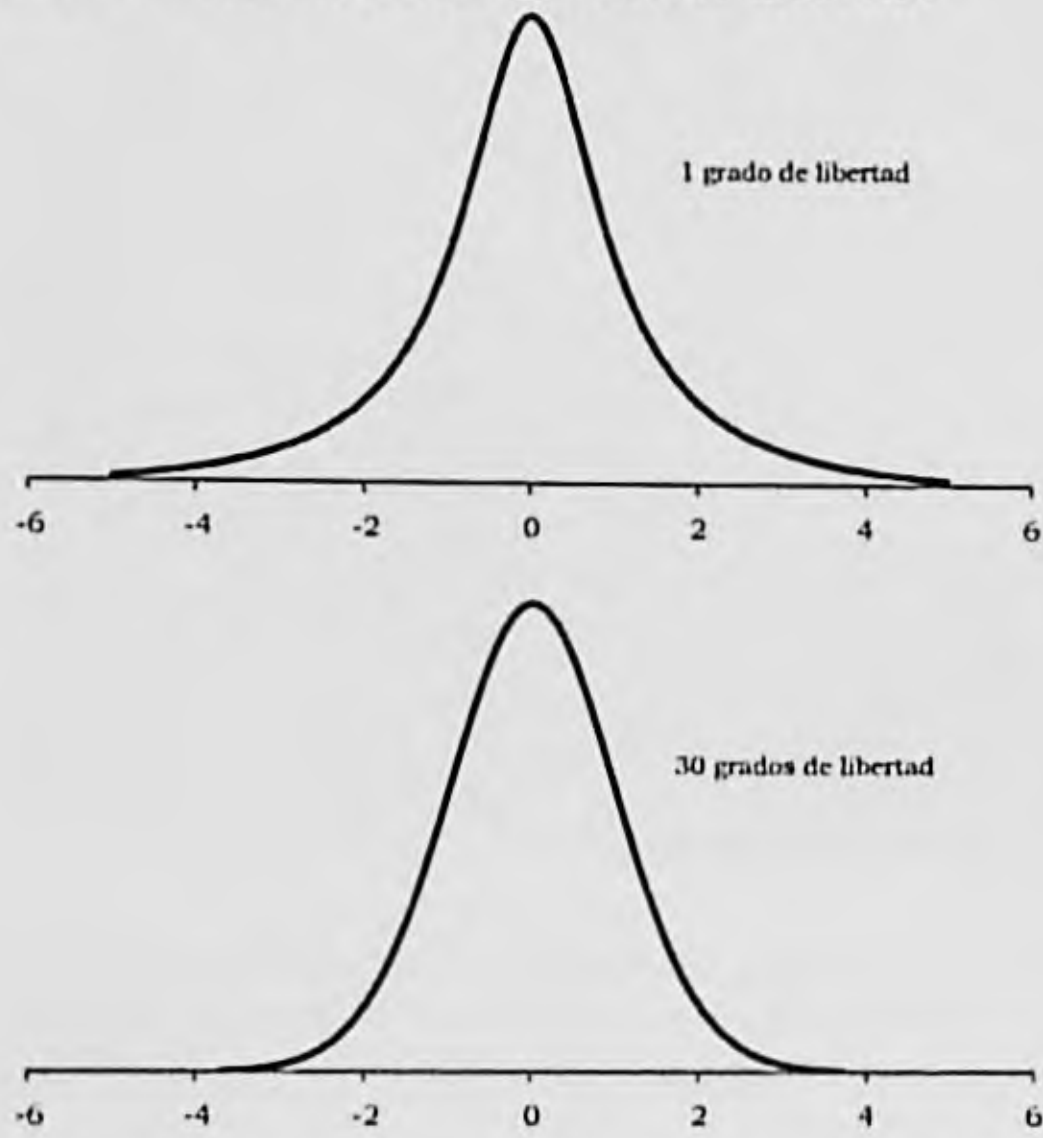
El tercer modelo especial de probabilidades para variables continuas que nos interesa describir es la distribución t, conocida como "de Student", por el seudónimo que utilizaba quien la aplicó por primera vez, William Gosset⁶³.

Se trata de una distribución que, como la normal es simétrica y como la χ^2 depende de los grados de libertad⁶⁴. Su forma es la siguiente, dependiendo de los grados de libertad:

⁶³ Químico y Estadístico inglés (1876-1937), era empleado de la cervecera Guinness y allí desarrolló procedimientos adecuados para trabajar con pequeñas muestras. Una de las versiones acerca de por qué publicó con el seudónimo Student es que la empresa temía que se revelaran secretos industriales.

⁶⁴ La definición de la variable con distribución t con n grados de libertad es el cociente entre una variable con distribución normal estándar y la raíz cuadrada de una χ^2 dividida por sus grados de libertad: $t = \frac{z}{\sqrt{\frac{\chi^2_n}{n}}}$

Distribución t de Student con diferentes grados de libertad:



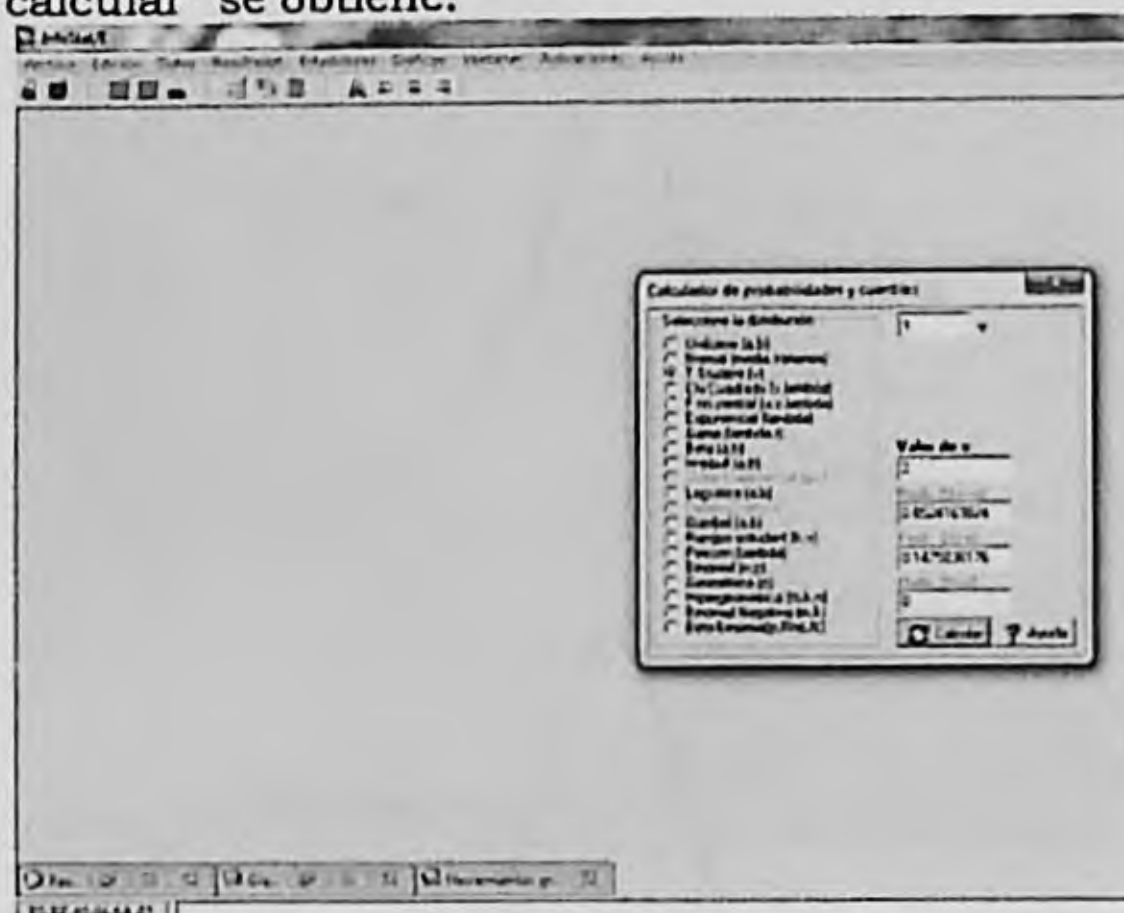
Con 30 grados de libertad, la distribución toma una forma que va haciéndose más similar a la normal. Las probabilidades acumuladas se buscan con InfoStat®, donde debe informarse los grados de libertad y el valor de la variable. La probabilidad que una variable con distribución t con un grado de libertad, supere a 2 se escribe:

$P(t_1 > 2)$

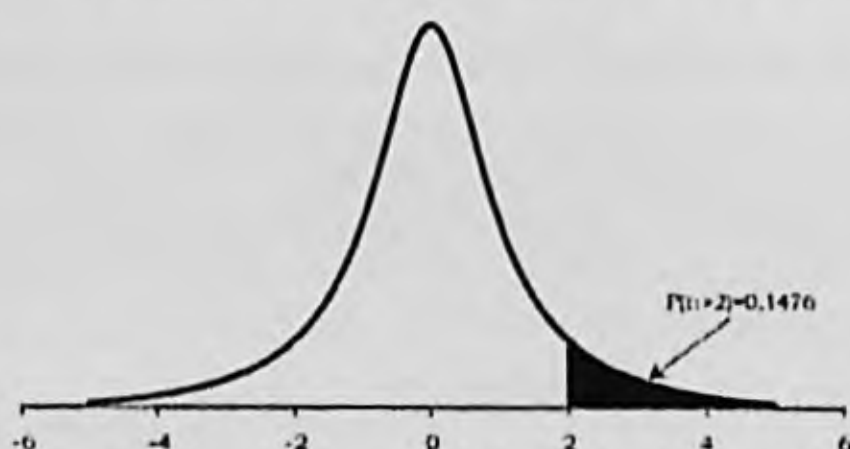
Y se solicita:



Luego de pedir "calcular" se obtiene:



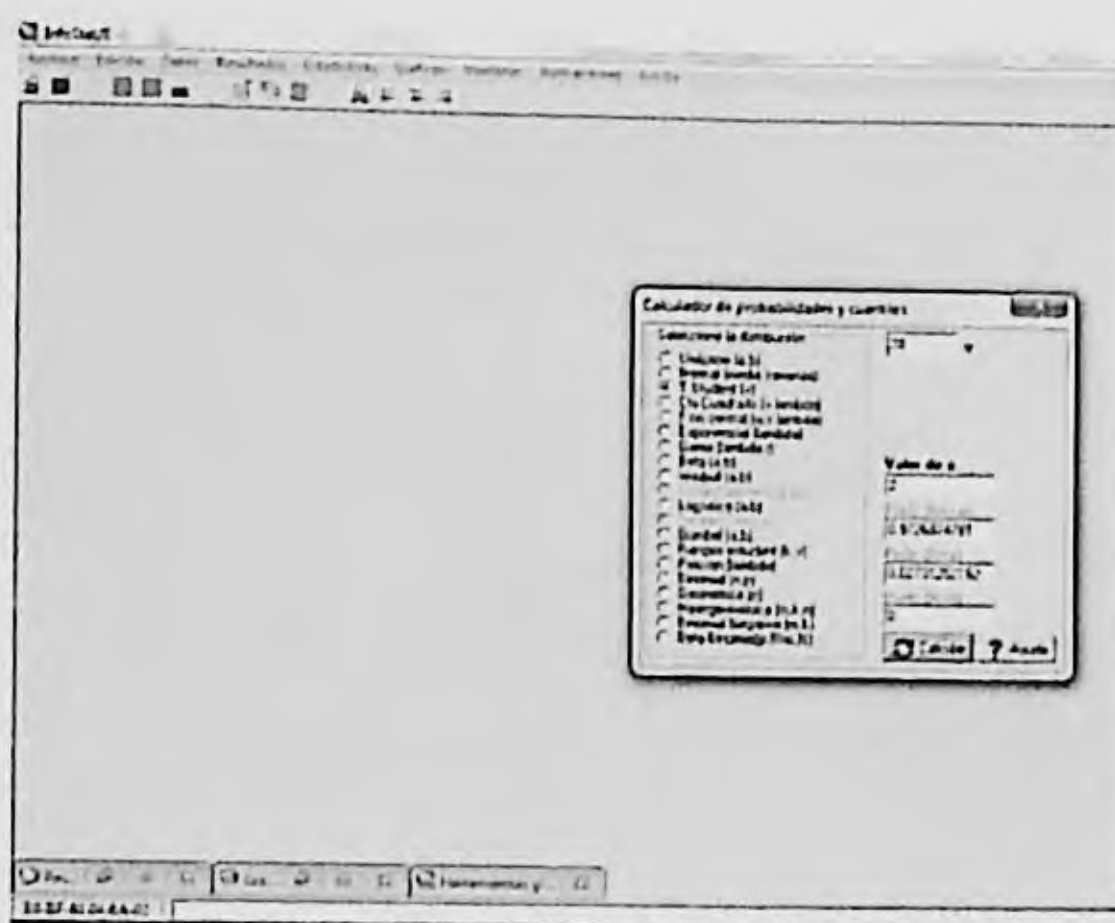
Como en las otras distribuciones, tenemos la probabilidad acumulada por debajo ($\text{Prob}(X \leq x)$) y la probabilidad por encima ($\text{Prob}(X > x)$) que, cuando se suman, dan uno. El resultado que nos interesa para $P(t_1 > 2)$ es 0,1476 y se representa gráficamente así:



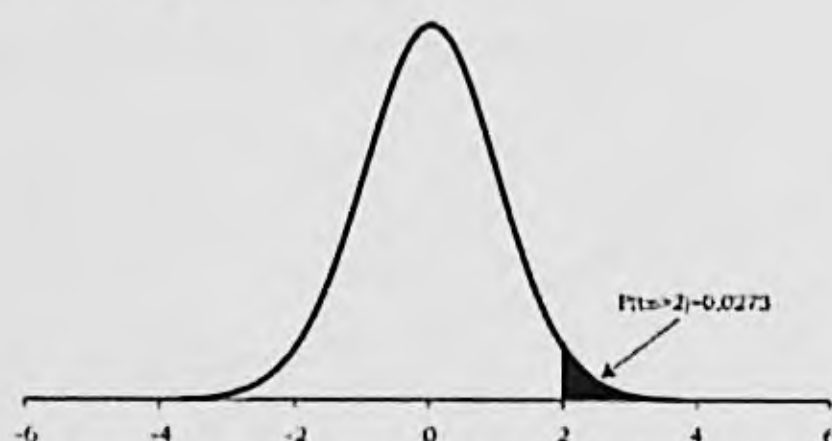
Para ver los efectos del cambio en los grados de libertad, vamos a comparar la probabilidad que una variable t con 30 grados de libertad supere a 2, es decir:

$$P(t_{30} > 2)$$

InfoStat® ofrece:



Por lo que $P(t_{30} > 2) = 0,0273$ que se representa:



En los gráficos y en los valores de las probabilidades se ve que el aumento de los grados de libertad en la distribución t tiene el efecto de reducir la probabilidad de los valores extremos.

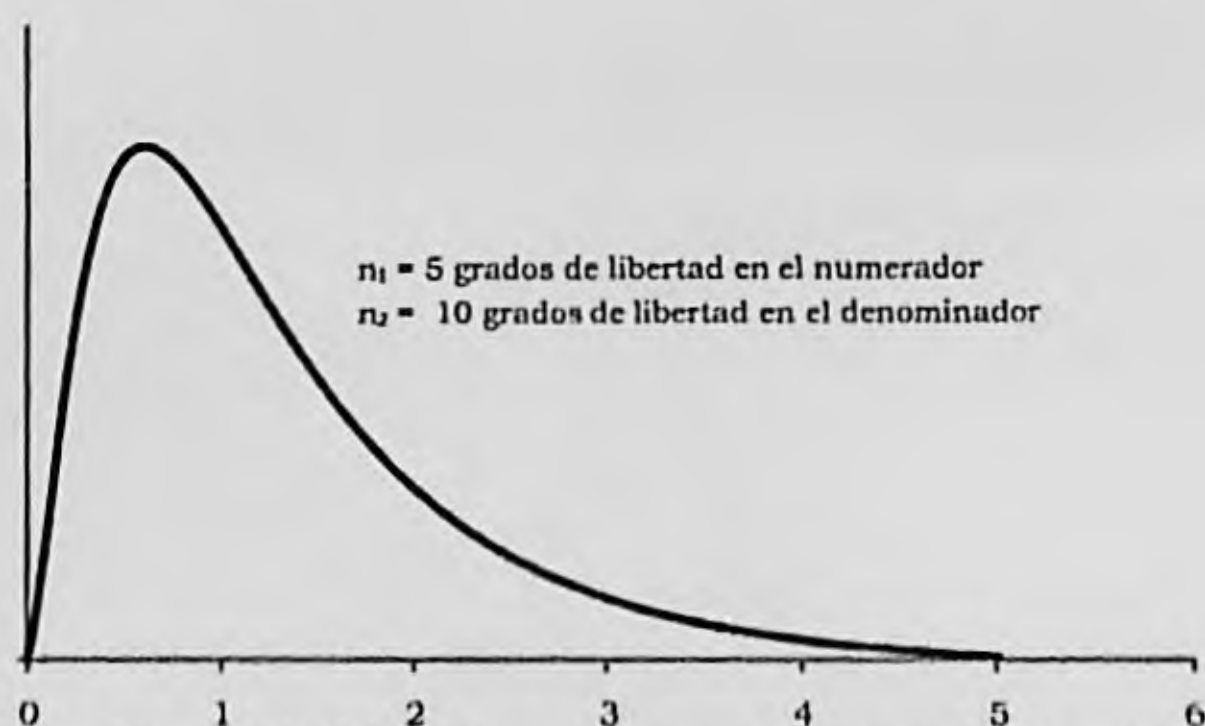
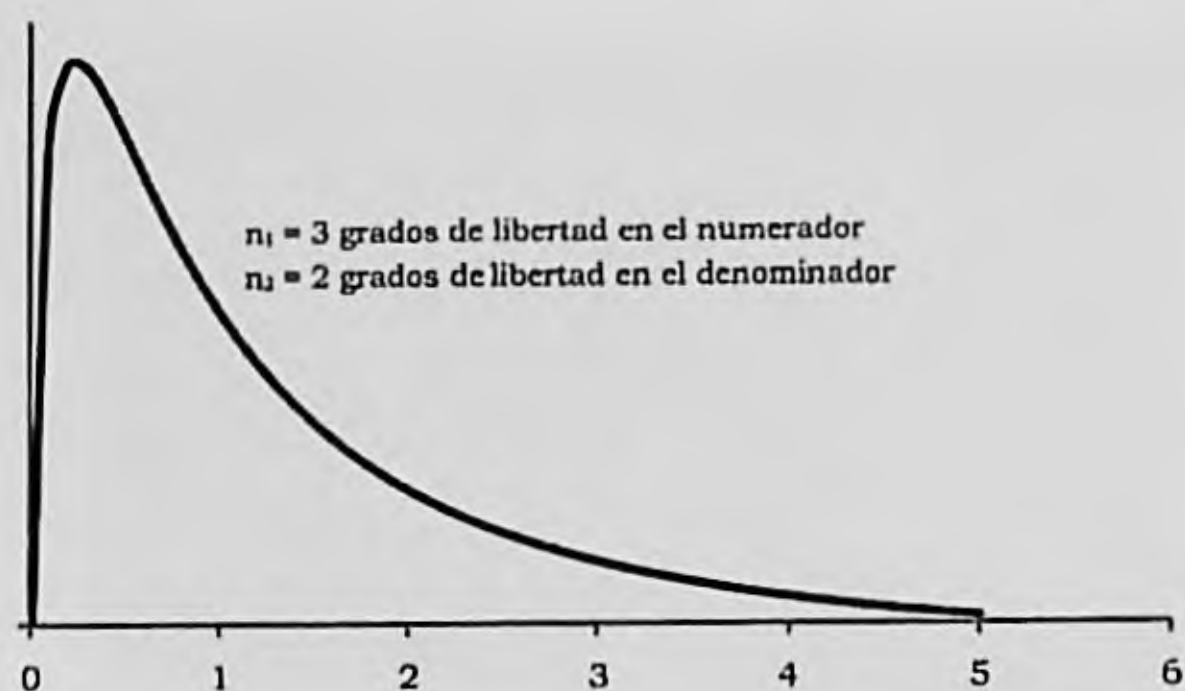
Cuando trabajemos con inferencia, veremos que la distribución t se aplica en reemplazo de la normal, cuando se trabaja con muestras pequeñas y que se va volviendo más equivalente a ella a medida que las muestras son de mayor tamaño.

La distribución F

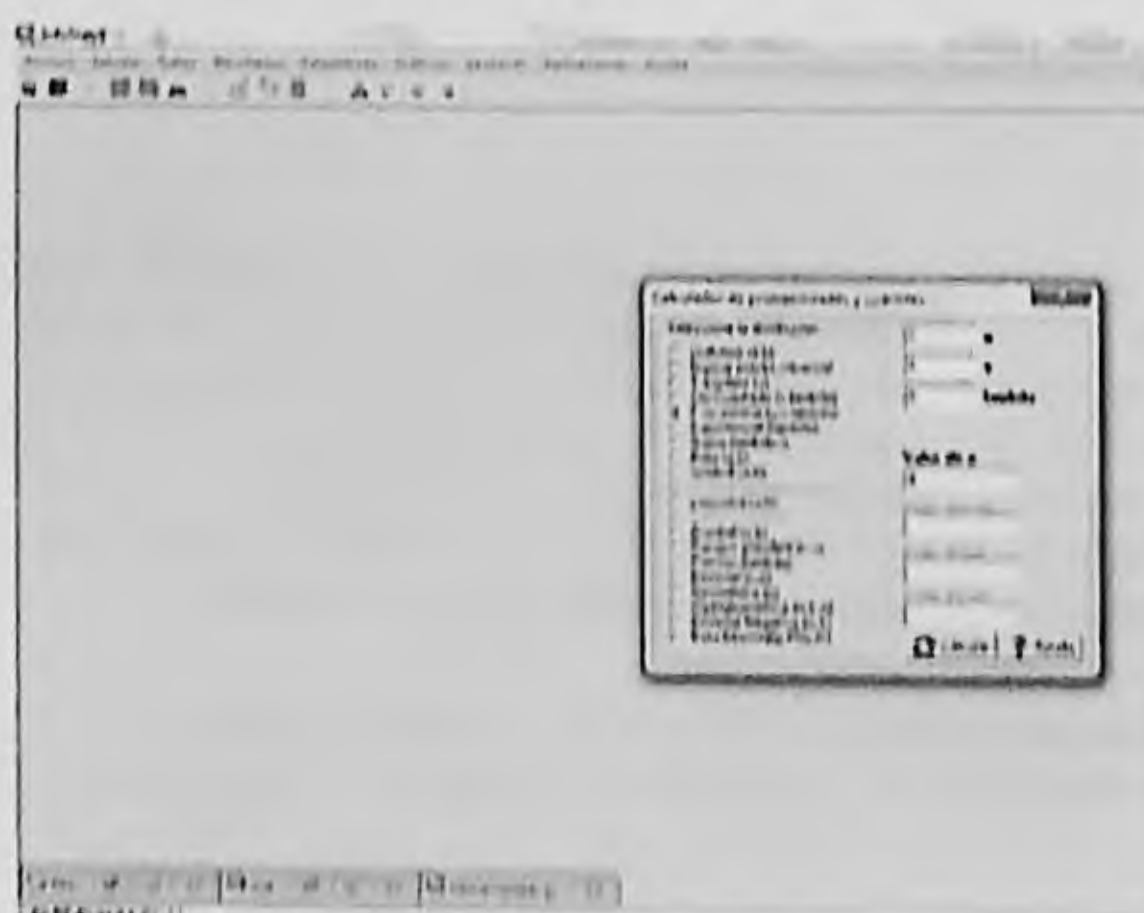
El último de los modelos de probabilidad que necesitamos para usar en los próximos capítulos en la realización de inferencias, es la distribución F de Fisher. Es una distribución asimétrica, no negativa y su forma depende de los valores de los grados de libertad del numerador y del denominador⁶⁵. Es una curva muy asimétrica a la derecha cuando los grados de libertad son pocos y tiende a la normalidad a medida que aumentan los gl . Veamos dos casos de combinaciones de grados de libertad en el numerador y en el denominador:

⁶⁵Estos nombres para los grados de libertad se originan en que la F se define como el cociente de dos distribuciones χ^2 , cada una dividida por sus grados de libertad: $F_{n_1, n_2} =$

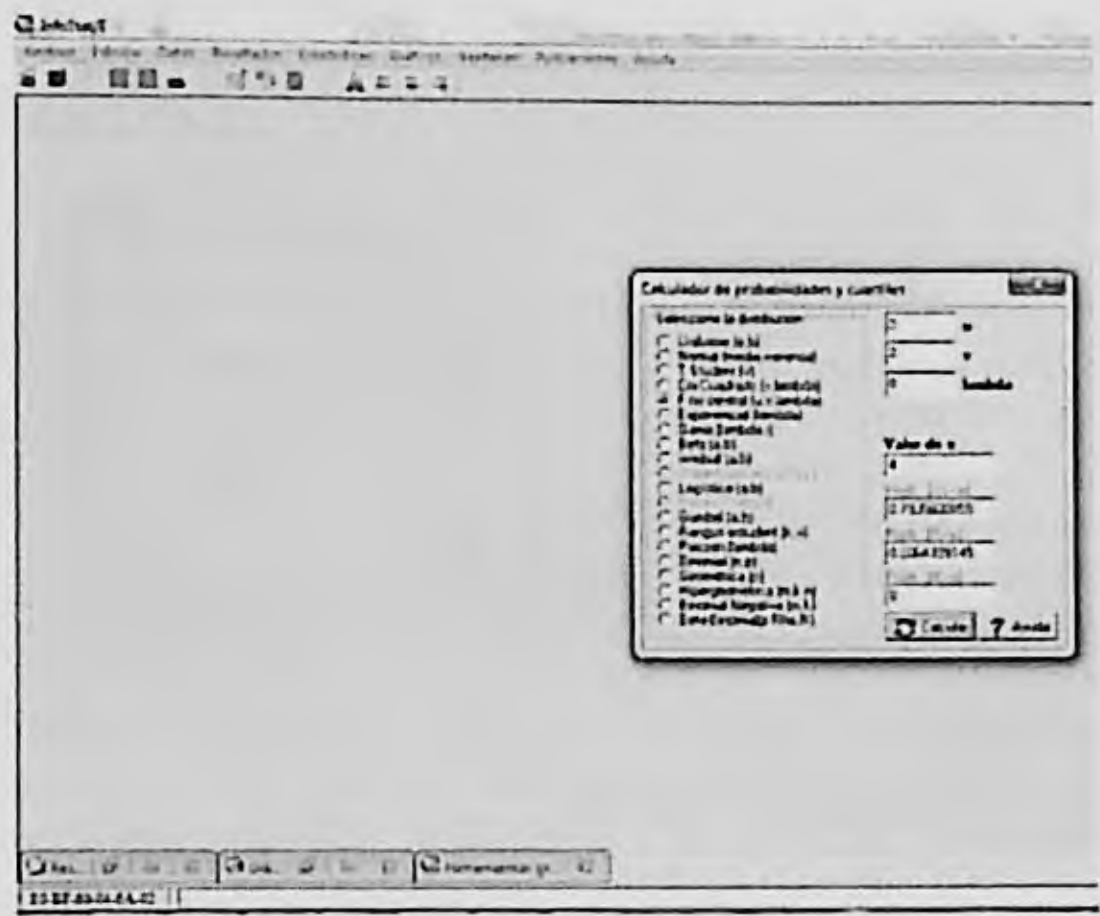
$$\frac{\chi_1^2/n_1}{\chi_2^2/n_2}$$



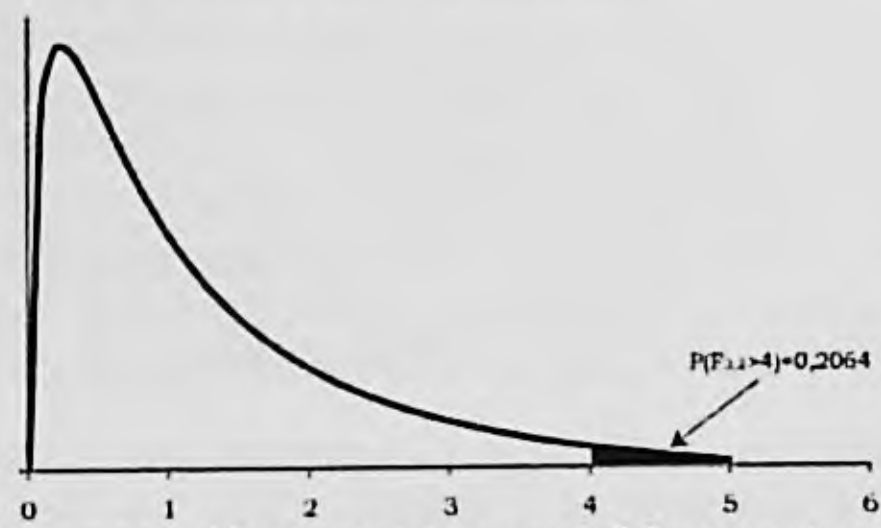
En el cálculo de las probabilidades, ahora debemos informar los grados de libertad del numerador y del denominador separadamente. Para solicitar, por ejemplo, la $P(F_{3,2} > 4)$, procedemos como antes, indicamos los *gl* en los dos espacios ofrecidos y dejamos lambda en cero:



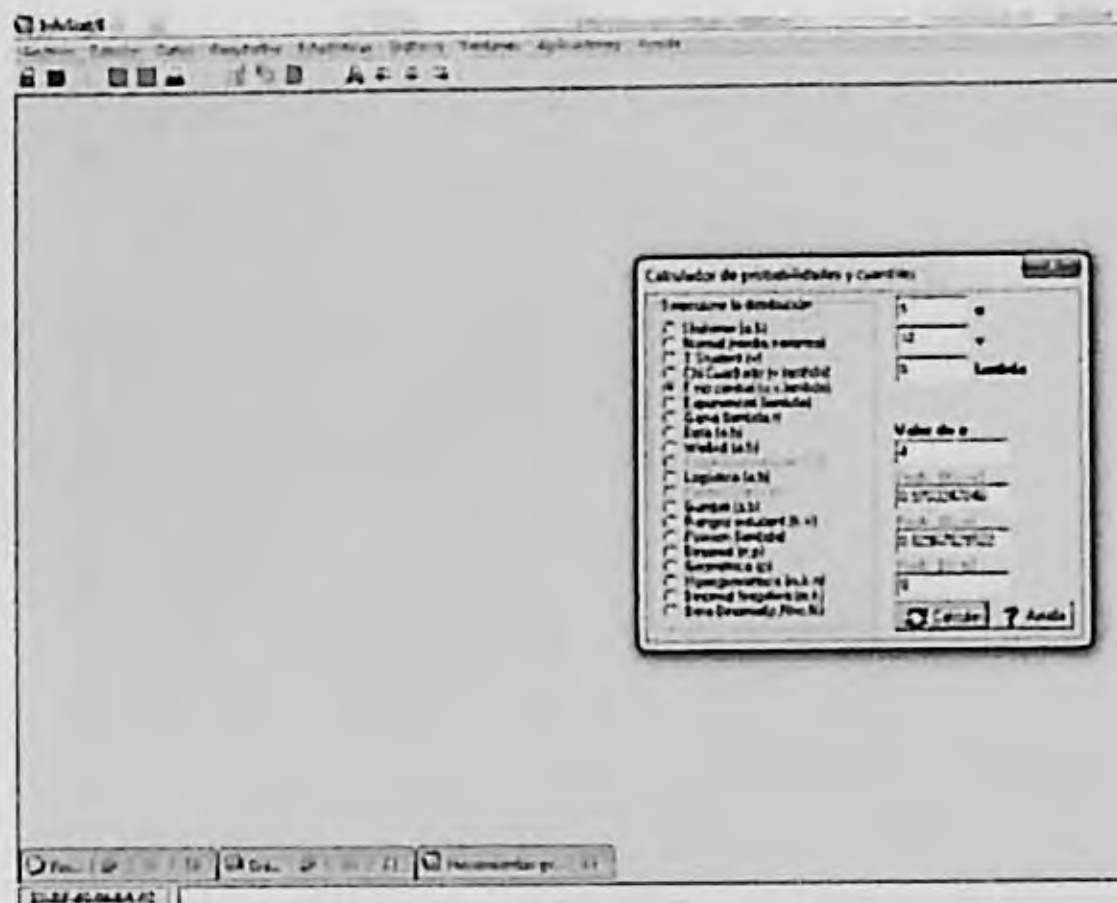
Y obtenemos:



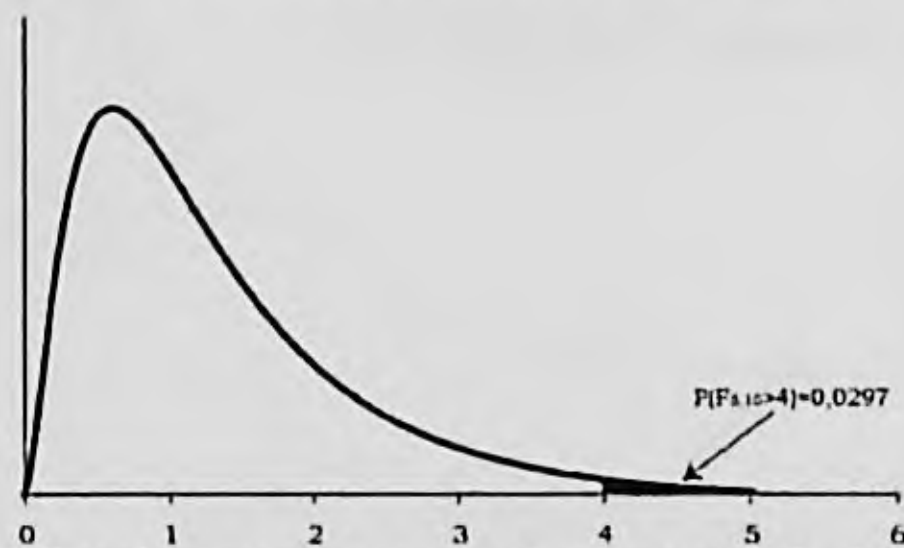
De modo que $P(F_{3,2} > 4) = 0,2064$. Cuyo gráfico es:



Cuando pedimos la comparación con otra variable que tenga distribución F con otros grados de libertad (5 y 10, por ejemplo), obtenemos lo siguiente:



Es decir: $P(F_{5,10} > 4) = 0,0297$. Esa probabilidad corresponde al área siguiente:



También en esta distribución vemos que el aumento de los *gl* tiene el efecto de reducir la probabilidad de los valores extremos. Con 3 y 2 *gl*, el valor 4 deja por encima al 20% del área total (0,2064), cuando aumentamos los *gl* a 5 y 10, ese mismo valor deja un poco menos del 3% (0,0297) por encima.

La distribución F es usada para comparar la dispersión de dos distribuciones, a través del cociente de las varianzas.

Capítulo 9 Distribuciones en el muestreo

Parámetros y estimadores

En este capítulo se ligan los conceptos de muestreo y de probabilidad para establecer las bases de los procedimientos de inferencia estadística. La parte III tratará con datos que provienen de muestras probabilísticas, es decir, unidades de análisis que habrán sido seleccionadas usando alguno de los procedimientos de muestreo probabilístico. En consecuencia, las medidas que se calculen a partir de esos datos dependerán del azar⁶⁶.

Por ejemplo, el conjunto completo de estudiantes de Psicología en 2014 tenía una edad promedio de 26,8 años (UNC, 2014), si ese año se hubiese extraído una muestra de 20 alumnos al azar, la edad promedio podría haber sido un número muy diferente de 26,8 años. Recordemos que las muestras tienen carácter aleatorio, no podemos asegurar que la variable que estamos estudiando se asemeje en la muestra al valor que tiene en la población. Por eso, el resultado que obtengamos en la muestra depende del azar: se trata de una variable aleatoria. La media muestral, por ser una medida calculada sobre los valores obtenidos en una muestra aleatoria, es una variable aleatoria, su valor depende de cuáles sean los casos que constituyen la muestra y esto depende del azar, que es lo que hemos pedido como requisito al procedimiento de muestreo.

Estamos entonces refiriéndonos a entidades diferentes cuando hablamos de la media poblacional y la media muestral, aunque el procedimiento de cálculo sea el mismo. La media poblacional es un valor que puede ser conocido (si hemos observado a toda la población) o desconocido, pero en todo caso es fijo. Cuando hacemos estimaciones no sabemos cuánto vale la media de la población, pero sí sabemos que es un número estable, fijo. Por el contrario, la media muestral—y porque depende de los casos que hayan sido aleatoriamente seleccionados para constituir la muestra—depende finalmente del azar, por eso es una variable aleatoria.

Las medidas que se refieren a la población se denominan **parámetros** también llamados **parámetros poblacionales**, para acentuar que se trata de la población), por ejemplo, el valor de 26,8 años que mencionamos más arriba es la media paramétrica o también media poblacional, porque fue calculada sobre todos los alumnos de Psicología. Si se trabaja con variables cualitativas, se tratará de la proporción de alguna categoría (proporción de varones, proporción de afectados de cierta patología, de egresados, de repitentes, etc.), se tratará allí de la proporción paramétrica o proporción poblacional. O bien de la varianza, la desviación estándar o también de coeficientes de correlación (Pearson, Spearman). Todas las medidas que hemos mencionado hasta aquí pueden calcularse sobre la población completa si se hace un censo, o bien sobre una muestra que debe ser aleatoria si se quiere luego hacer inferencias. En todos los casos que se trate de medidas que se refieran a la población completa, las llamaremos paramétricas. Solo podrían ser conocidas en aquellos casos en que la

⁶⁶ Las fórmulas para hacer inferencias que aparecen en este capítulo y los siguientes, son correctas si el muestreo es irrestricto aleatorio, cuando se usen otros diseños de muestra (siempre probabilísticos), será necesario introducir ajustes; el texto de Scheaffer et al (1987) es una adecuada referencia para esas correcciones.

población íntegra fuera observada, es decir, si se hiciera un relevamiento exhaustivo, un censo; allí no hay inferencia. Por eso, lo que interesa en estadística inferencial son las situaciones en que no conocemos los parámetros de una población, porque entonces deberemos **estimarlos** desde la muestra. Diremos que buscamos estimar diferentes parámetros. Ese es el tema que tratará el próximo capítulo: "Estimación de Parámetros". También puede suceder que haya algún valor hipotético para un parámetro, al que necesitemos poner a prueba. En ese caso usaremos los datos de la muestra para **probar una hipótesis**, de eso trata un amplio campo que trataremos más adelante llamado "Pruebas de Hipótesis".

Las medidas calculadas sobre los datos de la muestra se denominan **estadísticos** también llamadas **estadísticos muestrales**, nuevamente para acentuar de dónde provienen. Hablaremos entonces de la media muestral, la proporción, la varianza o el coeficiente de correlación muestral. Los valores que de ellos obtengamos en la muestra permitirán estimar los correspondientes valores paramétricos. Por eso decimos que la media muestral es el estimador de la media poblacional y del mismo modo con la proporción, la varianza, la desviación estándar o los coeficientes de correlación. La media muestral es el promedio de la variable (cuantitativa) que se observa en la muestra de n casos seleccionados. Para calcular la proporción, se debe contar con una variable categórica (o categorizada) y seleccionar las categorías de interés, los que hemos llamado éxitos en la distribución binomial. Si se trata de varones y mujeres, puede elegirse la proporción de mujeres, si hay alumnos que quedan libres, regularizan o promocionan (una categorización de las notas), puede ser la proporción de promocionales. La proporción es como sabemos, el cociente entre los casos que resultan en la categoría de interés y la cantidad total de casos.

Para distinguir entre las medidas calculadas sobre toda la población y las de la muestra usaremos diferentes símbolos. De manera general, las letras latinas se usarán para identificar medidas descriptivas obtenidas sobre datos muestrales, mientras que usaremos letras griegas para referirnos a los valores de la población. Pero esto no es siempre así, por razones de tradición en el uso, en el caso de la proporción se distingue la poblacional de la muestral usando P (mayúscula) para la primera y p (minúscula) para la segunda⁶⁷. La siguiente es la notación que usamos y la correspondencia entre valores poblacionales y muestrales.

⁶⁷Dado que puede haber confusión al escribir p o P , es frecuente usar $\hat{p}$ para indicar la proporción muestral, con la misma notación que se usó en regresión para indicar el valor estimado de la variable dependiente.

	En la población	En la muestra
Cantidad de casos	N	n
Media	μ (mu)	$\bar{x}$
Proporción	P	$\hat{p}$
Varianza	σ^2 (sigma cuadrado)	s^2
Desviación Standard	σ (sigma)	s
Diferencia de medias	$\mu_1 - \mu_2$	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2$
Diferencia de proporciones	$P_1 - P_2$	$\hat{p}_1 - \hat{p}_2$
Cociente de varianzas	$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	$\frac{s_1^2}{s_2^2}$
Coefficiente de correlación de Pearson	ρ (rho)	r
Coefficiente de correlación de Spearman	ρ_s (rho ese)	r_s
Pendiente de la recta de regresión	β_1 (beta uno)	b_1
Ordenada al origen de la recta de regresión	β_0 (beta cero)	b_0

Las operaciones que se realizan para calcular los estadísticos que hemos tratado hasta aquí son las mismas que para los parámetros, solo difieren los nombres de cada elemento. Así, para calcular μ debemos hacer como con $\bar{x}$; sumar todos los valores y dividir por el total de casos, pero en lugar de:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i * f_i}{n}$$

Escribiremos:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^N x_i * f_i}{N}$$

Que solo difiere en el nombre de la media y la cantidad de casos.

En el caso de la proporción, llamamos x a la cantidad de casos que se encuentran en la categoría de interés (la cantidad de éxitos):

$$\hat{p} = \frac{x}{n}$$

Mientras que en la población, si X es la cantidad de éxitos:

$$P = \frac{X}{N}$$

Una excepción a esto es el caso de la varianza, porque el modo de calcularla es levemente distinto si se trabaja con datos muestrales o poblacionales. Cuando es calculada sobre los elementos de la muestra, la varianza muestral es:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

Pero cuando la varianza se calcula sobre los elementos de la población, su cálculo se realiza con la expresión:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}{N}$$

En esta última expresión cambiaron los nombres de los elementos con los que se opera (μ en lugar de $\bar{x}$, N en lugar de n), y además se ha eliminado el -1 del denominador. Ya no es el total de casos menos uno, sino el total de casos. El origen de esto es que esta última expresión (con denominador N) es la definición original de la varianza, mientras que la que usada en la muestra (s^2 con denominador $n-1$) es una corrección, que se hace para que sea un buen estimador de la varianza poblacional.⁶⁸

Con InfoStat® el cálculo de la varianza puede solicitarse para la población o para una muestra, la notación que usa ese programa es $Var(n)$ para referirse a la varianza poblacional, es decir a σ^2 , y $Var(n-1)$ para indicar la varianza muestral, s^2 , en referencia al denominador que se usa para calcular cada una.

Así, la característica poblacional que pretende conocerse se llama **parámetro** y a través del proceso de muestreo se seleccionan algunas unidades del universo que actuarán como representantes de la población completa. Esta muestra será toda la información disponible para realizar estimaciones acerca de los parámetros poblacionales. Los valores calculados sobre los datos muestrales son los que se utilizarán para realizar aproximaciones a los valores poblacionales; tales valores son denominados **estimadores puntuales**, o simplemente **estimadores**.

De una población se pueden obtener un número muy grande de muestras, dependiendo de su tamaño y del universo de donde se extraen, pero en un proceso de muestreo se toma una sola muestra de todas las posibles. Dado que las muestras se extraen al azar, cada una de ellas proveerá de una estimación diferente del parámetro. Para un parámetro elegido, habrá tantos valores estimados como muestras puedan extraerse de la población (con algunos resultados repetidos). Esta variación (casi) impredecible de los estimadores, hace que se comporten como variables aleatorias.

⁶⁸Lo que se consigue con esa corrección es que, si se calculan las varianzas de todas las muestras que se saquen de una población dada, éstas promedien la varianza de la población, lo cual no sucede si se usa el denominador n . Se denomina insesgabilidad del estimador, por lo que podemos decir que el denominador de la varianza muestral se transforma en $n-1$ para lograr que sea un estimador insesgado de la varianza poblacional.

Es posible (aunque esperamos que sea poco probable) que el estimador se aleje notablemente del valor poblacional al que se pretende estimar. Así, si se busca estimar la edad promedio de los estudiantes de cierta carrera universitaria y no se cuenta con un registro de ellos, puede usarse una estimación a partir de una muestra extraída de todos los estudiantes. El promedio calculado sobre esos datos se tomará como estimación de la edad de todos los estudiantes; pero puede ocurrir que la muestra contenga, por azar, al grupo de mayor edad de toda la población, con lo cual el resultado así obtenido será una sobreestimación del verdadero valor poblacional. Debe destacarse que este hecho resulta completamente inadvertido para el investigador. Con respecto a la ocurrencia de estos eventos que conducen a resultados engañosos, sólo será posible —bajo ciertas condiciones—, calcular sus probabilidades.

Dos aspectos importantes para recordar cuando se usan muestras:

La variabilidad de las muestras: Las muestras difieren entre sí. Las muestras extraídas de la misma población dan resultados diferentes.

La representatividad de la muestra: No indica la similitud entre la muestra y la población, sino su obtención por un procedimiento adecuado que permita estimar valores de la población a partir de lo que se halle en la muestra.

Características de los estimadores

Insensibilidad

Si fuera posible extraer todas las muestras de una población, se contaría con todos los estimadores de un parámetro dado. Cuando el promedio de todos los valores obtenidos en todas las muestras de un determinado tamaño para cierto parámetro es igual al valor de esa característica en la población, se dice que el estimador muestral es **insensado**. Se denomina sesgo de un estimador a la diferencia entre el promedio que alcanzaría sobre todas las muestras posibles y el verdadero valor del parámetro poblacional. En el caso de un estimador insensado esta diferencia es igual a cero (sin sesgo).

Consistencia

Intuitivamente puede pensarse que el aumento en el tamaño de la muestra (número de elementos que la componen) mejora la calidad de la estimación. Esta característica, que se cumple para algunos estimadores, es denominada **consistencia**. Un aumento en el tamaño de la muestra no garantiza que se obtendrán resultados más próximos a los valores poblacionales: por grande que sea la muestra no resulta imposible que a ella pertenezcan los valores más extremos de la población. Veamos esto con un ejemplo. Supongamos que se quiere estimar la calificación promedio con que egresan los alumnos de una carrera dada y que se toma una muestra de 30 egresados. Puede ocurrir que la muestra (por azar) contenga a los treinta mejores promedios de la carrera, con lo que se obtendría una sobreestimación del verdadero promedio de toda la población. El concepto de consistencia expresa que si la muestra, en lugar de 30 elementos, contiene 100, la probabilidad de obtener una sobreestimación igualmente extrema es menor. Intuitivamente podemos ver que resulta más factible encontrar a los 30 mejores que a los 100 mejores.

No debe entenderse que el estimador alcance valores más próximos a los paramétricos a medida que la muestra aumenta de tamaño, sino que disminuye la probabilidad de obtener resultados muy lejos de los paramétricos a medida que la muestra crece. Esta idea parece un poco abstracta ahora, se aclarará cuando la usemos en casos aplicados.

Eficiencia

Esta es una característica relativa, es decir que sirve para comparar estimadores. La eficiencia será mayor cuanto más pequeña sea la varianza del estimador. Por ejemplo, la media es un estimador más eficiente que la mediana porque, extraídas en todas las muestras posibles de un tamaño dado, la varianza de las medias es menor que la de las medianas.

Una vez acordados los elementos con los que trabajaremos en este capítulo, debemos volver sobre el problema del carácter aleatorio de los estimadores (los estadísticos muestrales). Como variables aleatorias que son, tienen distribuciones de probabilidad asociadas y eso es lo que permite calcular la probabilidad de ocurrencia de sus diferentes valores. Conocer las distribuciones de probabilidad de los estadísticos muestrales sirve para ponerlos en relación con los parámetros a los que estiman: se usarán las distribuciones de probabilidad ya mencionadas para relacionar los estimadores (conocidos) con los parámetros (desconocidos). A fin de presentar el tema, haremos “como si” se conocieran los valores poblacionales, y veremos qué sucede con los estimadores.

Ejemplo 9.1

El problema de las distribuciones muestrales se presenta aquí a través de un ejemplo que trata sobre una muy pequeña población ficticia. Supongamos que sea la población de tres pacientes de un hospital psiquiátrico que los tiene como únicos internados⁶⁹. Llamaremos A, B y C a estos tres pacientes y consideraremos dos variables: el *tiempo que llevan desde su ingreso* (expresado en meses) y el *sexo*. La primera variable es cuantitativa, la segunda cualitativa. La siguiente es la matriz de datos para esta población ficticia y las variables indicadas.

caso	Paciente	Meses desde el ingreso	Sexo
1	A	3	Varón
2	B	4	Mujer
3	C	5	Varón

Para describir esta población mostramos su (elemental) distribución de frecuencia e indicaremos la media y la varianza de la variable cuantitativa (meses desde el ingreso):

⁶⁹ Suponer que en el hospital solo hay tres internados es una gran simplificación, por cierto ficticia. Se usa con fines expositivos, para poder hacer intuitiva la comparación entre la población y las muestras.

x	f
3	1
4	1
5	1
Total (N)	3

$$\mu = \frac{3 + 4 + 5}{3} = 4$$

$$\sigma^2 = \frac{(3 - 4)^2 + (4 - 4)^2 + (5 - 4)^2}{3} = \frac{2}{3} = 0,67$$

Además, calcularemos —también sobre datos de la población completa— la proporción de mujeres⁷⁰, codificando como 1 la presencia de un “éxito” y 0 su ausencia:

$$P = \frac{0 + 1 + 0}{3} = \frac{1}{3} = 0,33$$

Estos valores (μ , σ^2 y P) son los que llamamos parámetros y caracterizan a las dos variables para la población completa.

Ahora veremos qué sucede cuando se muestrea. Para ello vamos a sacar todas las muestras posibles de tamaño dos (podrían haber sido de otro tamaño, lo elegimos para este ejemplo), y las muestras que extraigamos serán con reposición⁷¹. Así resultan las siguientes nueve muestras: AA, AB, AC, BA, BC, BB, CA, CB, CC. Como todas tienen la misma oportunidad, cada una tiene probabilidad 1/9 de ser seleccionada aleatoriamente.

En cada una de las muestras calcularemos la media del tiempo de internación ($\bar{x}$) y la proporción de mujeres ($\hat{p}$).

Muestra	Meses de internación	$\bar{x}$	Cantidad de mujeres	$\hat{p}$
AA	3-3	3,0	0	0,0
AB	3-4	3,5	1	0,5
AC	3-5	4,0	0	0,0
BA	4-3	3,5	1	0,5
BB	4-4	4,0	2	1,0
BC	4-5	4,5	1	0,5
CA	5-3	4,0	0	0,0
CB	5-4	4,5	1	0,5
CC	5-5	5,0	0	0,0

⁷⁰Esta categoría se eligió arbitrariamente, podría haber sido la otra y calcular la proporción de varones.

⁷¹ Nuevamente se trata de una simplificación expositiva. Esta forma de extraer una muestra no es la que se aplica en la práctica, porque no se permite elegir dos veces al mismo individuo. Sin embargo, este muestreo con reposición en una buena aproximación a los muestreos verdaderos (sin reposición) cuando se trabaja con poblaciones grandes. Es así porque la extracción de unos pocos casos, aunque sean sin reposición, altera poco la probabilidad de ser extraídos de los otros casos.

Antes de analizar estos resultados, los organizaremos mejor, presentando las distribuciones de frecuencia de las $\bar{x}$ y de las $\hat{p}$:

$\bar{x}$	f	f'	$\hat{p}$	f	f'
3,0	1	0,11	0,0	4	0,44
3,5	2	0,22	0,5	4	0,44
4,0	3	0,33	1,0	1	0,11
4,5	2	0,22	Total	9	1,00
5,0	1	0,11			
Total	9	1,00			

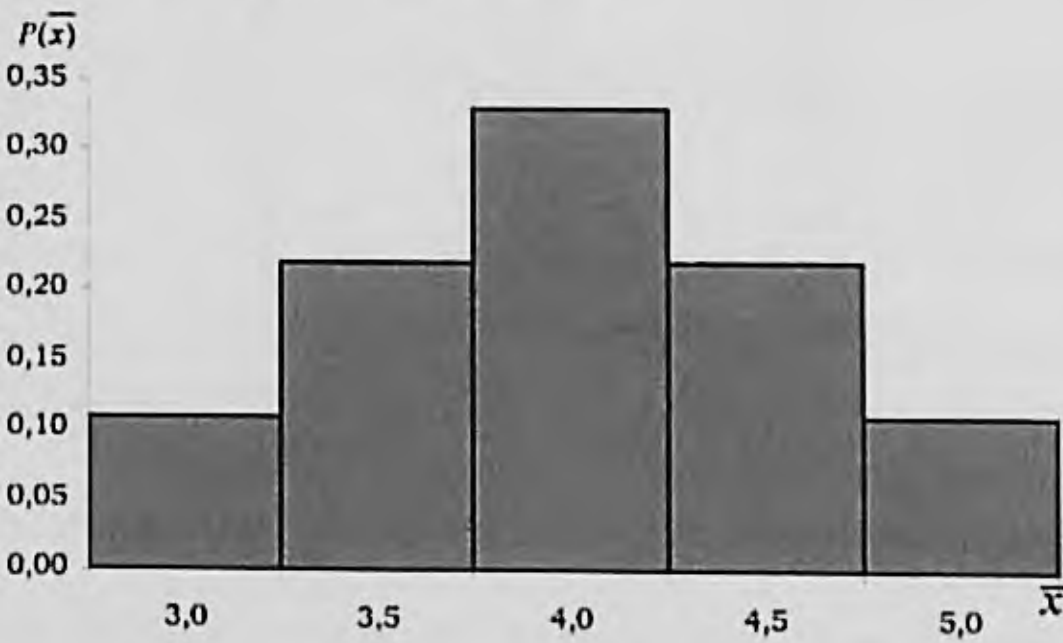
Distribución de la media muestral

Vamos a concentrarnos inicialmente en la distribución de $\bar{x}$. Lo primero que se observa en la tabla de distribución de frecuencias de $\bar{x}$ es lo que significa que $\bar{x}$ sea una variable: quiere decir que las diferentes muestras ofrecen valores diferentes de $\bar{x}$; o bien, que el valor de $\bar{x}$ varía dependiendo de cuál haya sido la muestra que se seleccionó al azar. En segundo lugar, estos valores no se refieren a casos individuales sino a promedios obtenidos en muestras de tamaño dos. Si se usan las frecuencias relativas como aproximaciones a la probabilidad, leemos en la tabla que la probabilidad de obtener una muestra en la que el promedio sea de tres meses de internación es de 0,11. Expresamos estos simbólicamente así:

$$P(\bar{x} = 3) = 0,11$$

Comparando las probabilidades de los diferentes valores de $\bar{x}$, se puede ver que resulta más probable hallar una media de 4 que de 3,5 ó de 3; porque $P(\bar{x} = 4) = 0,33$ mientras que $P(\bar{x} = 3) = 0,11$. Se trata de un resultado importante, porque la media de la población es 4, por lo que vemos que es más probable encontrar una media muestral cerca de la media poblacional que lejos de ella. La representación gráfica de la distribución también nos aporta información sobre la relación entre $\bar{x}$ y μ .

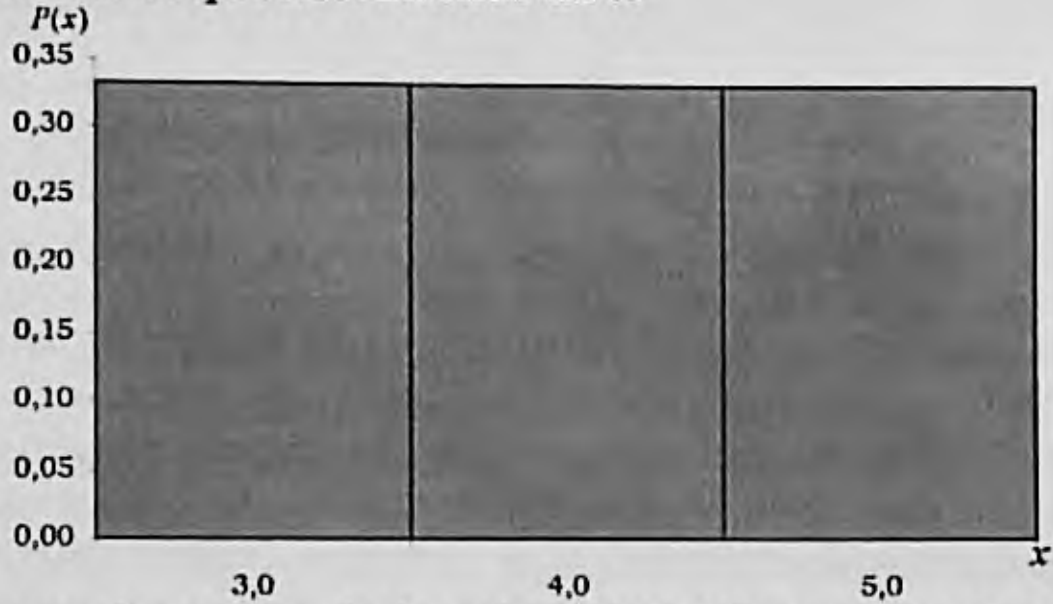
Gráfico 1: Distribución de probabilidades de $\bar{x}$



Se observa que $\bar{x}$ asume valores cuya distribución es simétrica alrededor de 4, que es la media poblacional (μ). Resulta interesante comparar esta distribución

con la que tiene la variable original, el número de meses de internación de cada paciente, x :

Gráfico 2: Distribución de probabilidades de x



Observemos primero el nombre de los ejes: el Gráfico 1 muestra la distribución de las $\bar{x}$: el promedio de los tiempos de internación de muestras de dos pacientes. Son nueve casos, cada uno es una muestra de tamaño 2. Sus valores están en el eje horizontal y sus probabilidades se indican como $P(\bar{x})$ en el eje vertical. El Gráfico 2, representa los valores de x : los tiempos de internación de cada paciente individualmente. Son tres casos, cada uno es un paciente. Esos son los valores que se ubican en el eje horizontal, las probabilidades del eje vertical son $P(x)$.

La del Gráfico 2 es la distribución en la población, en este caso es uniforme, pero podría tener cualquier otra forma. Por el contrario, la del Gráfico 1 es la distribución de las medias muestrales; es simétrica y va a tender a tener esta forma a medida que las muestras sean de mayor tamaño, independientemente de cuál sea la distribución que la variable tenga en la población. Luego volveremos sobre esta importante observación.

Vamos ahora a describir esta nueva variable $\bar{x}$, a través de su esperanza y su varianza.

Calculemos primero la esperanza de $\bar{x}$, aunque, por la forma de la distribución, puede anticiparse:

$$E(\bar{x}) = 3 * 0,11 + 3,5 * 0,22 + 4 * 0,33 + 4,5 * 0,22 + 5 * 0,11 = 4$$

Se verifica que el valor esperado para las medias muestrales coincide con la media de la población. Este es el primer resultado que nos interesa retener de la relación entre $\bar{x}$ y μ ; la expresamos como:

$$E(\bar{x}) = \mu$$

Que puede escribirse:

$$\mu_{\bar{x}} = \mu$$

Esto implica que, si de una población se extraen todas las muestras posibles de un determinado tamaño, y en cada una de ellas se calcula la media, el promedio de esas medias muestrales coincide con la media de la población completa. Esta cualidad según la cual la esperanza del estimador es igual al parámetro, como ya hemos

dicho, se llama insesgabilidad. Cuando un estimador cumple con esa condición (como sucede con $\bar{x}$ como estimador de μ) se dice de él que es insesgado.

La media muestral ($\bar{x}$) es un estimador **insesgado** de la media poblacional (μ).

Ahora vamos a calcular la varianza de $\bar{x}$:

$$V(\bar{x}) = (3 - 4)^2 * 0,11 + (3,5 - 4)^2 * 0,22 + (4 - 4)^2 * 0,33 + (4,5 - 4)^2 * 0,22 + (5 - 4)^2 * 0,11 = 0,33$$

Este valor no es el mismo que el de σ^2 , sino que es la mitad. Se trata nuevamente de un resultado que podemos generalizar y que depende del tamaño de la muestra. En el caso de este ejemplo, las muestras son de tamaño dos y por esa razón la varianza de la media muestral es la varianza poblacional dividida por dos. Si las muestras fuesen de tamaño 3, la varianza habría quedado reducida a la tercera parte. Para otro tamaño de muestra, la varianza de $\bar{x}$ será diferente. De modo general, la varianza de $\bar{x}$ se relaciona con la varianza de x (σ^2) a través de:

$$V(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

De manera alternativa, indicamos a esta varianza como $\sigma_{\bar{x}}^2$, con lo que:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Esta fórmula indica que la varianza de las $\bar{x}$ varía inversamente con el tamaño de la muestra.

Este también es un resultado muy importante: nos dice que cuanto más grande sea la muestra, tanto más pequeña será la varianza de las medias muestrales. Recordemos que la varianza mide la dispersión de los valores de una variable, por lo que esta varianza mide la dispersión entre los valores de las diferentes medias muestrales. El hecho que disminuya cuando aumenta el tamaño de la muestra significa que para muestras más grandes, las medias muestrales tendrán menos dispersión, es decir que menos probables los valores muy alejados. Esta propiedad se denomina consistencia, entonces este resultado puede expresarse indicando que la media muestral es un estimador consistente de la media poblacional, porque su varianza se reduce a medida que aumenta el tamaño de la muestra.

La media muestral ($\bar{x}$) es un estimador **consistente** de la media poblacional (μ).

De la varianza surge inmediatamente la desviación estándar de $\bar{x}$ es:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Es común referirse a ella como el **error estándar de la media**, y suele abreviarse, en los programas de análisis de datos como EE.

Este es el segundo resultado de importancia sobre la relación entre $\bar{x}$ y μ .

En la práctica, fuera de este ejemplo simplificado, solo extraemos una muestra y en ella calculamos la media. Lo que hemos visto hasta aquí nos dice que la media muestral que se obtenga tiene más chances de estar cerca de la media

poblacional cuanto más grande sea la muestra que tomemos. Esto es así porque a medida que aumenta el número de casos en la muestra (n) disminuye la varianza y en consecuencia las medias muestrales tienen más probabilidad de estar cerca de la media poblacional. Por eso, será más probable que la única media que se obtiene en la muestra sea próxima al parámetro que se estima. No es seguro que la media muestral sea cercana a la poblacional, lo que se sabe es que es menos probable que esté lejos cuando la muestra es más grande.

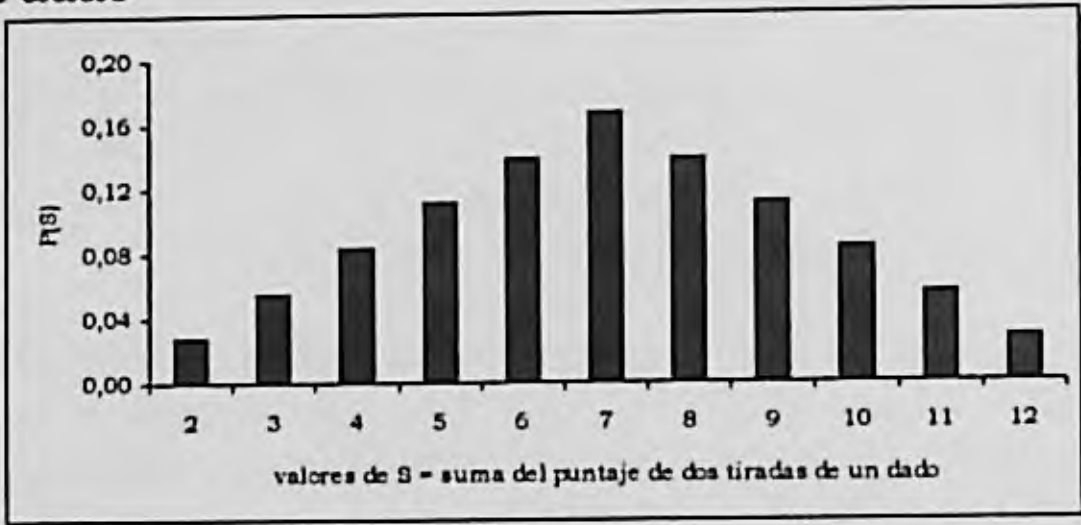
La tercera característica de la distribución de la media muestral se refiere a su forma. En el Gráfico 1 se ve que las $\bar{x}$ del ejemplo alcanzan una distribución unimodal y simétrica, sin importar que en la población la variable hubiese tenido una distribución uniforme. Este resultado también es general y es más amplio aun: a medida que aumenta el tamaño de las muestras, la distribución de las medias muestrales tiende a ser normal. La prueba de esta afirmación constituye el Teorema Central del Límite, cuyo enunciado puede resumirse como: una suma de n variables aleatorias tiende a tener distribución normal a medida que aumenta n , independientemente del modo en que esté distribuida esa variable. Para nuestro uso, la media es una suma de valores de una variable aleatoria (porque esos valores provienen de una muestra aleatoria) dividida en el total de casos. Por eso el teorema nos dice que si se trata de muestras grandes, puede tratarse a $\bar{x}$ como teniendo una distribución normal.

Anteriormente se presentó el experimento de tirar un dado dos veces, contar la suma de los puntos obtenidos y definir la variable aleatoria S que resulta de la suma de dos variables aleatorias, porque cada tirada del dado da lugar a un resultado entre 1 y 6 que depende del azar. La variable que resulta de tirar una sola vez el dado tiene distribución uniforme: todos los números tienen la misma probabilidad $1/6$. La suma de puntos de los dos dados, S , ya no tiene distribución uniforme, porque es más probable obtener 7 (que puede resultar de $6+1$, $5+2$, $4+3$, $3+4$, $2+5$ ó $1+6$) que 12 (que solo puede obtenerse con $6+6$).

Gráfico 3: Distribución de probabilidades de la variable $x = \text{puntaje obtenido al tirar un dado}$



Gráfico 4: Distribución de probabilidades de $S = \text{suma de puntajes obtenidos al tirar dos veces un dado}$



Si bien la distribución de esta variable no es normal, se aprecia la tendencia, “va camino a ser normal”. En este caso la muestra tiene solo dos casos (las dos tiradas del dado); cuando son más casos, la distribución va volviéndose más cercana a la normal.

Esto es lo que sucede cuando se extraen muestras de una población: la distribución de la variable en la población puede tener cualquier distribución (en el caso del dado es uniforme), pero a las medias muestrales les sucede lo mismo que a S , van tendiendo a tener una distribución normal a medida que se toman muestras de mayor tamaño. Éste es el tercer resultado que necesitamos para relacionar a la media muestral con la poblacional y poder hacer las primeras inferencias.

Resumimos en el recuadro siguiente los tres resultados mostrados hasta este punto.

$$E(\bar{x}) = \mu \qquad \mu_{\bar{x}} = \mu$$
$$V(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n} \qquad \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$
$$\bar{x} \rightarrow N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

La última expresión sintetiza las anteriores y agrega que la distribución de $\bar{x}$ es normal.

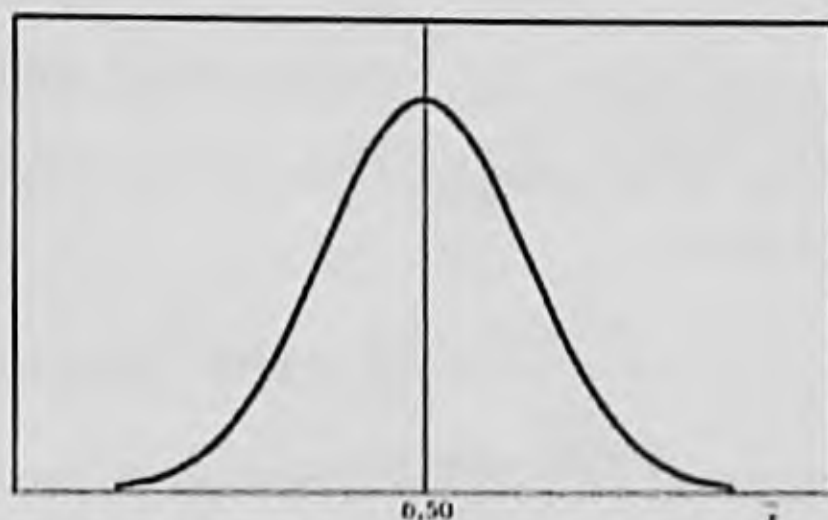
Entonces, del recuadro se lee que:

- La esperanza de $\bar{x}$ es la media de la población (insesgabilidad).
- La varianza de $\bar{x}$ es la varianza de la población dividida en el tamaño de la muestra⁷² (consistencia).
- La media muestral tiende a tener una distribución normal con media μ y varianza $\frac{\sigma^2}{n}$, cuando el tamaño de la muestra aumenta.

⁷²De modo equivalente, la desviación estándar de la media es la desviación estándar de la población dividida en la raíz cuadrada del tamaño de la muestra. Es conocida también como error estándar de la media.

Ejemplo 8.2 (datos ficticios)

Supongamos que en la población de adultos la media de horas diarias de sueño es de 6,5 hs ($\mu = 6,5$) con varianza de 9 hs² ($\sigma^2 = 9$). Si eligiéramos al azar muestras de 200 personas ($n=200$) y registráramos el número promedio de horas de sueño en cada muestra, encontraríamos que la distribución de esas horas promedio sería como la siguiente:



En el eje horizontal están graficados los valores de las posibles $\bar{x}$ que resultarían si sacáramos muestras aleatorias de esa población. La distribución normal está centrada en 6,50, que es la media de la población. El gráfico muestra con claridad que "lo más probable" es encontrar a $\bar{x}$ en los alrededores de 6,50.

Con la media y la desviación estándar de esta variable $\bar{x}$ podemos calcular un puntaje z , lo que conocíamos como desvío estándar. Para llegar a la forma que tiene ahora z , recordemos que lo definimos como el número de desviaciones estándar a las que la variable se encuentra de la media, por eso era la diferencia entre el valor de la variable y el de la media, dividida en la desviación estándar:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

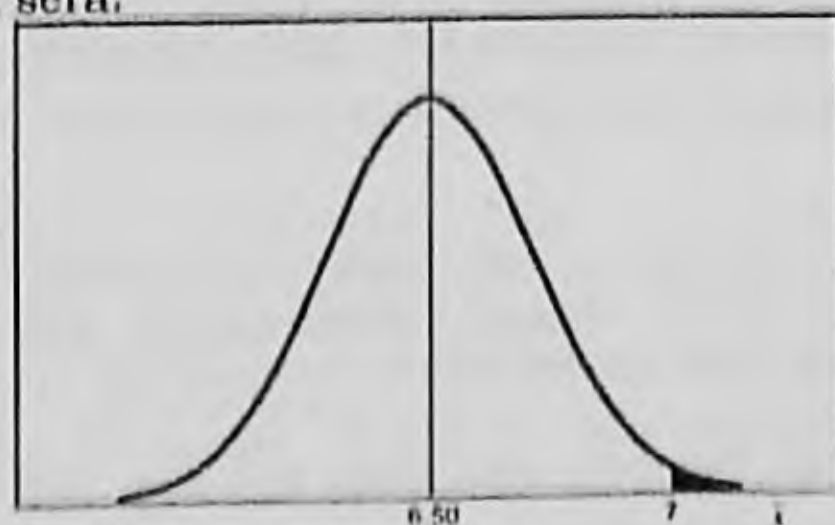
La diferencia ahora es que nuestra variable es $\bar{x}$, su media es μ y su desviación estándar es el que hemos llamado error estándar de la media: $\sigma_{\bar{x}}$. Con lo que el puntaje z asociado a cada valor de $\bar{x}$, tiene ahora la forma:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}$$

Si se reemplaza el error estándar de la media por su valor, se obtiene:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Si ahora nos preguntamos por la probabilidad de encontrar muestras de 200 personas cuyos promedios de horas de sueño superen las 7 horas, la representación gráfica será:



Y el valor de esa probabilidad se calcula observando a cuántas desviaciones estándar se encuentra de la media, es decir, calculando el puntaje z correspondiente a la media de 7 horas:

$$z = \frac{7 - 6,5}{\frac{3}{\sqrt{200}}} = \frac{0,5}{0,21} = 2,38$$

Pedimos a InfoStat® la probabilidad de superar este valor⁷³ $P(z > 2,38)$ y obtenemos 0,009. La lectura de este resultado es que solo el 0,9% de las muestras de tamaño 200 darán media muestral mayor a 7hs.

Para ver el efecto del tamaño de la muestra repetamos el cálculo con muestras de 30 casos⁷⁴. El puntaje z es ahora:

$$z = \frac{7 - 6,5}{\frac{3}{\sqrt{30}}} = \frac{0,5}{0,55} = 0,91$$

Y $P(z > 0,91) = 0,181$ es decir que el 18% de las muestras de tamaño 30 darán media que supere a 7hs. Esto indica que cuando las muestras son de mayor tamaño es menor la probabilidad de encontrar valores en los extremos de la distribución.

Supongamos que la variable *horas de sueño* tiene distribución normal en la población y calculemos la probabilidad de encontrar personas que duerman más de 7 horas. Antes destaquemos la diferencia entre esta pregunta y las dos anteriores: las probabilidades que calculamos antes son las de hallar *muestras* de 200 personas o de 30 personas con promedio superior a 7 horas de sueño, ahora preguntamos por la probabilidad de encontrar *individuos* que tengan más horas de sueño que esa cifra. El puntaje z es ahora:

$$z = \frac{7 - 6,5}{3} = \frac{0,5}{3} = 0,17$$

La fórmula cambia porque la pregunta no es por medias muestrales sino por valores individuales, por eso no hay n ⁷⁵. La probabilidad es ahora:

$$P(z > 0,17) = 0,432$$

Que leemos diciendo que el 43% de los individuos duerme 7 horas o más. Esto indica que es mucho más probable encontrar individuos que se alejen de la media, que grupos de 30 ó de 200 individuos cuyo promedio se aleje de la media. Cuando las muestras son de mayor tamaño, tanto más improbable resulta encontrarlas lejos de la media, eso es lo que está expresado cuando n aparece en el denominador de la desviación estándar: mayor n implica menor dispersión, y de ello se sigue que son menos probables los casos extremos.

⁷³Alternativamente podemos ingresar al calculador de InfoStat® con la media 6,5 y la desviación estándar 0,14 y obtener el mismo resultado sin pasar por z . Hicimos este recorrido porque necesitamos estar familiarizados con el puntaje z para los contenidos que veremos más adelante.

⁷⁴Es el mínimo tamaño que podemos usar para que sea válida la aplicación de la distribución normal

⁷⁵Aunque puede interpretarse como si los individuos constituyeran muestras de tamaño 1.

Ejemplo 8.3 (datos reales)

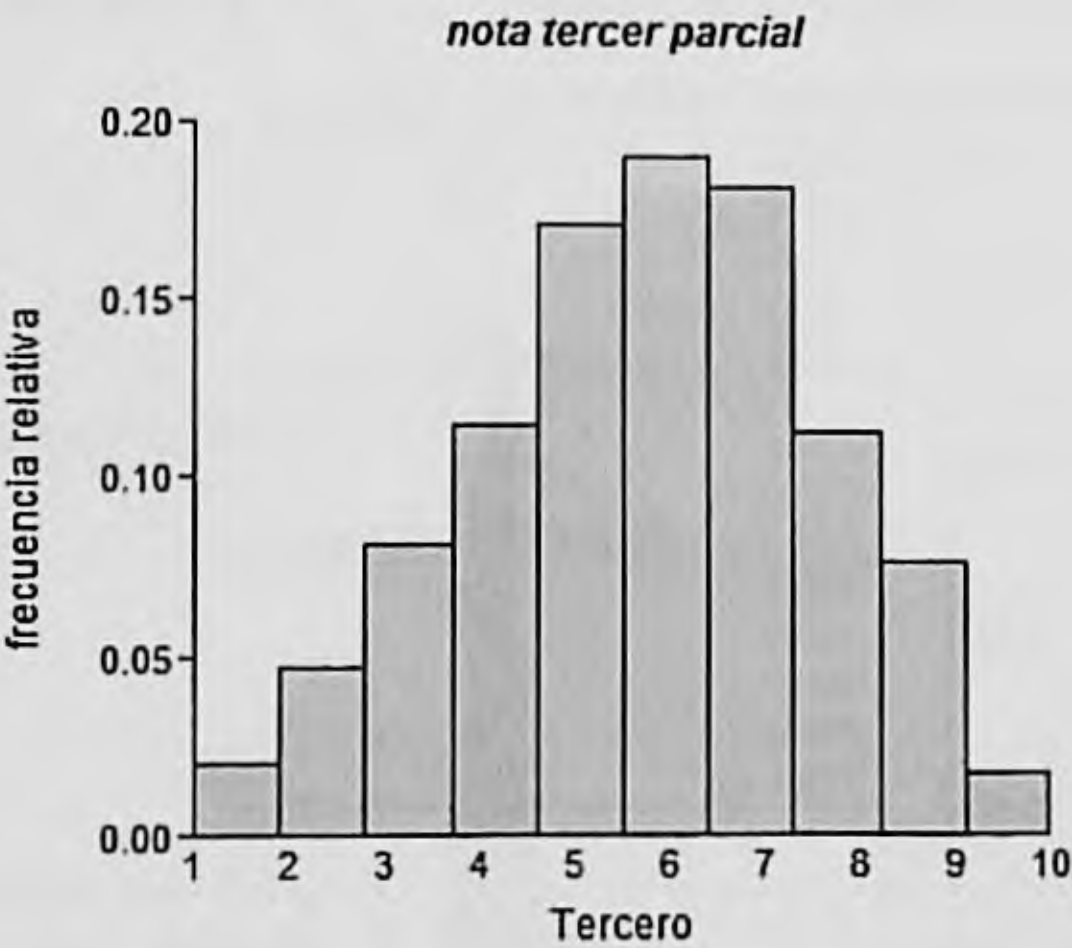
Ahora trabajaremos sobre una base que contiene las notas de los tres parciales de Psicoestadística en 2009. En primer lugar damos una breve descripción de la población de las notas del tercer parcial:

Variable	n	Media	Var(n)	Min	Máx
Tercero	1149	5.78	4.12	1.00	10.00

Estas medidas están calculadas sobre la población completa, que es el total que alumnos que en 2009 hizo el tercer parcial, por lo que se trata de parámetros, así:

$$\mu = 5.78$$
$$\sigma^2 = 4.12$$

El histograma de las notas del tercer parcial es:



Ahora solicitamos a Infostat® que obtenga 200 muestras de 80 casos cada una y que en cada una de ellas calcule la media y la varianza muestral. No pedimos “todas las muestras posibles” ya que serían un número muy elevado, por eso, lo que tendremos será una aproximación a la relación entre estimadores y parámetros. Esa solicitud da lugar a una nueva tabla que contiene una media muestral y una varianza muestral para cada una de las 200 muestras calculadas. Cuando solicitamos un resumen de estas variables obtenemos:

Variable	n	Media	Var(n)	Min	Máx
Media	200	5.78	0.05	5.01	6.35
Varianza	200	4.12	0.28	2.89	5.69

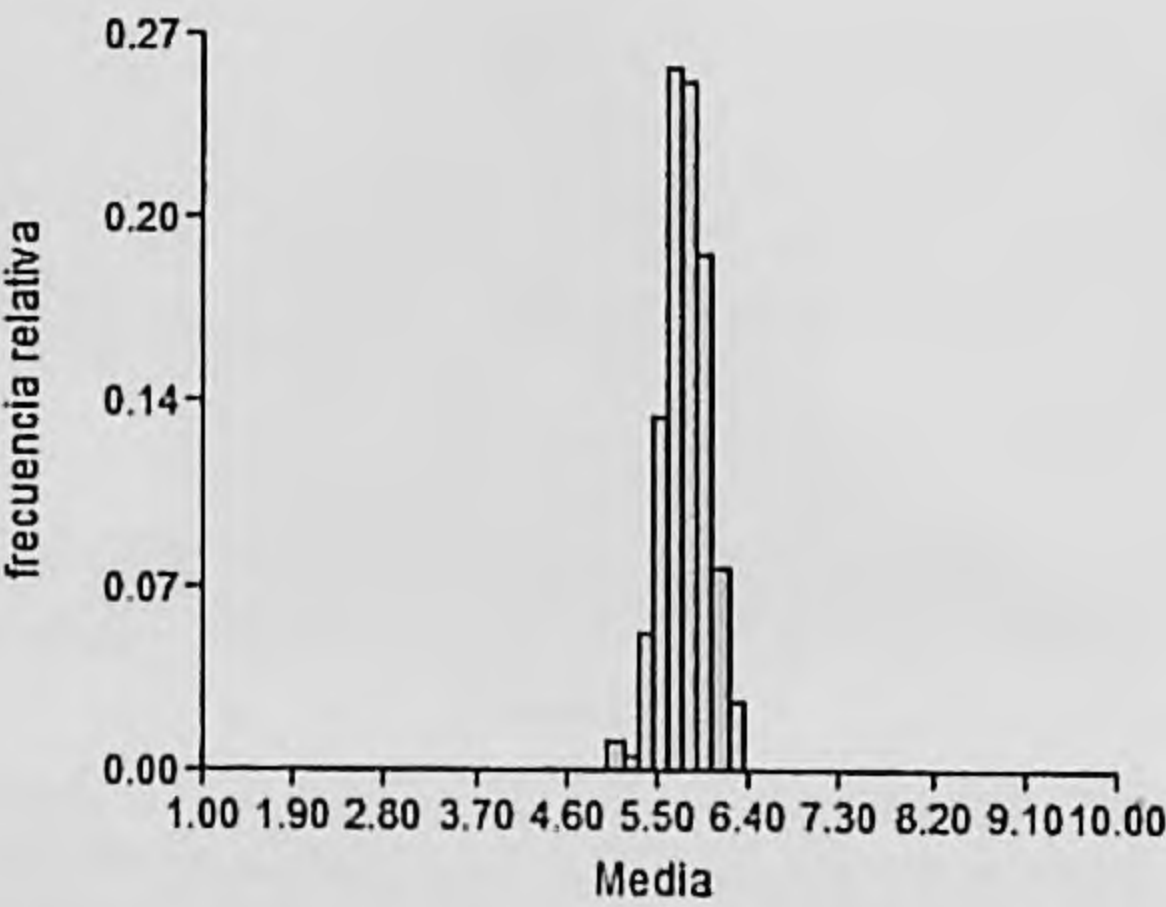
Observemos en detalle la salida: n=200 es la cantidad de muestras que se extrajeron (y no el tamaño de cada muestra), ahora cada muestra representa un caso y las variables que se consideran son la media y la varianza de la nota de los

80 casos seleccionados en cada muestra. Se aprecia que el campo de variación de la variable original (nota del tercer parcial) iba de 1 a 10, mientras que la nueva variable (promedio de notas del tercer parcial de muestras de 80 alumnos) varía entre 5.01 y 6.35, es decir, es notablemente más restringido, tiene menos variabilidad.

El valor 5.78 es la media de todas las medias muestrales y como vemos coincide con la media poblacional. Del mismo modo, la media de todas las varianzas muestrales (4.12) coincide con la varianza poblacional. Eso quiere decir que la media y la varianza muestrales, son estimadores insesgados de la media y la varianza poblacionales.

Además, la salida muestra la varianza de las medias muestrales, que es 0.05. La relación de esta varianza con la varianza poblacional es: $\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$, en la que n representa el tamaño de las muestras y no la cantidad de muestras solicitadas. Con los datos del tercer parcial es: $\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{4.12}{80} = 0.05$

El histograma de las medias muestrales es:



En el que hemos usado al misma escala de 1 a 10 para que se vea con claridad la reducción en la dispersión de esta nueva variable.

Distribución de la proporción muestral

El razonamiento para llegar a la relación que hay entre el estimador $\hat{p}$ y el parámetro correspondiente, P es completamente análogo al de la media, por lo que no recorreremos nuevamente los mismos pasos que llevaron a establecer la relación entre $\bar{x}$ y μ .

En primer lugar, y como sucede en el caso de la media, $\hat{p}$ es un estimador insesgado de P .

La proporción muestral $\hat{p}$ es un estimador **insesgado** de la proporción poblacional P .

Si extrajáramos todas las muestras posibles de una población y calculáramos en cada una la proporción de casos en una categoría de una variable, el promedio de todas esas proporciones muestrales, daría como resultado la proporción de casos que hay en esa categoría en la población. Por lo que podemos escribir que:

$$E(\hat{p}) = P$$

O de manera equivalente:

$$\mu_{\hat{p}} = P$$

Acerca de la dispersión que alcanzan las diferentes $\hat{p}$ en las muestras, hay más diferencia con la media. En efecto, cuando se trata con variables cualitativas (nominales u ordinales) no hay distancias y en consecuencia no se puede usar una desviación estándar. La dispersión de una variable de este nivel se aprecia a través de la idea de incertidumbre: habrá tanto menos dispersión cuanto mayor sea la concentración de casos en una categoría de la variable. Así, la distribución:

candidato que votará	f
A	0,09
B	0,74
C	0,11
D	0,06
Total	1,00

Tiene menos dispersión que:

candidato que votará	f
A	0,23
B	0,31
C	0,26
D	0,20
Total	1,00

Porque si tuviéramos que "adivinar" quién va a ganar las elecciones, en el primer caso estaríamos más seguros de inclinarnos por el candidato B, que en el segundo. Aunque en ambas distribuciones el modo es el candidato B, en la primera la concentración es mayor y menor es la incertidumbre, por lo que tenemos mayor certeza, menos dispersión.

Así es como se trata el problema de la variabilidad en variables que no admiten la medición de distancias. Pero en este caso, se está calculando $\hat{p}$ como la proporción de una categoría, sin considerar cómo se distribuyen las otras, es decir que se trabaja con variables dicotómicas. Si se considera solo al candidato A, las dos tablas anteriores se reducen a:

candidato que votará	f
A	0,09
otro candidato	0,91
Total	1,00

candidato que votará	f
A	0,23
otro candidato	0,77
Total	1,00

¿Cuál de las dos distribuciones tiene mayor dispersión? La primera tiene una mayor concentración en la categoría "otro candidato" que la segunda, por lo que tiene menor dispersión. Por eso, en variables dicotómicas, la mayor diferencia entre las dos proporciones indica la mayor concentración y por ello, la menor dispersión.

La forma operativa de evaluar esto es multiplicando las dos frecuencias relativas: $0,09 \cdot 0,91$ en el primer caso, y $0,23 \cdot 0,77$ en el segundo. Esos productos dan 0,08 y 0,18 respectivamente; estos valores son indicadores de la menor dispersión de la primera distribución.

La operación de multiplicar a la proporción de casos de una categoría por la de la otra, que se escribe como $P \cdot (1-P)$, es la medida de la dispersión en variables nominales, que reemplaza a la varianza de las variables cuantitativas. Como sucedió con la media, la varianza de la proporción muestral es la varianza dividida el tamaño de la muestra:

$$V(\hat{p}) = \frac{P \cdot (1 - P)}{n}$$

Como antes, muestras de mayor tamaño dan lugar a menor variabilidad. También puede expresarse la varianza de $\hat{p}$ como $\sigma_{\hat{p}}^2$, con lo que:

$$\sigma_{\hat{p}}^2 = \frac{P \cdot (1 - P)}{n}$$

La desviación estándar de $\hat{p}$ será:

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{P \cdot (1 - P)}{n}}$$

Esta expresión también se conoce como **error estándar de la proporción**.

Los dos últimos resultados (la esperanza y la varianza de $\hat{p}$) se derivan de la distribución que rige el experimento de extraer n observaciones y contar la cantidad de casos que allí aparecen: se trata de la distribución binomial. Como vimos, si $\hat{x}$ es la cantidad de casos en la categoría de interés en la muestra, entonces:

$$\hat{p} = \frac{\hat{x}}{n}$$

Y, en consecuencia:

$$\hat{x} = n \cdot \hat{p}$$

En el modelo binomial, la esperanza y la varianza de x (cantidad de casos en la categoría de interés) son:

$$E(\hat{x}) = n \cdot P \quad [1]$$

$$V(\hat{x}) = n \cdot P \cdot (1 - P) \quad [2]$$

Remplazando x por su relación con $\hat{p}$ y usando las propiedades de la esperanza y la varianza hallamos:

Para la esperanza de $\hat{p}$ en [1]:

$$E(n \cdot \hat{p}) = n \cdot P$$

$$n \cdot E(\hat{p}) = n \cdot P$$

$$E(\hat{p}) = P$$

Esta última igualdad muestra que, efectivamente $\hat{p}$ es un estimador insesgado de P .

Para la varianza de $\hat{p}$, reemplazamos en [2]:

$$\begin{aligned} V(n * \hat{p}) &= n * P * (1 - P) \\ n^2 * V(\hat{p}) &= n * P * (1 - P) \\ V(\hat{p}) &= \frac{P * (1 - P)}{n} \end{aligned}$$

Y vemos que $\hat{p}$ es un estimador consistente de P , porque a medida que aumenta el tamaño de la muestra, disminuye su varianza.

Para calcular la probabilidad de diferentes valores de $\hat{p}$, a partir de P y de un determinado tamaño de muestra, usamos la distribución binomial, en la que cambiamos la variable $\hat{x}$ (número de casos en la categoría de interés) por $\hat{p}$ (proporción de casos en esa categoría). Así, volviendo al último ejemplo que se vio en la distribución binomial, si en la población de alumnos de Psicología la proporción de mujeres es de 0,81; allí se preguntó por la probabilidad que fueran todas mujeres o bien, que $\hat{x} = 15$ ahora puede plantearse en términos de proporciones: ¿Cuál es la probabilidad que, en una muestra de 15 alumnos, el 100% sean mujeres? Aquí:

$$\begin{aligned} P &= 0,81 \\ n &= 15 \\ \hat{p} &= 1 \end{aligned}$$

Usando el valor de $\hat{p}$ y de n , calculamos x :

$$\hat{x} = n * \hat{p} = 15 * 1 = 15$$

Esto quiere decir que pedir que la proporción muestral ($\hat{p}$) sea 1 (100%) equivale a pedir 15 éxitos (mujeres) en la muestra, por lo que la probabilidad es:

$$P(\hat{p} = 1) = B(15; 15; 0,81) = 0,0424$$

Es el mismo resultado obtenido antes, ahora ubicado en el contexto del muestreo.

Si la pregunta fuera ¿Cuál es la probabilidad que, si en la población la proporción es 0,81; en una muestra de 15 observaciones ésta sea 0,40? Respondemos del mismo modo, primero calculamos $\hat{x}$:

$$\hat{x} = n * \hat{p} = 15 * 0,40 = 6$$

Ahora la probabilidad es:

$$P(\hat{p} = 0,40) = B(6; 15; 0,81) = 0,000456$$

De manera general, expresada en base a n , $\hat{p}$ y P , la probabilidad es:

$$P(\hat{p}) = B(n * \hat{p}; n; P)$$

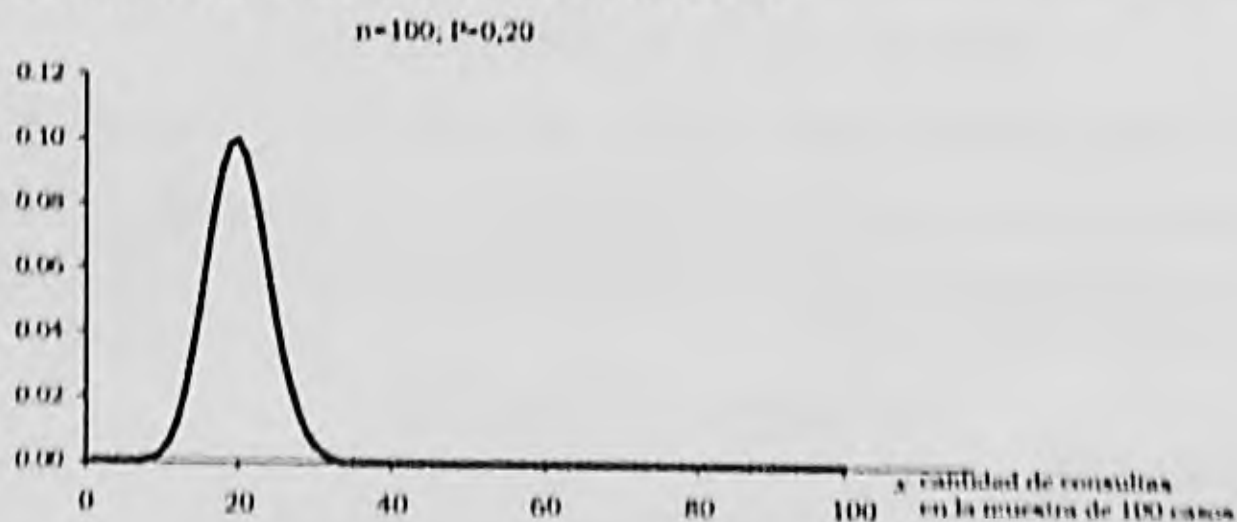
Es posible, y se hace a menudo, aproximar estas probabilidades binomiales a través de un modelo normal. El fundamento de esta aproximación es el teorema de Laplace - De Moivre que dice que si x es una variable con distribución binomial, con esperanza $n \cdot P$ y varianza $n \cdot P \cdot (1-P)$, entonces, cuando n tiende a infinito, la distribución de x tiende a ser normal, con la misma media (esperanza) y varianza. Esto solo es válido⁷⁶ cuando n es grande y P no está muy cerca de 0 ó de 1. La condición se solicita de manera sencilla exigiendo que $n \cdot P$ y $n \cdot (1-P)$ sean ambas mayores o iguales a 5. Si la variable sobre la que trabajamos no es x sino $n \cdot \hat{p}$, entonces la esperanza y la varianza serán:

$$E(\hat{p}) = P \quad \text{y} \quad V(\hat{p}) = \frac{P \cdot (1-P)}{n}.$$

Si la condición de $n \cdot p$ y $n \cdot (1-P)$ mayores o iguales a 5 se cumple, puede usarse esta aproximación y obtener un resultado análogo al de la media, que se resume así:

$$\begin{aligned} E(\hat{p}) &= P & \mu_{\hat{p}} &= P \\ V(\hat{p}) &= \frac{P(1-P)}{n} & \sigma_{\hat{p}} &= \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}} \\ \hat{p} &\rightarrow N\left(P, \frac{P(1-P)}{n}\right) \\ &\text{Cuando } n \rightarrow \infty \text{ y tanto } n \cdot P \text{ como } n \cdot (1-P) \text{ son mayores a 5} \end{aligned}$$

Sea el ejemplo de la proporción de personas que consultaron a un centro de salud durante el año pasado. Supongamos que, para una población determinada, esa proporción sea del 20% ($P=0,20$). Si extraemos muestras de tamaño 100 y en cada una de ellas observamos la proporción de personas que consultaron a ese centro de salud durante el año pasado, el gráfico de la distribución binomial de la cantidad de consultantes en cada muestra será:



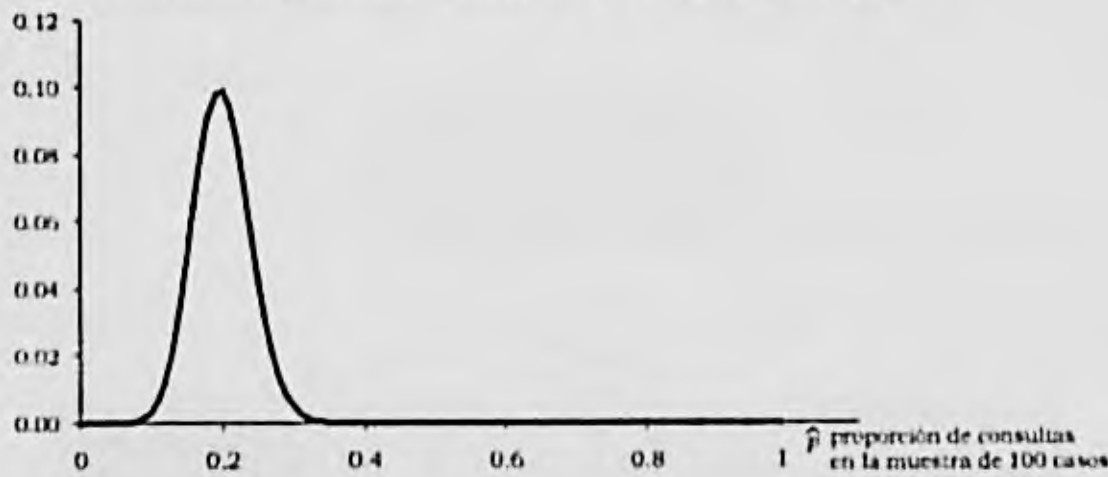
⁷⁶ Alvarado y Batanero *sf.*, indican que "Respecto al valor de n requerido para una correcta aproximación de la distribución binomial, los textos no siempre están de acuerdo." En algunos textos se solicita que $n > 30$, pero la calidad de la aproximación depende también de P .

Este gráfico tiene un trazado continuo aunque se trata de una variable discreta. Eso se debe a que es un gran número de observaciones y la distancia entre ellas es pequeña. Cuantas más sean las observaciones, tanto más cercana a la continuidad será la sucesión de puntos.

El gráfico muestra las probabilidades asociadas a cada cantidad $\hat{x}$ de éxitos que pueden resultar en la muestra, y cada valor de $\hat{x}$ se corresponde con un valor de $\hat{p}$ a través de:

$$\hat{p} = \frac{\hat{x}}{n}$$

Por lo que el gráfico anterior puede tratarse a escala de $\hat{p}$



Si nos interesamos por la probabilidad de obtener una proporción de 0,25 ó superior en la muestra, debemos transformarla a una cantidad de éxitos muestrales:

$$\hat{x} = n * \hat{p} = 100 * 0,25 = 25$$

Entonces:

$$P(\hat{p} \geq 0,25) = P(\hat{x} \geq 25) = B(\hat{x} \geq 25; 100; 0,20)$$

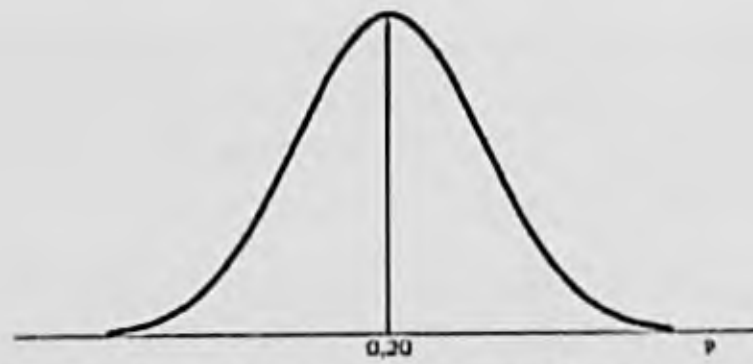
Usando InfoStat®, encontramos⁷⁷:

$$B(\hat{x} \geq 25; 100; 0,20) = 0,1314$$

Interpretamos este resultado diciendo que, si en la población completa, la proporción de personas que consultan es del 20%, la probabilidad que en una muestra de 100 personas, hayan consultado el 25% ó más es de 0,1314. En otros términos, el 13% de las muestras de tamaño 100 que se extraigan de esa población, mostrarán una proporción de 0,25 ó mayor.

Dado que el número de casos en la muestra es elevado (100) y que $n * P$ es 20 y $n * (1 - P)$ es 80, ambos mayores a 5, podemos usar la aproximación normal. Según esa aproximación, la distribución de los diferentes valores de $\hat{p}$ es:

⁷⁷Dado que nos interesa la probabilidad de igualar o superar a 25, sumamos la probabilidad de $\hat{x} = 25$ (que es 0.0439) y la de $\hat{x} > 25$ (que es 0.0875) y obtenemos el resultado que se indica.



El eje horizontal de este gráfico representa todas las proporciones que pueden encontrarse en las diferentes muestras. La distribución está centrada en el parámetro $P = 0,20$.

Resolveremos la pregunta anterior transformando el valor $\hat{p} \geq 0,25$ en un puntaje z . Conocemos la media y la varianza de $\hat{p}$ por lo que haremos:

$$z = \frac{\hat{p} - P}{\sigma_{\hat{p}}}$$

Reemplazando por el error estándar de $\hat{p}$, tenemos:

$$z = \frac{\hat{p} - P}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}}$$

Esta es la expresión con la que transformamos los valores de $\hat{p}$ a puntajes z . Sin embargo es necesario hacer una corrección debido a que vamos a aproximar una distribución discreta (binomial) a través de una continua (normal)⁷⁸, por lo que la expresión toma la forma:

$$z = \frac{\left(\hat{p} - \frac{1}{2 \cdot n}\right) - P}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}} = \frac{\left(0,25 - \frac{1}{200}\right) - 0,20}{\sqrt{\frac{0,20 \cdot (1-0,20)}{100}}} = 1,125$$

$$P(\hat{p} \geq 0,25) = P(z \geq 1,125)$$

En InfoStat® hallamos que:

$$P(z > 1,125) = 0,1303$$

Cuando usamos la distribución binomial encontramos una probabilidad de 0,1314; por lo que ésta última es una buena aproximación.

⁷⁸ La distribución binomial tiene como variable discreta a $\hat{x}$, la cantidad de éxitos en la muestra, si nos interesa la probabilidad de los valores mayores o iguales a un $\hat{x}$ dado, debemos tener en cuenta que al pasar a la normal, como es continua, no se pueden calcular probabilidades de valores exactos. Así, el conjunto $\hat{x} \geq 3$, debe transformarse en $\hat{x} > 2,5$; dado que la probabilidad de $\hat{x} = 3$ es cero cuando la tratamos como variable continua. De manera análoga, si buscáramos $P(\hat{x} \leq 3)$, deberemos tratarlo como $P(\hat{x} < 3,5)$. La corrección consiste entonces en tomar media unidad menos cuando calculamos probabilidades de valores mayores o iguales a uno dado, y media unidad más si se trata de la probabilidad de un valor menor o igual. Veamos el efecto que tiene esta corrección sobre $\hat{p}$. Dado que $\hat{p} = \frac{\hat{x}}{n}$, cuando corregimos el número de éxitos en media unidad por debajo, nos queda $\frac{\hat{x}-0,5}{n} = \frac{\hat{x}}{n} - \frac{0,5}{n} = \hat{p} - \frac{1}{2 \cdot n}$. Cuando la corrección exija que se tome media unidad más, la corrección será $\hat{p} + \frac{1}{2 \cdot n}$.

A partir de los resultados encontrados en este capítulo podremos hacer estimaciones de la media y la proporción poblacionales a partir de los respectivos valores muestrales. Hemos visto entonces que el carácter aleatorio de las muestras hace que las estimaciones sean inciertas, pero que, debido a que conocemos la distribución de probabilidades de los estimadores podemos establecer qué valores de ellos son más probables, así podremos hacer el camino inverso, que es el que más nos interesa: el de alcanzar a los parámetros a partir de los estimadores.

Usando la distribución normal como aproximación a la binomial, entonces, para los dos estimadores que hemos mencionado en este capítulo se cumple la relación:

$$z = \frac{Es - Pa}{EEE}$$

En que resumimos:

Pa: el parámetro
Es: su estimador
EEE: el error estándar del estimador

Veremos en los próximos capítulos que esta expresión es válida para relacionar otros parámetros con sus correspondientes estimadores, mientras pueda usarse la distribución normal.

Con los contenidos vistos hasta este punto, en la expresión anterior, los componentes pueden ser:

Pa: μ ó P

Es: $\bar{x}$ ó $\hat{p}$

EEE: $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ó $\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$

Muestras pequeñas

Las distribuciones de la media y la proporción muestral son asintóticamente modeladas por la distribución normal. Esto quiere decir que, a medida que el tamaño de las muestras crece, la distribución de estos estimadores va siendo más cercana a la curva del modelo normal. Sin embargo, cuando las muestras son pequeñas, se debe usar un modelo diferente. William Gosset (1908) desarrolló la distribución conocida como *t* de Student, que se adecua a describir la distribución de las medias muestrales cuando éstas provienen de muestras pequeñas. Expresado formalmente, si las muestras son pequeñas, entonces:

$$\frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

Tiene distribución t con $n - 1$ grados de libertad. En el ejemplo anterior, si las muestras fueran de tamaño 15 en lugar de 200, se debe usar la distribución t . Así, la pregunta ¿cuál es la probabilidad que en muestras de tamaño 15, la media de horas de sueño supere las 7 horas?, se responde usando la distribución t con 14 grados de libertad.

$$P(\bar{x} > 7) = P\left(t_{14} > \frac{7 - 6,5}{\frac{3}{\sqrt{15}}}\right) = P(t_{14} > 3.87) = 0,00084$$

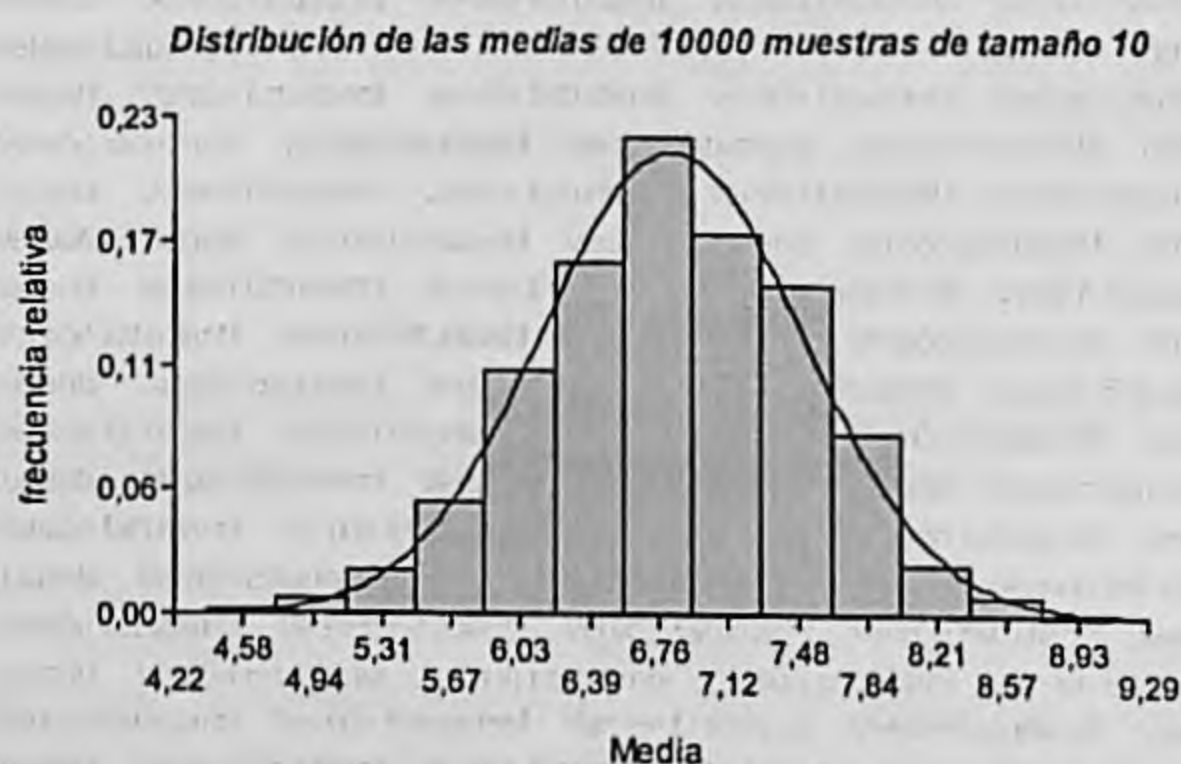
Cuando la muestra crece, la diferencia entre los modelos normal y t , se reduce. Si se repite la operación del ejemplo 8.2, resulta que:

$$P(t_{199} > 2,38) = 0,009$$

Que es, hasta el tercer decimal, igual al que ofrece la distribución normal. A esto se refiere la idea que la distribución t converge a la normal: cuando las muestras son grandes, la distribución t da resultados muy parecidos a los de la normal. El criterio usual para decidir si corresponde usar una distribución t o una normal es de 30 casos. Sin embargo, a fin de ahorrar recursos, los programas estadísticos usan siempre la distribución t .

Distribución de la varianza

La media y la proporción muestrales tienen distribuciones simétricas (normal o t); por el contrario, la varianza muestral se distribuye de manera asimétrica, lo que puede ilustrarse con el ejemplo 8.3. Si se solicitan 10000 muestras de tamaño 10, el siguiente es el histograma de las 10000 medias muestrales, con una curva normal superpuesta, para mostrar la calidad del ajuste:



Puede verse que el modelo normal “copia” muy adecuadamente la distribución real de las medias muestrales. Si se hace lo mismo con las varianzas muestrales, se obtiene:



Que muestra la asimetría de la distribución de las varianzas. Para este caso, el modelo adecuado es χ^2 . La relación entre la varianza muestral y la poblacional es:

$$\frac{(n-1) * s^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

Que quiere decir que, dada una población con una determinada varianza σ^2 , si se extraen todas las muestras posibles de un tamaño dado y en cada una de ellas se calcula la varianza muestral s^2 , la expresión de arriba se distribuye con un modelo ji cuadrado con $n-1$ grados de libertad.

El muestreo desde dos poblaciones, se utiliza para realizar comparaciones, entre medias, entre proporciones o entre varianzas, extrayendo una muestra de cada población, los tamaños de esas muestras se denominan n_1 y n_2 . Las medias y las proporciones se comparan por medio de la diferencia, mientras que con las varianzas, la comparación se hace por medio del cociente. Así, para comparar las medias de dos poblaciones, el parámetro es $\mu_1 - \mu_2$ y su estimador $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$. Si se compara la proporción entre dos poblaciones, el parámetro es la diferencia de proporciones poblacionales: $P_1 - P_2$ y su estimador, la diferencia de proporciones muestrales: $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$. Ambos estimadores (diferencia de medias y diferencia de proporciones) tienen distribución normal, o bien, en el caso de la media, distribución t, si se trata de muestras pequeñas.

Distribución del cociente de varianzas

Para comparar varianzas, el parámetro es el cociente de las varianzas poblacionales $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ y el estimador el cociente de las varianzas muestrales $\frac{s_1^2}{s_2^2}$. La relación entre estimador y parámetro es:

$$\frac{\frac{s_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{s_2^2}{\sigma_2^2}} \sim F_{n_1-1, n_2-1}$$

Que indica que ese cociente es modelado por una distribución F con $n_1 - 1$ grados de libertad en el numerador y $n_2 - 1$ grados de libertad en el denominador.

Resumen de la relación entre estimadores y parámetros

Parámetro	Estimador	Estandarización del estimador	Distribución
Media: μ	$\bar{x}$	$\frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$	$N(\mu, \sigma^2)$
Media: μ (muestras pequeñas)	$\bar{x}$	$\frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$	t_{n-1}
Número de éxitos en la población X	$\hat{x}$		$B(x, n, p)$
Proporción de casos en una categoría: P (muestras grandes)	$\hat{p}$	$\frac{\hat{p} - P}{\sigma_{\hat{p}}}$	$N(P, \frac{P * (1 - P)}{n})$
Varianza: σ^2	s^2	$\frac{(n - 1) * s^2}{\sigma^2}$	χ^2_{n-1}
Cociente de varianzas: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	$\frac{s_1^2}{s_2^2}$	$\frac{\frac{s_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{s_2^2}{\sigma_2^2}}$	F_{n_1-1, n_2-1}

Parte III: Estadística inferencial

Una vez que disponemos de una síntesis de la información que hemos recogido de un conjunto de individuos, pasa a interesar otro problema: el de preguntarnos si eso que se ha observado vale también para otros, a los que se ha observado. Si hemos visto a muchas personas, algunas exigentes consigo mismo y otras que no lo son y hallamos que las primeras manifiestan más ansiedad en los exámenes que las segundas, ¿podemos decir que la autoexigencia incide en la ansiedad?, es decir, ¿podemos generalizar nuestro resultado? La Estadística inferencial se ocupará de esto, de decirnos bajo qué condiciones se pueden extender nuestros hallazgos a casos no observados.

Si encontramos niños de madres que han tomado bebidas alcohólicas durante el embarazo y niños de madres que no bebieron y descubrimos que, en promedio, los hijos de madres bebedoras tienen niveles de desarrollo motor más bajo que los hijos de madres no bebedoras ¿podemos afirmar que beber alcohol durante el embarazo retrasa el desarrollo motor de los hijos *en general*? Según cuántos niños hayamos observado, según qué tan grande sea la diferencia entre el promedio de desarrollo motor de los hijos de bebedoras y no bebedoras, según qué tan variable sea el desarrollo entre los niños, tendremos o no argumentos para generalizar el resultado y afirmar que existe o no una relación entre consumo de alcohol durante el embarazo y desarrollo motor del niño. Se establece así una relación entre variables que pasa a tener validez general, no solo para los niños que fueron efectivamente observados.

Cuando se realicen generalizaciones, éstas estarán limitadas a un contexto específico. El análisis que se haga, de la relación entre pobreza y educación en Argentina, puede no ser válido para la población de Brasil, ni el efecto de la fijación de metas elevadas es el mismo en los países asiáticos que en los latinoamericanos. Es decir, debe estar explícita cuál es la población de referencia a la cual es válido extender los resultados que se obtienen. Por el contrario, la relación entre el consumo de alcohol de las madres y el desarrollo de sus hijos, como tiene anclaje biológico, puede hacerse extensiva a la población general.

Los dos procedimientos que se desarrollan en los capítulos siguientes son: estimación por intervalo (o estimación de parámetros o también intervalos de confianza) y pruebas de hipótesis (conocida también como docimasia de hipótesis).

Estos son los dos métodos que se utilizan para producir generalizaciones estadísticas a partir de muestras, es decir, inferencias.

Capítulo 10 Estimación por intervalo

Hemos llegado a este punto en el que haremos uso de casi todos los elementos que se presentaron hasta aquí. Se dedicó la Parte I a la descripción de datos provenientes de una muestra y luego, en la Parte II se ingresó al terreno de la incertidumbre. Solo resta integrar estos elementos en un procedimiento para realizar las estimaciones que interesen. Por esta razón se trata de un capítulo de plena aplicación práctica.

Estimación puntual

La media muestral $\bar{x}$ es un estimador de la media poblacional, por lo que ya se cuenta con una primera estimación de ese parámetro μ . De igual modo, la proporción muestral ($\hat{p}$) estima a la proporción poblacional (P). De modo que ya se conocen estimaciones de esos dos parámetros, son estimaciones puntuales. Se llaman así porque ofrecen un único valor como estimación del parámetro de interés. Por ejemplo si en una muestra de 50 psicólogos que egresaron en los últimos diez años se encuentra que han terminado la carrera con una nota promedio de $\bar{x} = 6,50$, disponemos de una media muestral; si ahora preguntamos por el promedio con que terminaron la carrera todos los psicólogos que egresaron en los últimos diez años, la respuesta es tentativa, diremos que “debe ser cercano a 6,50”. Con esta expresión imprecisa, hacemos una estimación de la media poblacional (μ). De igual modo, si en la misma muestra de 50 psicólogos, se ve que la proporción de mujeres es $\hat{p} = 0,70$, podremos decir que, del total de psicólogos egresados en los últimos diez años, “alrededor del 70% son mujeres”. Así hacemos una estimación de P a partir de $\hat{p}$. Pero estas estimaciones son deficientes, ya que no sabemos cuán cerca puede estar la verdadera nota promedio de 6,50 ó la verdadera proporción de mujeres del 70%. Estas son las que se denominan estimaciones puntuales.

Intervalos de confianza

Una estimación más completa de los parámetros mencionados, se denomina **estimación por intervalo**. Ella consiste en ofrecer no ya un número como en la estimación puntual, sino un intervalo, acerca del cual se tiene cierto grado de certeza (o se deposita cierta confianza) que contenga al parámetro. Así, en lugar de decir que el promedio con que egresa el total de psicólogos de esta facultad “debe ser cercano a 6,50”, se construirá un intervalo, que dirá, por ejemplo, “hay una confianza del 95% en que el intervalo $[6,10; 6,90]$ contiene al promedio con que egresan los psicólogos de esta facultad”. De manera equivalente, en lugar de “entre los que egresan hay alrededor del 70% de mujeres”, se afirmará algo como “con una confianza del 95%, el intervalo $[68; 72]\%$ contiene a la proporción de mujeres sobre el total de egresados”. Vemos entonces que esta forma de estimar ofrece dos números, los límites de un intervalo, del que esperamos contenga al parámetro que estimamos. Decimos “esperamos que se contenga” porque no hay certeza absoluta de que se encuentre allí, hay una confianza que en estos ejemplos hemos fijado en el 95%, y veremos que puede elegirse.

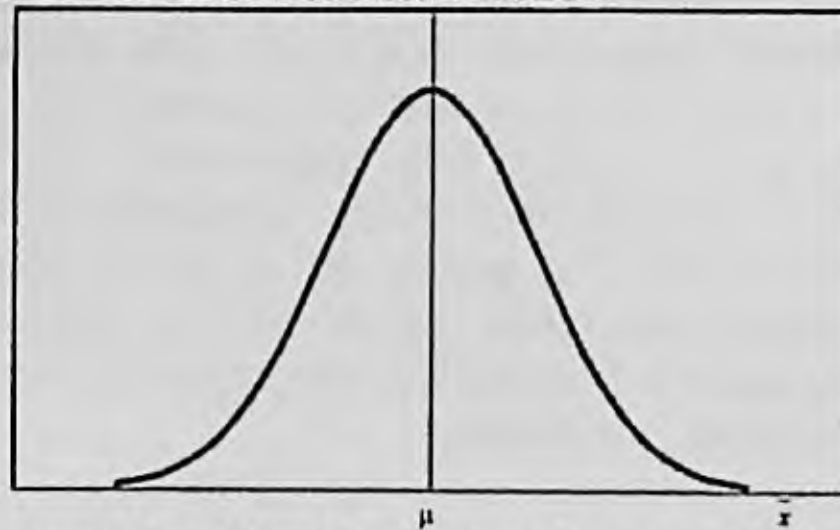
Veamos a continuación cómo construir estos intervalos de confianza para estimar los dos primeros parámetros que hemos tratado; la media y la proporción.

Estimación de la media

Vamos a hacer uso de lo que sabemos hasta el momento sobre las distribuciones en el muestreo para mejorar la calidad de las estimaciones puntuales y construir los intervalos de confianza. Para ello, empezaremos con la media. Debido a que la muestra ha sido obtenida de manera aleatoria, la media muestral es una variable aleatoria, cuya distribución tiene media μ y desviación estándar $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Además, a medida que aumenta el tamaño de la muestra, esa distribución tiende a ser normal, es decir que será tanto más cercana a una distribución normal cuanto más grande sea n . A los fines prácticos, una muestra de 30 casos se considera "suficientemente grande" como para usar la distribución normal en la distribución de $\bar{x}$. Si la muestra es más pequeña que ese tamaño, no podemos usar inmediatamente la distribución normal, sino que deberemos apelar a la distribución t de Student. Trabajaremos primero suponiendo que se trata de muestras lo suficientemente grandes y usaremos la distribución normal. Los paquetes informáticos de análisis de datos usan la distribución t siempre, cualquiera sea el tamaño de la muestra, haciendo uso de la convergencia de esta distribución hacia la normal cuando n crece.

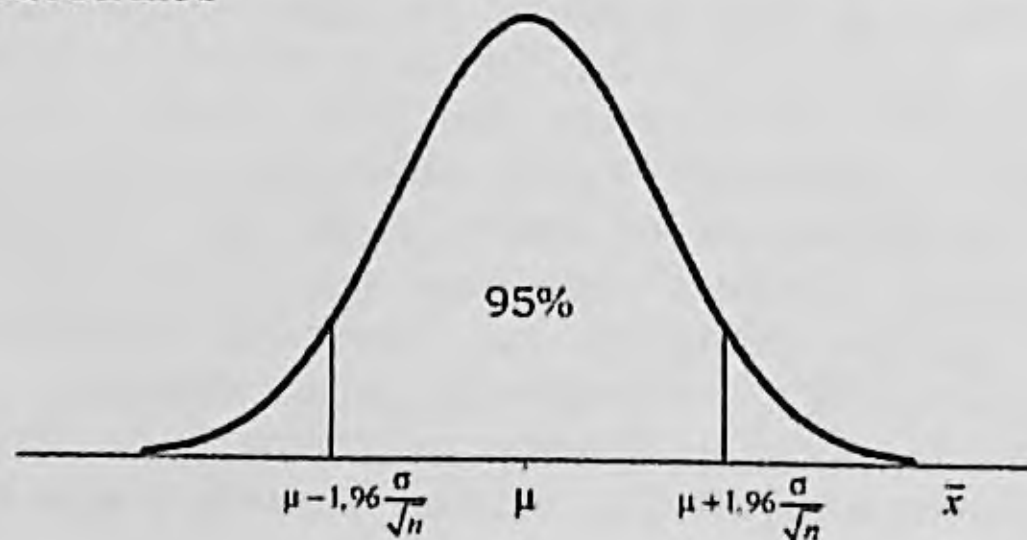
Con esa información, podemos calcular las probabilidades de los diferentes valores de $\bar{x}$. La representación gráfica de esta distribución es:

Gráfico 1: Distribución de las medias muestrales



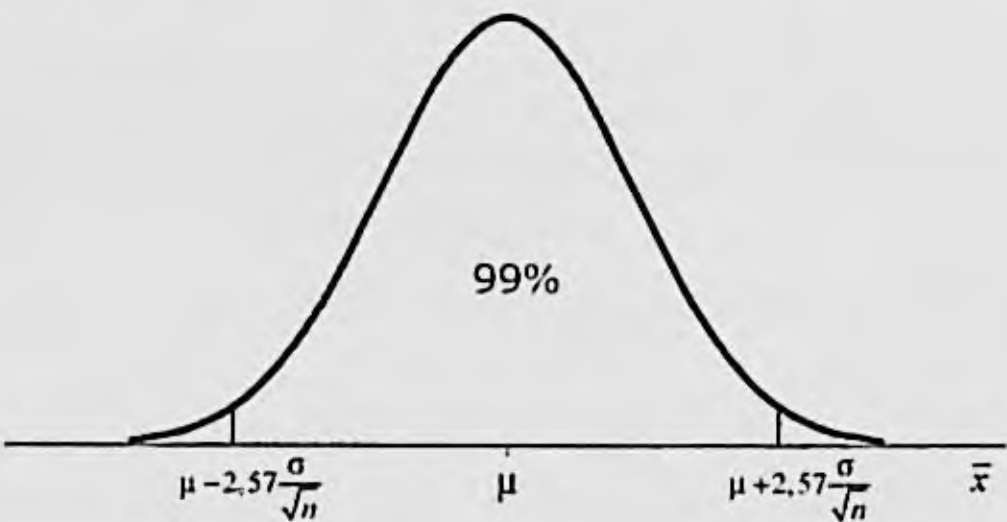
Recordando que, bajo una distribución normal, a 1,96 desviaciones estándar por encima y por debajo de la media, se encuentra el 95% de los casos, se concluye que, si extrayéramos todas las muestras de tamaño n posibles de esa población, el 95% de ellas estaría entre $\mu - 1,96 * \sigma_{\bar{x}}$ y $\mu + 1,96 * \sigma_{\bar{x}}$, o lo que es lo mismo, entre $\mu - 1,96 * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y $\mu + 1,96 * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Gráfico 2: Intervalo en torno a la media poblacional que incluye al 95% de las posibles medias muestrales



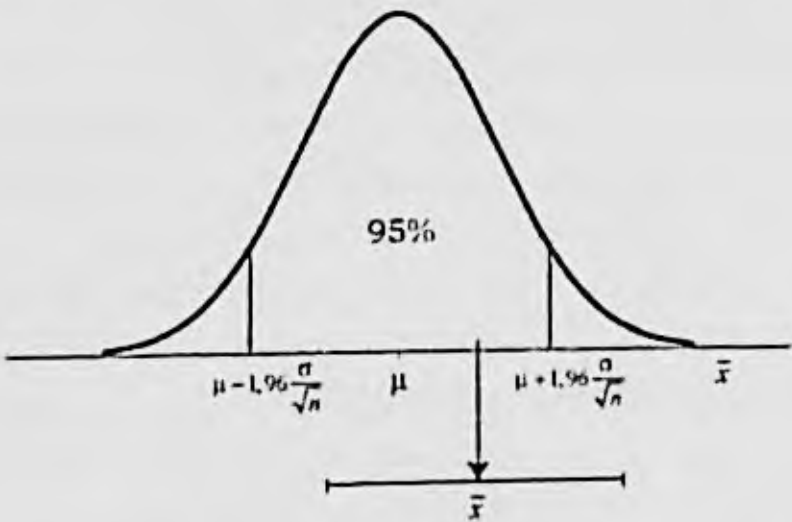
De manera equivalente, como a 2,57 desviaciones estándar alrededor de la media se encuentra el 99% de las observaciones, entonces el 99% de las medias muestrales estará entre $\mu - 2,57 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y $\mu + 2,57 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Gráfico 3: Intervalo en torno a la media poblacional que incluye al 99% de las posibles medias muestrales

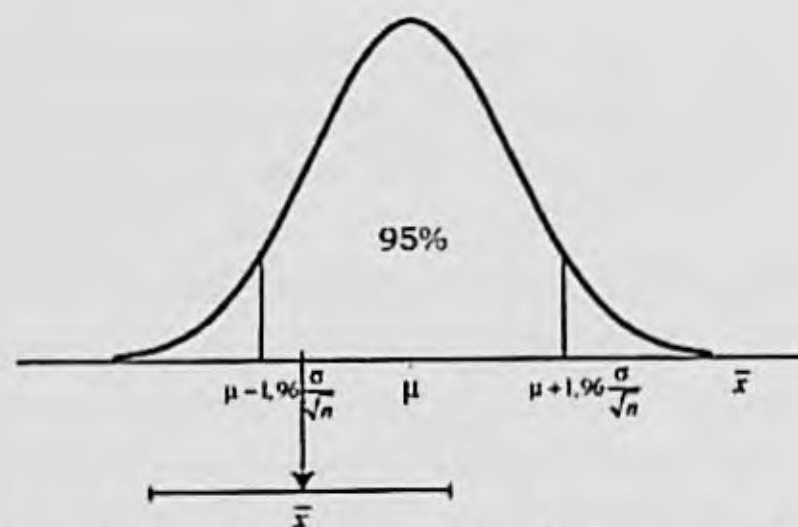


Este es el alcance más operativo de los resultados teóricos, ahora hay que ir al problema. Las curvas de arriba solo pueden dibujarse si se conoce μ y es justamente el valor que trata de estimarse. Además, en el muestreo no se extraen "todas las muestras" sino solo una, y ella se usa para hacer la estimación. Lo que sabemos de esa muestra es que tiene una probabilidad del 0,95 de estar en la zona marcada en el gráfico 2 y una probabilidad 0,99 de estar donde indica el gráfico 3. Concentremos nuestra atención en el caso del gráfico 2, correspondiente a la zona donde se halla el 95% de todas las medias muestrales posibles.

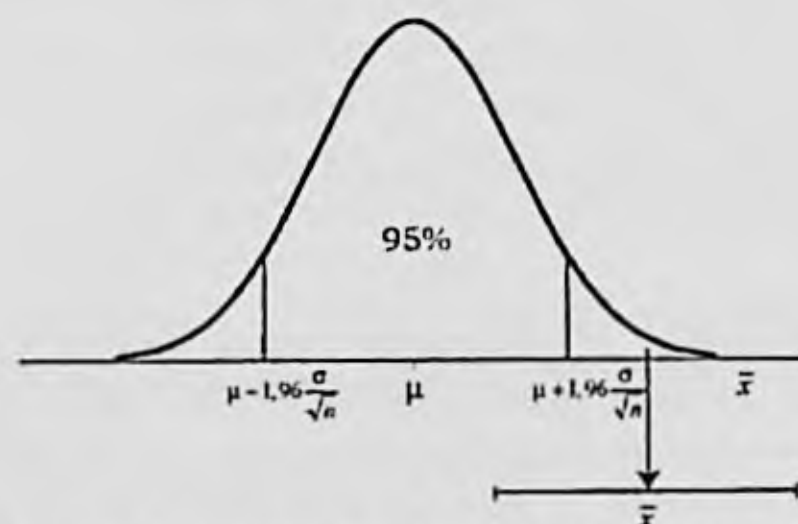
Se extrae la muestra (probabilística, con todos los resguardos que corresponda para que admita la generalización de las conclusiones a que lleve), en esa muestra calculamos $\bar{x}$. Supongamos que la muestra da lugar a la media que está indicada en este gráfico.



Si construimos un intervalo de la misma amplitud que el anterior, pero ahora centrado en $\bar{x}$, en vez de centrado en μ , vemos que ese intervalo contiene a μ . Si la $\bar{x}$ fuera la que está en el gráfico siguiente.



También un intervalo alrededor de ella contendría a μ . Por el contrario en el caso siguiente:



El intervalo alrededor de $\bar{x}$ no contiene a la media poblacional.

- ¿Qué condición debe cumplir $\bar{x}$ para que el intervalo que se construya a su alrededor contenga a μ ?
- Debe estar entre $\mu - 1,96 * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y $\mu + 1,96 * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- ¿Qué proporción de las $\bar{x}$ cumple esa condición?
- El 95% de ellas.

Así, el 95% de las $\bar{x}$ posibles dará lugar a intervalos que contengan a μ , el 5% restante de las $\bar{x}$ producirá intervalos que no contienen a μ .

Es importante señalar que no sabemos si nuestro intervalo contiene a μ o no, solo sabemos que hay una probabilidad de 0,95 que la contenga. Es decir, es muy probable que el intervalo contenga a μ , pero no es seguro.

¿Cuál es la expresión de ese intervalo?, dado que está centrado en $\bar{x}$, hay que sumar y restar a ese estimador lo mismo que sumamos y restamos a μ para construir el intervalo anterior, por lo que resulta:

$$\bar{x} - 1,96 * \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + 1,96 * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Estos son dos números que constituyen los límites de un intervalo que tiene una probabilidad 0,95 de contener al parámetro μ . De manera equivalente decimos que, de cada 100 intervalos que se construyan con este procedimiento, 95 contendrán a la media de la población. O bien que el 95% de las muestras aleatorias de tamaño n que se extraigan de la población, proveerán valores de $\bar{x}$ que conducirán a intervalos que contengan a la media de la población.

Cuando logramos construir un intervalo así decimos que se ha estimado a μ con un 95% de confianza. El primero valor de los indicados se llama límite inferior (L_i) y el segundo, límite superior (L_s). Así entonces:

$$L_i = \bar{x} - 1,96 * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$L_s = \bar{x} + 1,96 * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Ejemplo: Si en una muestra de 400 egresados de Psicología, encontramos que la nota promedio con que egresan es de 6,50 ($\bar{x} = 6,50$) y sabemos que la desviación estándar de la población es de 0,8 ($\sigma = 0,8$), estimamos la nota promedio con que egresaron todos los psicólogos reemplazando:

$$L_i = 6,50 - 1,96 * \frac{0,8}{\sqrt{400}} = 6,42$$

$$L_s = 6,50 + 1,96 * \frac{0,8}{\sqrt{400}} = 6,58$$

Leemos este resultado diciendo que tenemos un confianza del 95% que el intervalo [6,42; 6,58] contiene a la media de las notas con que egresaron todos los psicólogos de esta facultad. La confianza del 95% está incluida en la construcción del intervalo en el número 1,96 que multiplica al error estándar de $\bar{x}$.

La notación puede abreviarse indicando de una sola vez ambos límites, si se escribe:

$$\bar{x} \pm 1,96 * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Con lo que queremos indicar que a $\bar{x}$ se le suma y se le resta la expresión $1,96 * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

En el ejemplo, esto haría que escribamos el intervalo de manera alternativa como $6,50 \pm 0,08$, que indica cuál es la media muestral (el estimador puntual) y la cantidad que debe sumarse y restarse para llegar a los límites.

Si quisiéramos estar más seguros acerca de que el intervalo contiene a μ , podríamos usar los puntos que delimitan el 99% del área. Para ello, z vale 2,57 y los límites del intervalo resultan: $\bar{x} \pm 2,57 * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Para el ejemplo anterior, con una confianza del 99%, el intervalo es:

$$L_i = 6,50 - 2,57 * 0,04 = 6,50 - 0,10 = 6,40$$

$$L_s = 6,50 + 2,57 * 0,04 = 6,50 + 0,10 = 6,60$$

Con lo que ahora diremos que, con una confianza del 99%, el intervalo [6,40; 6,60] contiene a la media de las notas con que egresaron todos los psicólogos de esta facultad. Otra opción es la de escribir el intervalo como $6,50 \pm 0,10$, la media muestral es la misma y aumentó lo que debe alejarse de ella para llegar a los límites.

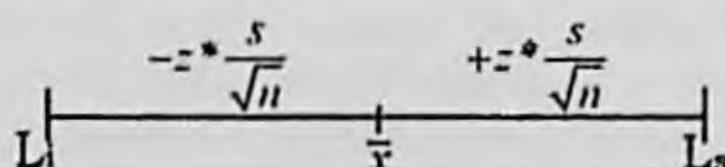
Notemos que este aumento en la confianza de la estimación, al pasar del 95 al 99%, tiene un costo, porque el intervalo es ahora más amplio: el límite inferior es menor que en el anterior y el superior, mayor. Antes el intervalo iba desde 6,42 a 6,58 y ahora va desde 6,40 hasta 6,60. Más tarde volveremos sobre este punto.

De manera general, el intervalo se escribe como $\bar{x} \pm z * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, dejando z como variable, que puede reemplazarse por el valor que corresponda según la confianza que se elija para la estimación (por ahora 1,96 para 95% y 2,57 para 99%)

Sin embargo, esta manera de calcular los límites del intervalo tiene un problema para usarse en la práctica, ya las fórmulas para calcular los límites, requieren que se conozca σ , la desviación estándar de la población. Pero como nuestros datos son muestrales, no conocemos σ , a cambio de ella usaremos la desviación estándar de la muestra, a la que podemos calcular a partir de los datos disponibles⁷⁹. Con ese ajuste, la expresión para el cálculo de los límites del intervalo de confianza será:

$$\bar{x} \pm z * \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Que puede representarse gráficamente así:



En este gráfico solo podemos dibujar el segmento que representa al intervalo en torno a $\bar{x}$, pero no podemos dibujar la campana correspondiente a la distribución, ya que no conocemos μ que es donde la campana se centra.

Ejemplo (datos reales): Se dispone de una muestra de 277 alumnos que rindieron el primer parcial, conocemos sus notas y queremos usarlas para hacer una estimación de la nota promedio de todo el curso (que cuenta con 1600 alumnos). Haremos esa estimación con una confianza del 95%.

De la muestra hemos obtenido $\bar{x} = 6,63$ y $s = 2,15$, con lo que los límites resultan:

$$\bar{x} \pm z * \frac{s}{\sqrt{n}} = 6,63 \pm 1,96 * \frac{2,15}{\sqrt{277}} = 6,63 \pm 1,96 * 0,13 = 6,63 \pm 0,25$$

Usando primero el signo menos, obtenemos $L_i = 6,38$ y luego sumando $L_s = 6,88$. Entonces podemos afirmar el intervalo 6,38; 6,88 contiene a la nota promedio del total de alumnos del curso, con una confianza del 95%.

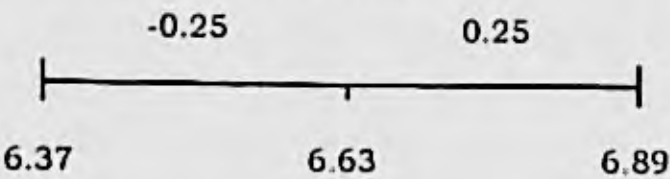
La solicitud de esta operación a InfoStat® se encuentra en el video *intervalo de confianza* y la salida tiene la forma:

⁷⁹Esto es válido en la medida que se trate de muestras grandes ($n > 30$), en caso contrario, la distribución que debemos usar es la t de Student. Cuando fijemos la confianza, ya no serán z los valores que multiplicarán a $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ sino puntajes t , cuyos grados de libertad se calculan como $n-1$. Pero, para poder usar la distribución t , los valores de la muestra deben provenir de una distribución normal en la población. Si esto no se cumple, la estimación puede realizarse buscando los límites a partir de una reconstrucción de la distribución empírica, por un método de remuestreo llamado "bootstrap".

Variable	Parámetro	Estimación	E.E.	n	LI (95%)	LS (95%)
Primero	Media	6.63	0.13	264	6.37	6.89

La variable se llama “primero” en referencia al primer parcial. El E.E. es el error estándar del estimador, proviene de $\frac{s}{\sqrt{n}}$, que es $\frac{2,13}{\sqrt{277}} = 0,13$. Ese error estándar del estimador es el que se multiplica por z para obtener el término que conduce a los límites del intervalo.

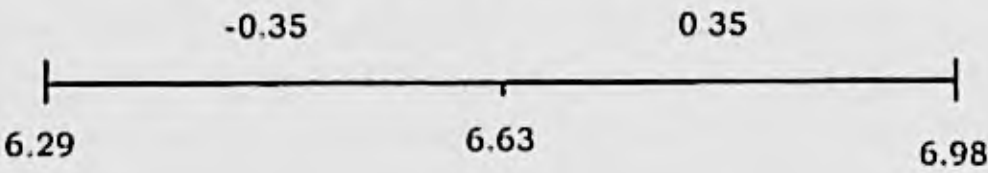
Una representación gráfica de esta estimación es:



Si la confianza se solicita en el 99%, el programa da:

Variable	Parámetro	Estimación	E.E.	n	LI (99%)	LS (99%)
Primero	Media	6.63	0.13	264	6.29	6.98

Comparada con la salida anterior, solo han cambiado los límites del intervalo, ya que son los mismos datos muestrales. El cambio en la confianza se realiza por un cambio en el valor de z y eso hace que cambien los límites. El gráfico tiene ahora la forma:



Se observa que un aumento en la confianza incide en la amplitud del intervalo, éste último es más amplio que el primero construido. Más adelante trataremos esta relación con detalle.

Estimación de la proporción

Cuando trabajamos con variables cualitativas (nominales u ordinales) no es posible calcular la media ni la desviación estándar sino solo considerar la proporción de casos que hay en una categoría que elegimos. La proporción es la frecuencia relativa de la categoría que se elige, la cantidad de casos en esa categoría dividida el tamaño de la muestra. Cuando se trata de variables con solo dos categorías (dicotómicas) puede elegirse cualquiera de ellas. Por ejemplo si es el resultado de un examen y las categorías son aprobado – no aprobado, podemos interesarnos por la proporción de cualquiera de ellas, ya que la otra es el complemento (lo que le falta para llegar a uno). Si una es 0,70 (70%), la otra no puede sino ser 0,30 (30%). Es diferente si la variable tiene más de dos categorías, por ejemplo si se trata de la intención de voto para las elecciones presidenciales. Allí es usual que haya más de dos candidatos, por lo que la proporción de uno de ellos no nos dice mucho sobre la de cada uno de los otros: si hay cinco candidatos y uno se lleva el 40%, solo sabemos que el 60% restante se reparte

entre los otros cuatro, pero no sabemos cuánto le corresponde a cada uno. A estos casos los trataremos como si fueran dicotómicos: una categoría será el candidato que nos interesa y la otra categoría estará formada por todos los demás. Así, si un candidato tiene una proporción de 0,40 a su favor, solo nos interesa que tiene una proporción de 0,60 que no está a su favor y no nos preocupamos por saber cómo se reparte ese 60% en los demás candidatos. Tratamos una categoría frente a todas las demás. De este modo es que puede definirse la proporción de personas que usa anticonceptivos orales, frente a quienes usan todos los demás métodos; o la proporción de alumnos promocionados frente a regulares y libres; o la proporción de argentinos entre todos los estudiantes extranjeros que hay en España, sin interesarnos por el modo en que se distribuye la proporción entre las demás nacionalidades. Lo que hacemos con este procedimiento es simplemente llamar la atención sobre una categoría y confrontarla con el resto indiscriminado. La categoría elegida o categoría de referencia, se llama **éxito**, su frecuencia absoluta, **cantidad de éxitos** y su frecuencia relativa **proporción de éxitos**.

Por este procedimiento trataremos siempre con dos grupos, uno formado por los casos que son de nuestro interés y el otro por los demás casos.

Existen varios procedimientos para construir intervalos de confianza para la proporción, aquí mencionaremos el de Clopper-Pearson, el de Wald y el de Wilson.

Intervalo de Clopper-Pearson

El primer modo para construir un intervalo para estimar la proporción, es usar la distribución binomial. Para ello, partimos del estimador puntual y buscamos los dos valores de $\hat{p}$ que delimiten el 95% central de la distribución.

Ejemplo (datos reales): a partir de la muestra de alumnos que rindieron el parcial se busca estimar, al 95% de confianza, la proporción de quienes lo aprobaron.

Sabemos que, de los 277 muestreados que rindieron, 255 lo aprobaron, en consecuencia la proporción de aprobados es, en la muestra⁸⁰, $\hat{p} = \frac{255}{277} = 0,920$. Este es nuestro estimador puntual de la proporción de aprobados para todo el curso. En el video *límites estimación p*, usamos InfoStat® para encontrar los valores de x que acumulan el 2,5% (0,025) y el 97,5% (0,975) de la distribución binomial. El primer valor que devuelve el programa es 246, que es la cantidad de "éxitos" que acumula una probabilidad de 0,025, mientras que el segundo, 263, la cantidad de éxitos que acumula una probabilidad de 0,975. Estas cantidades de éxitos deben transformarse en proporciones de éxitos, a fin de para encontrar los límites del intervalo. Para eso, se calculan sus frecuencias relativas, es decir, se los divide por el tamaño de la muestra:

$$L_l = \frac{246}{277} = 0,8881$$

$$L_s = \frac{263}{277} = 0,9495$$

⁸⁰ Estos datos conducen a la distribución:

resultado	f	f'
aprobado	255	0,920
no aprobado	22	0,080
total	277	

Diremos entonces que, con una confianza del 95%, el intervalo [88,81; 94,95]% contiene a la proporción de alumnos que aprobaron en toda la población.

Esta forma de construir el intervalo de confianza para la proporción —de Clopper-Pearson—, es la más antigua, se la conoce también como “método exacto”, porque no apela a aproximaciones para calcular los límites, sino que usa la distribución que corresponde al experimento: la binomial. Este es el procedimiento que utiliza InfoStat® para construir intervalos de manera automática.

Intervalo de Wald

Si se cumplen las condiciones para realizar una aproximación normal de la distribución binomial, el razonamiento que seguimos para la estimación de P será análogo al que seguimos para estimar μ . La estructura de los límites del intervalo de confianza es ahora:

$$\begin{aligned} L_l &= \hat{p} - z * \sigma_{\hat{p}} \\ L_s &= \hat{p} + z * \sigma_{\hat{p}} \end{aligned}$$

En la que:

$\hat{p}$ es la proporción de casos en la categoría que estimamos calculada sobre los datos de la muestra.

z asume el valor de 1,96 si vamos a estimar con una confianza del 95%, ó de 2,57 si queremos una confianza del 99%.

$\sigma_{\hat{p}}$ es la desviación estándar del estimador:

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{P * (1 - P)}{n}}$$

Pero, tal como pasó con la estimación de $\bar{x}$, en la que ignorábamos σ por tratarse de un valor poblacional, ahora desconocemos P (¡es exactamente lo que estamos tratando de estimar!), por lo que deberemos necesariamente reemplazarla por su estimador: $\hat{p}$ ⁸¹. Resultará:

$$\hat{\sigma}_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\hat{p} * (1 - \hat{p})}{n}}$$

Y los límites del intervalo son:

$$\hat{p} \pm z \sqrt{\frac{\hat{p} * (1 - \hat{p})}{n}}$$

Ejemplo (datos reales): la muestra de alumnos que rindieron el parcial a partir de la cual se busca estimar, al 95%, la proporción de quienes lo aprobaron. Sabemos que, de los 277 que rindieron, 255 lo aprobaron, en consecuencia la proporción de aprobados es $\hat{p} = \frac{255}{277} \approx 0,920$. Este es nuestro estimador puntual de la proporción de aprobados para todo el curso. Para hacer el intervalo, usamos la expresión anterior y resulta:

⁸¹Como antes hicimos reemplazando σ por s .

$$\hat{p} \pm z \sqrt{\frac{\hat{p} * (1 - \hat{p})}{n}} = 0,920 \pm 1,96 * \sqrt{\frac{0,92 * 0,08}{277}} = 0,920 \pm 0,032$$

Cuando restamos, obtenemos el límite inferior del intervalo:

$$L_i = 0,920 - 0,032 = 0,892$$

y sumando:

$$L_s = 0,920 + 0,032 = 0,952$$

Si se escribe de manera abreviada, la expresión toma la forma:

$$L_i = 0,920 \pm 0,032$$

Con el valor explícito de la proporción muestral que es el estimador puntual de P . El resultado dice que hay una confianza del 95% que el intervalo [89,2; 95,2]% contenga a la proporción de aprobados de toda la población. El intervalo difiere un poco del hallado con el método exacto, porque es una aproximación.

Esta forma de construir el intervalo de confianza para P resulta de calidad aceptable si el producto $n * \hat{p} * (1 - \hat{p})$ es mayor a 5, y mejor aun si ese resultado es mayor a 10 (Canavos, 1988). Sin embargo, Cepeda-Cuervos y otros (2008) señalan evidencia sobre la inadecuación de esta estimación aun cuando la condición se cumple. Por esta razón se limita el uso de este modo de calcular el intervalo cuando el número de observaciones es mayor a cien⁸².

Intervalo de Wilson

Una mejora para la calidad de la estimación es propuesta por Newcombe y Merino (2006), con un intervalo llamado de *score* o de Wilson, cuyos límites son:

$$\hat{p} \pm \frac{z}{n} * \sqrt{\frac{(\hat{p} * (1 - \hat{p}) + \frac{z^2}{4 * n})}{n}}$$

Este intervalo no colapsa para $\hat{p} = 0$ ó $\hat{p} = 1$ y tiene mejor calidad que el de Wald, es conveniente optar por esta alternativa si se trata de pequeñas muestras o de valores de $\hat{p}$ próximos a cero o a uno. De todos modos, siempre es preferible utilizar la distribución binomial que es la adecuada para modelar el proceso.

Obtención informática del intervalo para la proporción

En el video *estimación P con infostat* se muestra la obtención del intervalo para estimar la proporción de alumnos que aprobó el segundo parcial. Como la variable (nota del segundo parcial) es cuantitativa, se debe indicar qué es lo que vamos a llamar éxito. Aquí, nos interesa la proporción de aprobados, por lo que la condición "éxito" es que la nota sea 4 o más (≥ 4). La salida tiene forma:

⁸²Pero si $\hat{p}$ es muy pequeño, el límite inferior es negativo y si $\hat{p}$ es muy cercano a uno, el límite superior puede superar a 1, decimos que en estos casos el intervalo colapsa.

Variable	Parámetro	Estimación	E.E.	n	LI(95%)	LS(95%)
Segundo	Proporción (≥ 4)	0.79	0.03	245	0.74	0.84

La indicación entre paréntesis (≥ 4) se refiere a la condición que pusimos como éxito, nota 4 o superior.

Si aumentamos la confianza al 99%, el intervalo es:

Variable	Parámetro	Estimación	E.E.	n	LI(99%)	LS(99%)
Segundo	Proporción (≥ 4)	0.79	0.03	245	0.73	0.86

Como sucedió con la media, el aumento en la confianza se traduce en un aumento en la amplitud del intervalo.

La calidad de las estimaciones por intervalo

Intuitivamente, una estimación es de mejor calidad si es “ajustada”, es decir si el intervalo es pequeño. Por ejemplo, si estimamos la edad de una persona entre 28 y 30 años, tenemos una estimación de mejor calidad que si decimos que tiene entre 20 y 40 años. Eso es porque el primer intervalo es más pequeño, los límites están más cerca. La primera estimación nos da más información que la segunda, porque delimita el valor al que estima entre números más cercanos. En las estimaciones que hemos hecho hasta aquí, de la media y de la proporción, hemos partido del estimador puntual ($\bar{x}$ y $\hat{p}$) y desde él sumamos y restamos la misma cantidad para obtener los límites del intervalo.

Esa cantidad que sumamos y restamos determina la amplitud del intervalo: cuanto más grande sea, tanto mayor será el intervalo, es decir, tanto mayor será la distancia entre los límites inferior y superior. Esa cantidad se denomina **error de estimación**. Las estimaciones están siempre acompañadas de un error, es un componente intrínseco al proceso. No es error en el sentido de equivocación o de falla, sino de imprecisión, una imprecisión que no puede evitarse, que no puede hacerse igual a cero. Se calcula como la distancia que hay desde el centro del intervalo hasta cualquiera de los límites. En el ejemplo anterior, sobre la estimación intuitiva de la edad de alguien, el centro del primer intervalo es 29, por lo que el error es 1 año, por eso se puede también escribir como 29 ± 1 . El segundo intervalo de este ejemplo tiene centro en 30 y el error es de 10 años, lo escribimos 30 ± 10 . Independientemente que el centro de los intervalos difiera levemente, este segundo intervalo tiene un mayor error de estimación. Esto es equivalente a decir que tiene menos **precisión**.

Se llama **error de estimación** a la distancia que hay entre el estimador puntual y cualquiera de los límites del intervalo. Cuanto mayor es el error de estimación menor es su **precisión**.

En la estimación del promedio con que egresan los psicólogos, escribimos $6,50 \pm 0,08$ al estimar al 95% de confianza y $6,50 \pm 0,10$ cuando la confianza se pasó al 99%. Allí estábamos escribiendo el intervalo como el estimador más/menos el error de estimación. En el primer caso el error de estimación es de

0,08 y en el segundo de 0,10, por eso decimos que la primera estimación es más precisa, tiene menos error.

Del mismo modo, al estimar, con una confianza del 95%, la proporción de quienes aprobaron el parcial escribimos $0,920 \pm 0,032$, el error de estimación es en este caso de 0,032 (ó 3,2%).

El error de estimación en la media

En la expresión general de la estimación por intervalo de μ , el error es el término que se suma y resta: $z * \frac{s}{\sqrt{n}}$. ¿De qué depende que ese término sea grande o chico?

Hay tres elementos en este término: z , s y n . De ellos va a depender que haya más o menos error en la estimación o, dicho de otra manera, que la estimación sea más o menos precisa. Veamos el efecto de cada uno:

z : Es elegido por el investigador cuando establece la confianza. En los ejemplos que hemos visto, asumió el valor de 1,96 para un 95% de confianza o de 2,57 para una confianza de 99%. Cuanto más confianza o certeza queramos tener en nuestra estimación, más grande será z y, en consecuencia mayor será el error de estimación. Por lo tanto no se pueden tener las dos cosas: más confianza va acompañada de menos precisión. Si todos los demás elementos del error quedan fijos, los intervalos más amplios proveen menos información, pero mayor certeza en la inclusión del parámetro que se estima. Para elegir el nivel de confianza (y en consecuencia determinar z) debe tomarse una decisión que equilibre la confianza y la precisión, ya que si una crece la otra disminuye. Si alguien intentara lograr precisión absoluta, es decir, error igual a cero, encontraría una confianza también igual a cero, es decir, ninguna certeza. A la inversa, intentar fijar la confianza en el 100%, lleva a un error infinito.

s : La desviación estándar en la muestra. Es la medida de la variabilidad de los datos que se observan, y es una estimación de la verdadera variabilidad que tiene la característica que estamos estudiando en la población. Incide negativamente sobre el error, cuanto más grande es s más error tenemos. Eso refleja el hecho que si la población es muy heterogénea respecto de la cualidad que queremos estimar, tendremos estimaciones de peor calidad que si es similar para los individuos de la población. Sobre s no podemos decidir, no tenemos control sobre su valor, si es grande, tendremos peores estimaciones que si es pequeña. El muestreo estratificado es una forma de enfrentar situaciones de mucha dispersión, construyendo subconjuntos (estratos) que contengan elementos homogéneos en su interior, es decir que tengan menos dispersión que el conjunto completo.

n : El tamaño de la muestra, se encuentra en el denominador del término del error, por lo que su aumento reduce el error. Cuanto más grande sea n , menor será el error, es decir que muestras de mayor tamaño dan mayor precisión. En principio, podemos elegir n , pero depende del presupuesto que se prevea para la investigación. Si se puede obtener una muestra grande siempre es preferible, porque se lograrán estimaciones de mejor calidad.

Esto no debe confundirse con la calidad de la muestra. Todo lo mencionado sobre estimación, supone que se trata de muestras probabilísticas, es decir muestras aleatorias, para las cuales rigen las leyes de probabilidad que hemos usado. Si la muestra no es aleatoria, no se pueden hacer estimaciones con estos procedimientos y; esto es muy importante: no se mejora una muestra tomando más casos. Si la muestra no es probabilística, la estimación no mejorará porque se tomen muchos casos.

Para ejemplificar los efectos de los diferentes elementos en el error de estimación, volveremos sobre los datos de las notas del primer parcial y haremos tres diferentes estimaciones de la nota promedio:

Sobre el total de la muestra (277 casos) al 90% de confianza:

Variable	Parámetro	Estimación	E.E.	n	LI(90%)	LS(90%)
Primero	Media	6,76	0,13	277	6,55	6,97

Sobre el total de la muestra (277 casos) al 95% de confianza:

Variable	Parámetro	Estimación	E.E.	n	LI(95%)	LS(95%)
Primero	Media	6,76	0,13	277	6,51	7,01

Sobre el total de la muestra (277 casos) al 99% de confianza:

Variable	Parámetro	Estimación	E.E.	n	LI(99%)	LS(99%)
Primero	Media	6,76	0,13	277	6,43	7,09

Estas tres primeras estimaciones muestran cómo, sin cambiar el tamaño de la muestra ni la dispersión, el error aumenta (los intervalos se vuelven más amplios) cuando crece la confianza.

Sólo sobre el turno tarde (85 alumnos) al 95% de confianza:

Variable	Parámetro	Estimación	E.E.	n	LI(95%)	LS(95%)
Primero	Media	6,78	0,25	85	6,28	7,27

Si comparamos esta estimación con la segunda, que está hecha también al 95%, vemos que es menos precisa, ya que la distancia entre los limites es de 7,01 – 6,51 = 0,50 en el primer caso y 7,27 – 6,28 = 0,99. Esto se debe al menor tamaño de muestra: menos casos, más error de estimación.

El error de estimación en la proporción

En la construcción del intervalo de Wald, el término del error en la estimación de la proporción es:

$$z * \sqrt{\frac{\hat{p} * (1 - \hat{p})}{n}}$$

En él hay dos elementos en común con el error en la estimación de la media: los valores de *z* y de *n*. No agregaremos nada sobre ellos, porque el efecto es el mismo que en la media: un aumento de *z* por aumento de la confianza, da lugar a un

incremento en el error de estimación, mientras que un aumento en el tamaño de la muestra, lo reduce.

Lo nuevo en este caso es que no hay s , por el contrario, lo que hay en su lugar es el producto de la proporción por su complemento $\hat{p} * (1 - \hat{p})$, que se encuentra afectado por la raíz, pero eso no interesa para analizar su efecto sobre la precisión.

Recordemos el problema de la medición de la dispersión para variables nominales. Se vio que una variable nominal tiene poca dispersión cuando una categoría “absorbe” a las otras, cuando muchos casos están en una sola categoría, o cuando una categoría tiene una frecuencia superior a todas las demás. Por el contrario, la dispersión es elevada cuando las frecuencias son similares, cuando la distribución de casos es “pareja” en todas las categorías. En la estimación de la proporción estamos tratando solo con dos categorías, por lo que la dispersión será máxima cuando las proporciones de ellas sean similares. Siendo solo dos, son iguales cuando cada una de ellas vale 0,50 ($\hat{p} = 0,50$ y $(1 - \hat{p}) = 0,50$), porque la mitad de los casos está en cada categoría. Por el contrario, la dispersión será menor cuanto más concentrados estén los casos en una de las categorías. Si, por ejemplo la proporción es 0,10 ($\hat{p} = 0,10$ y $(1 - \hat{p}) = 0,90$) tendremos concentración de casos en una categoría, es decir, poca dispersión. Eso está expresado en la variabilidad medida como el producto de $\hat{p}$ por su complemento: $\hat{p} * (1 - \hat{p})$.

Cuando $\hat{p} = 0,50$ y $(1 - \hat{p}) = 0,50$, entonces, el producto $\hat{p} * (1 - \hat{p}) = 0,25$. Por el contrario, cuando $\hat{p} = 0,10$ y $(1 - \hat{p}) = 0,90$, entonces, el producto $\hat{p} * (1 - \hat{p}) = 0,09$. Por eso, el producto $\hat{p} * (1 - \hat{p})$ es una medida de la dispersión de la variable nominal y ocupa, dentro del término del error, un lugar equivalente al de la varianza en la estimación de la media.

¿Cómo incide esto en el error de estimación? Como con la media, cuando la dispersión es grande, el error también lo es, entonces el error será mayor cuanto más parecidas sean $\hat{p}$ y $(1 - \hat{p})$, dicho de otra manera, cuando $\hat{p}$ sea cercana a 0,50.

El razonamiento es el mismo que con la media, cuanto mayor sea la dispersión tanto más grande será el error y menos precisa la estimación. Pero en el caso de la media, la dispersión está medida con la desviación estándar, mientras que en la proporción, viene dada por el producto $\hat{p} * (1 - \hat{p})$, que es máximo cuando $\hat{p}$ es cercano a 0,50. Entonces, las peores condiciones para hacer una estimación de la proporción, serán aquellas en que la característica que se estima afecta a porciones cercanas a la mitad de la muestra, allí será máxima la dispersión y en consecuencia también el error de estimación.

Ejemplo: a partir de una encuesta, se estima la proporción de votos que tendrá un candidato en las próximas elecciones. La muestra es de 400 casos y 90 personas dijeron que votarán a ese candidato. Como 90 es el 22,5% de 400 (su frecuencia relativa), esa es la proporción que se halla en la muestra y la estimación por intervalo al 95% de confianza da:

$$\hat{p} \pm z * \sqrt{\frac{\hat{p} * (1 - \hat{p})}{n}} = 0,225 \pm 1,96 * \sqrt{\frac{0,225 * (1 - 0,225)}{400}} = 0,225 \pm 0,041$$

Los límites del intervalo son $L_i = 0,1841$ y $L_s = 0,2659$. Para comunicarlo, diremos que el candidato tiene una intención de voto de entre el 18,41% y el 26,59%.

Aunque la lectura correcta es que hay una confianza del 95% que el intervalo [18,41; 26,59]% contenga a la verdadera proporción de personas que dicen que votarán al candidato.

Repitamos el ejercicio, ahora suponiendo que la cantidad de personas que dice que lo votaría son 200 de los 400 encuestados, es decir si la proporción muestral hubiese sido del 50%. Siempre al 95% de confianza, la estimación es:

$$\hat{p} \pm z * \sqrt{\frac{\hat{p} * (1 - \hat{p})}{n}} = 0,50 \pm 1,96 * \sqrt{\frac{0,50 * (1 - 0,50)}{400}} = 0,50 \pm 0,049$$

Vemos que el error de estimación ha pasado de 4,1% en el anterior a 4,9% ahora, sin que hayamos cambiado la confianza ni el tamaño de la muestra. Ese es el efecto de la proporción cuando es cercana al 50%.

Solicitamos a InfoStat® la estimación de la proporción de aprobados en diferentes condiciones:

Sobre el total de la muestra (277 casos) al 90%

Variable	Parámetro	Estimación	E.E.	n	LI(90%)	LS(90%)
Primero	Proporción(=1)	0,921	0,016	277	0,894	0,947

Sobre el total de la muestra (277 casos) al 95%

Variable	Parámetro	Estimación	E.E.	n	LI(95%)	LS(95%)
Primero	Proporción(=1)	0,921	0,016	277	0,889	0,952

Sobre el total de la muestra (277 casos) al 99%

Variable	Parámetro	Estimación	E.E.	n	LI(99%)	LS(99%)
Primero	Proporción(=1)	0,921	0,016	277	0,879	0,962

Vemos que al aumentar el nivel de confianza se reduce la precisión, ya que los límites se distancian, volviendo más amplio al intervalo.

Solo con el turno noche (110 alumnos) al 95%

Variable	Parámetro	Estimación	E.E.	n	LI(95%)	LS(95%)
Primero	Proporción(=1)	0,918	0,026	110	0,867	0,969

El intervalo se amplía respecto de la segunda de las estimaciones anteriores, aunque la confianza es la misma (95%), debido a la reducción en el número de casos.

Un elemento adicional a considerar sobre la calidad de una estimación es la **probabilidad de cobertura**, que indica la probabilidad que tienen los límites de contener efectivamente al parámetro. En el caso de la proporción, se escribe como $P(L_l \leq P \leq L_s)$ en la que L_l y L_s son variables aleatorias que corresponden a los límites del intervalo. Esta probabilidad de cobertura puede ser igual, menor o mayor que la confianza, que es una cobertura nominal, es decir, la que predice la teoría. La probabilidad de cobertura se calcula por simulación. Cepeda Cuervo et. al. (2008) muestran que el intervalo de Clopper-Pearson tiene una probabilidad de cobertura que supera a la nominal para todos los tamaños de muestra, por eso se lo considera conservador; ya que ofrece más certidumbre que la que se declara en

la confianza. Al contrario, el intervalo de Wald muestra probabilidad de cobertura inferior a la nominal aun cuando se usen muestras grandes. El intervalo de Wilson ofrece una probabilidad de cobertura más cercana a la nominal que el de Wald y que el exacto.

En el video *cobertura intervalos* se realiza una simulación que genera 100 intervalos para estimar una media poblacional de 20 ($\mu = 20$) con desviación estándar 10 ($\sigma = 10$ o $\sigma^2 = 100$) con muestras de tamaño 50, al 95% de confianza. En el gráfico se observa que el 94% de los intervalos contiene al parámetro, los intervalos rojos son los que no “atrapan” a la media poblacional. Este 94% es la probabilidad de cobertura.

En este capítulo hemos puesto en juego lo visto en los anteriores para poder generalizar las observaciones muestrales a toda la población de referencia, vemos que el modo con el que se hace es a través de los intervalos de confianza, que formalizan una práctica a la que estamos acostumbrados cuando hacemos estimaciones sobre cantidades que desconocemos: indicamos entre qué valores es más probable hallarlas.

La estructura general de los intervalos es:

$$\text{estimador} \pm \text{error de estimación}$$

Esa expresión ha tomado diferentes formas, ya sea para estimar la media de variables cuantitativas o la proporción de éxitos, para la que hay varios procedimientos de obtención de los límites.

En cualquiera de los casos, la lectura del intervalo obtenido se expresa:

Hay una confianza $1 - \alpha$ que el intervalo obtenido contenga al parámetro.

Capítulo 11 Prueba de hipótesis: la lógica

En este capítulo ingresamos a uno de los procedimientos de mayor difusión en las investigaciones en Psicología: la prueba de hipótesis. Se basa en los mismos principios de estimación de parámetros que se usaron para la construcción de intervalos de confianza. Aunque no está exento de críticas, este procedimiento es básico para hacer inferencias sobre la población, y las propuestas que existen como técnicas alternativas, requieren que se tenga dominio de las pruebas de hipótesis.

El razonamiento de la prueba de hipótesis

La prueba de hipótesis tiene como objetivo el de proveer argumentos para decidir en contextos de incertidumbre. A partir de lo que sabemos sobre las distribuciones en el muestreo, ése es el caso cuando necesitamos concluir acerca de una población, a partir de información que tenemos disponible en una muestra aleatoria. El resultado de la prueba permitirá decidir si lo que se observa en la muestra es compatible con una aseveración hipotética sobre la población. Nunca será posible decidir de manera taxativa que la hipótesis es verdadera, eso es algo que no podemos saber; por el contrario, podemos ver hasta qué punto lo que observamos en la muestra contradice —o no— lo que se afirma a escala poblacional. Es decir que podremos descartar una hipótesis por no ser compatible con lo que se observa, pero no a la inversa: no será posible “confirmar” una hipótesis, solo podremos concluir que la evidencia *no la contradice*, lo que también se expresa diciendo que *no hay evidencia para rechazarla*.

Empezaremos con ejemplos no muy cercanos a la estadística, a fin de ver que esta forma de razonar no es ajena a lo cotidiano. Una prueba de hipótesis puede compararse con un juicio: el acusado no es condenado hasta que no hay evidencia suficiente para hacerlo. La evidencia (las pruebas, en el lenguaje de la justicia) rara vez son completas, se trata de información fragmentada, sujeta a interpretaciones diferentes. En el inicio del juicio, “el acusado es inocente”, en nuestra notación llamaremos a esa afirmación, **hipótesis nula**, y la indicaremos **H₀**. Esta expresión indica que se trata de un estado inicial: todos son inocentes hasta que se prueba lo contrario, por lo que la hipótesis nula señala que esta persona en particular (el acusado), no es diferente de cualquier ciudadano que no ha cometido delito. Mientras no haya pruebas suficientes, la hipótesis nula se considerará aceptada. En el juicio, el fiscal aportará pruebas en dirección contraria a esta hipótesis. Buscará información para probar que debe rechazarse la hipótesis nula y condenar al acusado. Difícilmente estarán a la vista todos los datos necesarios para reconstruir la situación y dar una respuesta absolutamente inequívoca, pero si hay suficiente evidencia, se dará la hipótesis nula por rechazada. La decisión de condenar al acusado solo se tomará cuando haya muy poco riesgo de equivocarse, cuando la probabilidad de decidir de manera errada sea muy pequeña.

En este ejemplo, la población es el conjunto completo de información necesaria para tomar la decisión de manera certera, sin error. Se trataría de un conjunto infinito de datos que permitiría la reconstrucción exacta de los hechos en los que participó el acusado. Por cierto, esa información nunca está disponible, por lo que

la decisión debe tomarse a partir de un fragmento de información, que son las pruebas que han podido reunirse (la evidencia). En la analogía que hacemos con nuestros procedimientos, esta evidencia constituye la muestra a partir de la que se juzgará la hipótesis nula: aceptarla o rechazarla. La muestra constituye el fragmento de información disponible, solo que en el caso de la estimación, ésta es obtenida con procedimientos que buscan su representatividad.

Otro ejemplo: tenemos dudas sobre lo equilibrada que pueda estar una moneda que va a usarse en un juego de azar. Repitiendo la notación del ejemplo anterior, formularemos una hipótesis nula que dice que X sale con la misma frecuencia que C, que equivale a decir que hasta que no se pruebe lo contrario, X no tiene ninguna diferencia con C, la moneda está equilibrada. Esta hipótesis nula puede escribirse de manera formal, porque “salir con la misma frecuencia que C” equivale a decir que, “en infinitas tiradas, la mitad de la veces saldrá X”, por lo que escribiremos nuestra hipótesis nula así: $H_0: P=1/2$, a la que leeremos “la hipótesis nula afirma que la proporción de veces que saldrá cara es $1/2$ ”.

Luego debemos producir los datos para hacer la prueba, al tirar la moneda 100 veces esperaríamos —si la hipótesis nula se sostiene—, que salga aproximadamente 50 veces X. Las 100 tiradas son una muestra de las infinitas tiradas de la moneda, por lo que posiblemente no salga exactamente 50 veces X, podría salir 51 veces ó 52 y serían resultados esperables, debido a fluctuaciones propias del azar. Pero si de las 100 tiradas sale 80 veces X, concluiremos con pocas dudas que hay que rechazar la hipótesis nula. A la misma conclusión llegaríamos si, de 100 tiradas, solo sale 25 veces X. La pregunta que nos ayudará a responder el procedimiento de prueba de hipótesis es ¿cuántas más o menos veces que 50 debería salir X para que consideremos que tenemos “suficiente evidencia”, para creer que la moneda no está equilibrada?

La lógica de la prueba de hipótesis consiste en plantear el escenario en el que H_0 es verdadera y observar qué tan probable es lo que hallamos en la muestra en ese caso. En el primer ejemplo el planteo es ¿qué tan probable sería haber hallado *estas pruebas* (las que lo involucran) contra el acusado, si éste fuera inocente? En el segundo preguntamos ¿qué tan probable habría sido hallar *esta cantidad de veces* que salió X, si la moneda estuviera equilibrada? De manera general la pregunta es ¿qué tan probable sería *éste resultado muestral* si la hipótesis nula fuera cierta?

Si la respuesta a esas preguntas es “muy probable”, la decisión será la de no rechazar la hipótesis nula, porque los resultados muestrales hallados serían esperables (muy probables) bajo H_0 . Al contrario, si la respuesta es “muy poco probable” decidiremos rechazar H_0 , ya que se trata de un resultado poco esperable si H_0 fuera cierta.

En investigación, la prueba de hipótesis suele formularse de tal modo que rechazar H_0 implica aportar un nuevo hallazgo, por el contrario, aceptar H_0 equivale a que no hay cambios respecto de alguna situación inicial.

Algunos ejemplos de hipótesis nulas:

Esta droga no produce ningún efecto sobre la memoria.

La técnica terapéutica A es igualmente eficaz que la B.

Los métodos A y B para enseñar a leer a los niños producen iguales resultados.

La proporción de votos que obtendrá un candidato no ha variado respecto de las últimas elecciones.

Un programa de potabilización de agua no reduce la diarrea infantil.

En casi todos los casos, la expectativa del investigador está en rechazar la H_0 , porque eso significa que ha hallado algo de interés: que la droga produce efectos, que hay técnicas terapéuticas mejores que otras y por tanto recomendables, que se pueden elegir mejores métodos para enseñar a leer, que el favor del electorado hacia un político es más o menos extendido.

La hipótesis nula es una afirmación sobre un parámetro que indica ausencia de diferencia.

El sentido de esa diferencia difiere según el tipo de prueba, veremos que hay pruebas que confrontan con valores históricos o con promedios generales o bien, que realizan comparaciones entre grupos. En todos los casos la hipótesis nula afirma algo que puede expresarse como “no hay diferencia”, o “no hay cambio” o “no hay relación”.

Hasta este punto se trata de la definición original de estas pruebas, desarrolladas inicialmente por Sir Ronald Fisher (1925) a las que llamó *pruebas de significación*. La idea básica es la de comparar los datos observados con la hipótesis que se pone a prueba. Fisher las ideó como manera de medir el grado de incompatibilidad de un conjunto de datos con la hipótesis nula, evaluando la probabilidad de hallar resultados como los observados o más extremos, si la hipótesis nula fuera cierta. Si esa probabilidad es muy pequeña, puede suceder que la muestra que se seleccionó haya sido excepcional, o bien que la afirmación hipotética sea falsa. Fisher argumentó que se trataba de un método objetivo para poner a prueba teorías y que puede ser usado en diferentes campos de conocimiento.

Con posterioridad a Fisher, Neyman y Pearson (1933) introducen dos cambios importantes en el procedimiento.

El primero consiste en tratar a las pruebas no ya como métodos para validar teorías, sino como reglas de decisión, es decir, criterios que permiten decidir en las situaciones en que no se cuenta con toda la información necesaria.

El segundo cambio consiste en oponer a la hipótesis nula, otra hipótesis, llamada hipótesis alternativa, a la que se indica como H_1 , que es hacia la que se suma evidencia cuando se rechaza H_0 .

Veamos la aplicación de este modelo, que es el que usaremos a partir de ahora. La afirmación “los niños cuyos padres tienen alto nivel de educación tienen rendimiento en la escuela superior al promedio general” es una hipótesis, porque pretende tener carácter general, hace referencia a la población de niños en la escuela, los que asisten ahora y los que asistirán en el futuro; no podemos observar a la población completa, por lo tanto la hipótesis no puede probarse de manera definitiva, solo puede hacerse a partir de una muestra. Para formalizar esa hipótesis, construiremos una H_0 que niegue cualquier diferencia: “el rendimiento de niños con padres de alto nivel de educación es el mismo que el del promedio”. A esta hipótesis, opondremos otra, que afirme “los niños cuyos padres tienen alto nivel de educación tienen rendimiento superior al promedio”. A esta

última llamaremos hipótesis alternativa, H_1 . Así formalizamos el planteo del problema.

Supongamos ahora que conocemos ese rendimiento promedio, medido por el puntaje en las pruebas y que vale 60 puntos para la población completa de alumnos. De modo que podemos formular las hipótesis ahora así:

H_0 : "El rendimiento promedio de los niños con padres de alto nivel de educación es de 60 puntos"

H_1 : "El rendimiento promedio de los niños con padres de alto nivel de educación es superior a 60 puntos"

Para poner a prueba la hipótesis tomaremos una muestra de niños con padres de mucha educación y veremos si su rendimiento es superior a 60 puntos. Supongamos que en la muestra hallamos una media de 62 puntos, ¿estamos autorizados para rechazar la H_0 ? Aunque 62 es mayor que 60, una diferencia de solo 2 puntos parece demasiado pequeña y podríamos atribuirle al azar. En el razonamiento de la prueba de hipótesis nos interesa evaluar la probabilidad de ocurrencia del resultado que se observa, si la hipótesis nula fuera cierta. En este caso será: "Si los hijos de padres con alto nivel de educación tuvieran el mismo rendimiento que el promedio (H_0), una diferencia de 2 puntos en el promedio muestral es probable, es esperable, puede deberse a la variabilidad propia de los datos muestrales, en consecuencia, esa diferencia no es suficiente para rechazar la H_0 ". En otros términos "Si los hijos de padres con alto nivel de educación tuvieran un rendimiento promedio de 60 puntos, no es improbable que una muestra arroje un resultado de 62 puntos". Dicho de otro modo: el resultado muestral no se aleja tanto de lo que esperaríamos si la H_0 fuera cierta, por lo tanto, no podemos rechazarla y concluimos que los hijos de padres con mucha educación no difieren del promedio.

Un elemento de mucha importancia es recordar que la hipótesis hace referencia a la población, mientras que nuestra observación es muestral, y sabemos que los resultados muestrales difieren de los valores paramétricos porque los primeros son variables aleatorias.

¿Qué habría sucedido si hubiésemos observado que el grupo de los hijos de padres con mucha educación tiene un rendimiento promedio de 95 puntos? Este resultado se aleja mucho de 60 que es el que sostiene H_0 , es decir, si el hipotético fuera verdadero, sería muy poco probable hallar una muestra que promedie 95 puntos. En consecuencia seguramente rechazaríamos la H_0 .

Al realizar pruebas de hipótesis, en lugar de evaluar intuitivamente si un valor muestral está cerca o lejos del valor hipotético, lo que haremos será evaluar cuál sería la probabilidad de hallarlo si fuera cierta la hipótesis nula. Cuando esta probabilidad sea grande no habrá evidencia para rechazarla, cuando sea pequeña decidiremos rechazarla. ¿Cuán grande o pequeña? Es de lo que nos ocuparemos a continuación.

Para realizar una prueba de hipótesis, necesitamos calcular la probabilidad del valor observado, si H_0 fuera cierta, es decir, si el parámetro tuviera ese valor (el que señala H_0). Es una probabilidad condicional que podemos por ahora escribir así:

$$p(\text{observado} / \text{la hipótesis nula es verdadera})$$

Luego haremos más precisa esta expresión.

Comenzaremos con el ejemplo de una prueba de hipótesis sobre la media de una variable cuantitativa y luego acerca de la proporción para una categoría de una variable nominal.

Prueba sobre la media

Ejemplo (datos ficticios): para una determinada carrera universitaria, históricamente los alumnos han tardado para recibirse un promedio de 7,30 años. Decimos históricamente para indicar que son datos acumulados por largo tiempo y que provienen de los registros de la facultad de años atrás. Se ha introducido un cambio en el plan de estudios de la carrera y puede creerse que con ese cambio los alumnos tardarán un tiempo distinto en recibirse. Tenemos entonces un promedio de la población de quienes se recibieron en las anteriores condiciones (una media poblacional histórica), y queremos hacer inferencia sobre la media poblacional de los alumnos que cursan con el nuevo plan. Estos últimos no están todos accesibles, porque hay alumnos que están cursando y otros que lo harán en el futuro, por lo que de esa población solo puede conocerse a una muestra de los que ya han egresado y ver cuánto tiempo han tardado ellos en recibirse.

Expresamos las hipótesis de este modo:

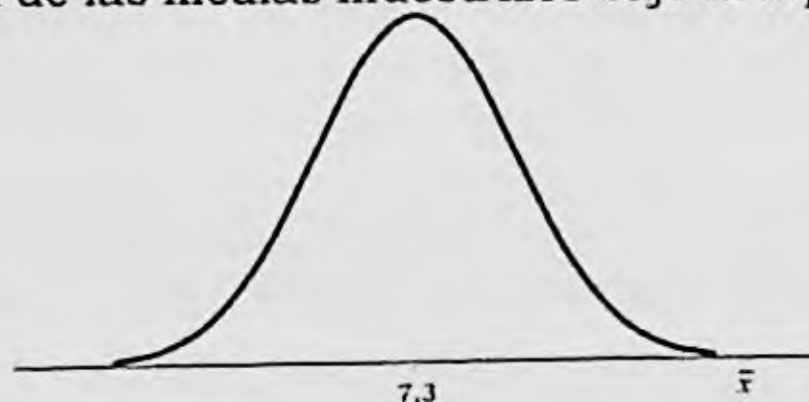
$$H_0: \mu = 7,30$$

$$H_1: \mu \neq 7,30$$

La hipótesis nula indica que la media poblacional de los alumnos que cursan con el nuevo plan es la misma que antes, que no hay diferencia, que no hay cambios. La hipótesis alternativa afirma lo contrario: que el tiempo promedio que tardan los alumnos en terminar la carrera con el nuevo plan es diferente a los 7,30 años históricos. Ambas son afirmaciones sobre la población (sobre el parámetro media poblacional), por eso son hipótesis.

Si la hipótesis nula fuera cierta, por lo que sabemos sobre las distribuciones en el muestreo, la siguiente sería la distribución de las medias muestrales:

Gráfico 1: Distribución de las medias muestrales bajo la hipótesis nula



Que quiere decir que “lo más probable” sería hallar a la media muestral alrededor de 7,30. Hay poca probabilidad de encontrar valores muy lejanos a 7,30, como lo muestran las áreas decrecientes, a medida que nos alejamos de la media hipotética. Por esta razón, para decidir si un resultado muestral se aleja mucho o

poco del valor paramétrico, deberemos determinar si es poco probable o muy probable. Será equivalente decir que un valor se aleja mucho de la media hipotética que decir que se trataría de un valor poco probable, si la media fuera la que propone la H_0 .

Afirmar que un valor muestral se aleja mucho del valor poblacional equivale a decir que sería muy poco probable si el valor poblacional fuera el hipotético

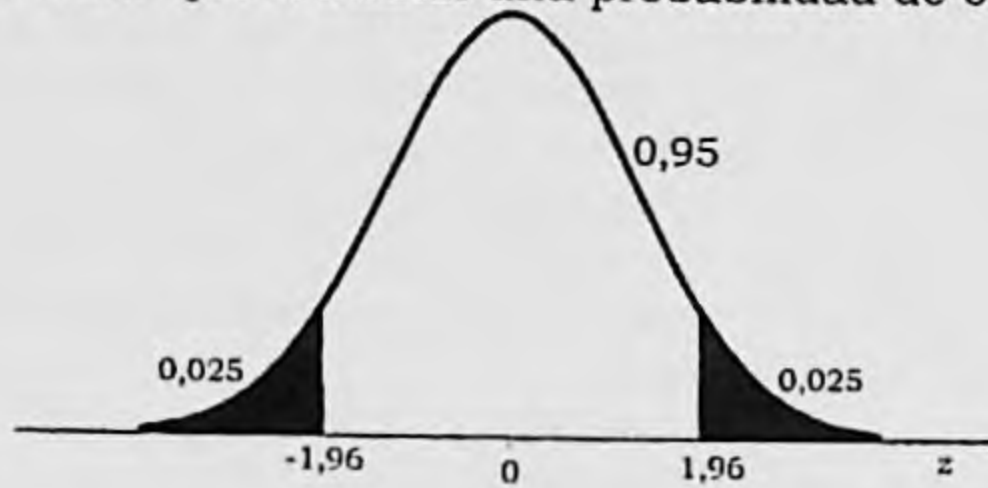
A fin de realizar la prueba de hipótesis debemos obtener una muestra. Supongamos que seleccionamos 100 egresados (usando un muestreo irrestricto aleatorio) y que encontramos un tiempo promedio para terminar la carrera de 7,50 años con una desviación estándar de 1,30 años ($\bar{x} = 7,50$ y $s = 1,30$). Debemos tener un criterio para decidir si este valor observado es compatible con la hipótesis nula ($\mu = 7,30$) o si constituye evidencia suficiente para rechazarla a favor de la hipótesis alternativa ($\mu \neq 7,30$). El criterio es el de ver cuán probable sería este valor observado si la hipótesis nula fuera cierta. En consecuencia, debemos calcular la probabilidad que tiene $\bar{x}$ de asumir el valor observado. Sin embargo, no es posible hallar probabilidades para valores únicos de una variable continua, por lo que buscaremos la probabilidad de hallar valores como el observado (7,50) *o más extremos que él*. Esto significa que nos preguntamos por la probabilidad que tiene la variable $\bar{x}$ de asumir el valor 7,50 *o uno más extremo*, es decir un valor que se aleje más de la media hipotética. Hemos dicho que “alejado” equivale a “poco probable si H_0 fuera cierta”, por lo que los valores alejados se encuentran en los extremos de la distribución de $\bar{x}$, bajo el supuesto de H_0 verdadera (es decir, centrada en la media hipotética).

Para decidir si la evidencia hallada en la muestra es suficiente para rechazar la hipótesis nula, vamos a establecer a priori un valor máximo para la probabilidad de ocurrencia del valor muestral, o lo que es lo mismo, un valor máximo para el área extrema donde consideraremos que se encuentran los valores “alejados”.

La toma de decisión

La H_0 se rechaza si hay poca probabilidad de hallar un valor como el observado o uno más extremo que él. Lo que llamamos poca probabilidad, puede establecerse a priori, por ejemplo en 0,05. Eso indica que consideraremos a los resultados con probabilidad menor a 0,05 como muy improbables de hallar si H_0 fuera cierta y nos conducirán a rechazarla. Por el contrario, si encontramos valores cuya probabilidad de ocurrencia es superior a 0,05, los trataremos como valores esperables y nos conducirán a aceptar la H_0 . Como sabemos de la distribución normal, los valores de $z = \pm 1,96$ delimitan un área central de 95%, es decir que dejan fuera un área de 5%. Los valores de z superiores a 1,96 ó inferiores a -1,96 tienen una probabilidad de ocurrencia de 0,05, repartida en las dos “colas” de la distribución normal.

Gráfico 2: Áreas extremas que totalizan una probabilidad de 0,05



Los valores de $\bar{x}$ que correspondan a puntajes z que superen a 1,96 ó sean inferiores a -1,96 serán valores con probabilidad menor a 0,05, por lo que serán considerados como poco probables y conducirán a rechazar H_0 . Por el contrario, los valores que tengan z comprendido entre -1,96 y 1,96 serán probables y nos llevarán a que aceptemos H_0 . Estos dos puntos (-1,96 y 1,96) se denominan **valores críticos** de z y se indican con un subíndice: z_c .

En nuestro ejemplo, el valor observado es $\bar{x} = 7,50$, de aquí en adelante lo llamaremos $\bar{x}_{obs}$ (el valor de la media observado en la muestra). El puntaje z equivalente a ese $\bar{x}_{obs}$ se llama z observado (z_{obs}) y vale:

$$z_{obs} = \frac{\bar{x}_{obs} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{7,50 - 7,30}{\frac{1,30}{\sqrt{100}}} = 1,54$$

Se trata de la transformación a puntaje z del valor observado de la media muestral. Se conoce con el nombre de **estadístico de prueba**.

Este puntaje no está en la zona extrema, porque no va más allá de 1,96; por el contrario, está entre -1,96 y 1,96 que pertenece a la parte de valores centrales de la distribución, los más probables. En consecuencia, la decisión es la de aceptar H_0 y concluir que el tiempo que los alumnos tardan en completar la carrera no ha cambiado respecto del valor histórico. Dicho de otra manera, el valor observado de $\bar{x}_{obs} = 7,50$ es un resultado esperable si la media poblacional fuera de 7,30.

Por la forma en que hemos razonado y tomado la decisión, se comprende que a los valores de z comprendidos entre -1,96 y 1,96 se los denomine **zona de aceptación de H_0** . El otro conjunto de valores de z , los mayores a 1,96 junto a los menores a -1,96, constituyen la **zona de rechazo de H_0** . Luego de haber considerado a 0,05 como la probabilidad a la que llamamos “pequeña”, quedaron determinados los valores de z_c que indican las zonas de aceptación y de rechazo.

La **zona de rechazo de H_0** es el conjunto de valores extremos de la distribución, donde es poco probable encontrar los valores muestrales si H_0 es verdadera.

La **zona de aceptación de H_0** es el conjunto de valores centrales de la distribución, donde es más probable encontrar los valores muestrales si H_0 es verdadera.

Luego de eso, el procedimiento que seguimos fue: calcular el puntaje z que corresponde al valor observado de $\bar{x}$, y luego ver si éste se encuentra en la zona de aceptación o de rechazo de H_0 .

La probabilidad 0,05 como valor pequeño fue una elección y podría haber sido diferente; ese número tiene una larga tradición histórica, Fisher lo usaba regularmente, aunque aclarando que no era obligatorio y que no hay nada especial para elegirlo⁸³. Se conoce como **nivel de significación** y se indica con la letra α (alfa). Es la probabilidad de hallar un valor como el observado o más extremo que él, si la hipótesis nula fuera cierta, por lo que es una probabilidad condicional que ahora escribimos como:

$$P(z < -1,96 \text{ ó } z > 1,96 / H_0 \text{ es verdadera}) = 0,05$$

De esta expresión es importante recordar que alfa mide la probabilidad de hallar a z en la región de rechazo (más allá de los puntos críticos) si H_0 es verdadera.

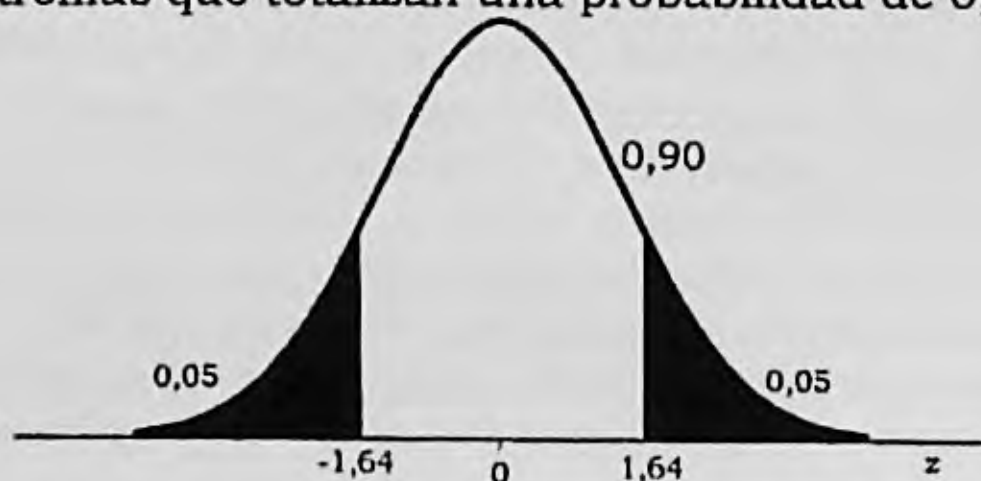
El valor que elijamos para alfa indica a qué valores vamos a considerar como poco probables: en este caso se trata de valores tan poco probables como el 5%. Puede usarse un nivel de significación diferente, por ejemplo del 10% y los valores críticos de z serán diferentes. En efecto los puntos que dejan un área extrema del 10% son $z_c = \pm 1,64$.

En ese caso escribiremos:

$$P(z < -1,64 \text{ ó } z > 1,64 / H_0 \text{ es verdadera}) = 0,10$$

Se llama **nivel de significación** a la probabilidad de hallar al valor muestral en la zona de rechazo de H_0 , si H_0 es verdadera. Se indica como α , y es elegido por el investigador

Gráfico 3: Áreas extremas que totalizan una probabilidad de 0,10



Por lo que, si el nivel de significación es 0,10 ($\alpha = 0,10$), la zona de aceptación de H_0 es el conjunto de valores z comprendidos entre -1,64 y 1,64 (centrales), mientras que la zona de rechazo de H_0 son los z menores a -1,64 y los mayores a 1,64 (los valores extremos cuya probabilidad es el área sombreada en el gráfico). El valor muestral del ejemplo ($z_{obs} = -1,54$) está también en la zona de aceptación

⁸³En 1965, en *Statistical methods and scientific inference*, Fisher señaló: "Ningún investigador tiene un nivel de significación fijo, al cual año tras año y en toda circunstancia rechaza hipótesis; más bien entrega su mente a cada caso particular a la luz de la evidencia y de sus ideas"

para este nivel, por lo que tampoco se rechaza la H_0 a un nivel de significación de 0,10.

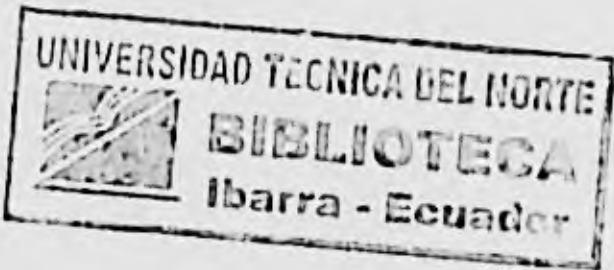
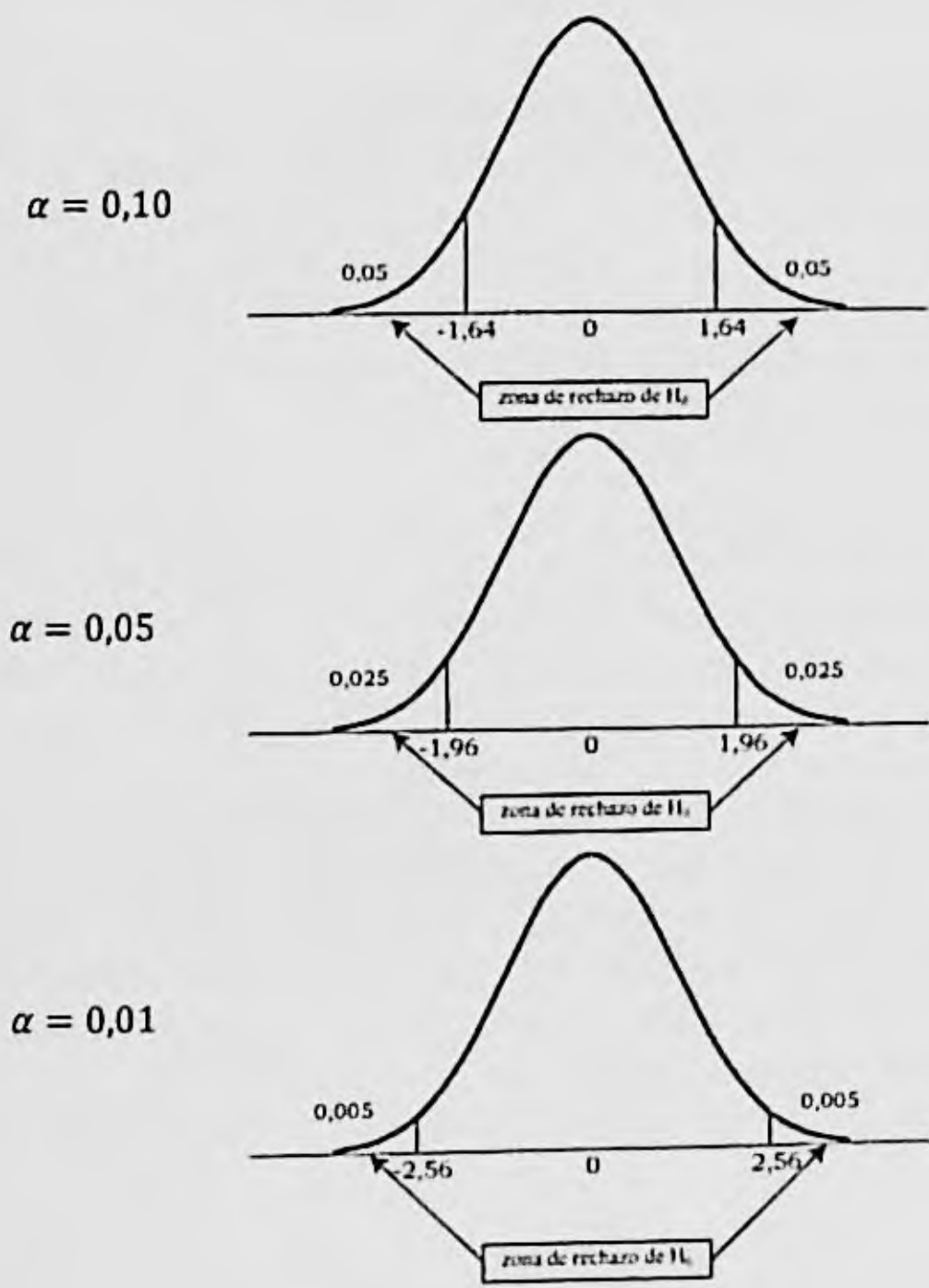
Otro nivel de significación que suele usarse es del 1%. Para él, los valores de z son $\pm 2,56$, por lo que la regla de decisión será: “si el valor de z correspondiente al valor observado de $\bar{x}$ está entre $-2,56$ y $2,56$ se debe aceptar la H_0 , si es menor a $-2,56$ o superior a $2,56$ se debe rechazar la H_0 ”.

Expresamos la probabilidad condicional como:

$$P(z < -2,56 \text{ ó } z > 2,56 / H_0 \text{ es verdadera}) = 0,01$$

Al igual que en los casos anteriores, cuando se expresan en términos de puntajes z , estos valores son fijos; no dependen de los resultados muestrales que se encuentren, constituyen una regla de decisión establecida a priori. Cuanto más pequeño se elige α , tanto más exigente es la prueba, en el sentido de que solo rechaza la hipótesis de no-diferencia si se observan valores muy alejados del hipotético.

Gráfico 4: Comparación de las zonas de aceptación y rechazo de H_0 con niveles de significación del 10, del 5 y del 1%



Ejemplo (datos ficticios): para la misma carrera universitaria del ejemplo anterior, el promedio de calificación con que terminaban los estudios los alumnos era, según registros históricos, de 6,50. Nos preguntamos si, luego del cambio en el plan de estudios, esta nota promedio ha cambiado o sigue siendo la misma. El planteo de las hipótesis será ahora:

$$H_0: \mu = 6,50$$

$$H_0: \mu \neq 6,50$$

Por la misma razón que antes, no podemos analizar a la población completa, usaremos los datos obtenidos en una muestra. En ella encontramos, por ejemplo, que el promedio de los 100 egresados es de 6,65 con desviación estándar de 0,60, es decir: $\bar{x} = 6,65$ y $s = 0,60$. A un nivel de significación del 5%, los puntos críticos vuelven a ser $z_c = \pm 1,96$. Buscamos el estadístico de prueba transformando el valor observado de $\bar{x}$ a puntaje z y encontramos:

$$z_{obs} = \frac{\bar{x}_{obs} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{6,65 - 6,50}{\frac{0,6}{\sqrt{100}}} = 2,50$$

El valor observado de $\bar{x}$ corresponde entonces a un z que supera al punto crítico (que es $z_c = 1,96$), por lo que está en la zona de rechazo de H_0 . La decisión es rechazar H_0 y concluir que el promedio de los alumnos es actualmente diferente del promedio histórico.

En los dos ejemplos vemos que la regla de decisión depende del nivel de significación. Cuando se fija en el 5% entonces se puede expresar como “si el valor de z correspondiente al valor observado de $\bar{x}$ está entre -1,96 y 1,96 se debe aceptar la H_0 , si es menor a -1,96 o superior a 1,96 se debe rechazar la H_0 ”. Cuando el nivel de significación es del 10%, diremos que “si el valor z correspondiente al valor observado de $\bar{x}$ está entre -1,64 y 1,64 se debe aceptar la H_0 , si es menor a -1,64 o superior a 1,64 se debe rechazar la H_0 ”.

Veamos más en detalle el significado de esta probabilidad que hemos fijado en 0,05 y que puede también elegirse en 0,10 ó en 0,01 y que llamamos α . Se trata de la probabilidad de hallar el valor observado en la muestra (o uno más extremo a él) si la H_0 fuera verdadera, por lo que cada vez que hallemos valores muestrales que se encuentran allí, tomaremos la decisión de rechazar H_0 . Si la hipótesis nula fuera efectivamente verdadera, la decisión sería incorrecta, pero a eso no lo sabemos, porque nunca conocemos el verdadero valor del parámetro. Aunque sí podemos afirmar que al fijar α en el 5%, ésas serán las chances de equivocarnos rechazando una hipótesis nula que era verdadera. En el segundo ejemplo, cuyo resultado fue el de rechazar H_0 , es muy importante indicar a qué nivel de significación se toma la decisión, porque ese número (5%) indica la probabilidad de haber tomado la decisión erróneamente. Mide la probabilidad de haber encontrado el promedio muestral de 6,65 por azar. Como esa probabilidad es pequeña, decidimos rechazar H_0 .

Los puntos críticos en términos del estimador

Hay una manera diferente de establecer las zonas de aceptación y rechazo, que consiste en fijar los puntos críticos en términos de $\bar{x}$, en lugar de hacerlo como puntajes z . Por lo que en lugar de determinar los dos z_c , hallaremos los dos valores críticos de $\bar{x}$, a los que llamaremos $\bar{x}_c$ ⁸⁴:

$$\bar{x}_c = \mu \pm z_c * \frac{s}{\sqrt{n}}$$

En el ejemplo sobre el tiempo que tardan los alumnos en terminar la carrera y a un nivel de significación de 5%, los valores de $\bar{x}_c$ son:

$$\bar{x}_c = \mu \pm z_c * \frac{s}{\sqrt{n}} = 7,30 \pm 1,96 * \frac{1,30}{\sqrt{100}} = 7,30 \pm 0,25$$

Al sumar obtenemos 7,55 y al restar 7,05. Estos son los puntos críticos expresados en términos de la variable original. La regla de decisión es ahora “si se encuentra un valor de $\bar{x}_{obs}$ comprendido entre 7,05 y 7,55 se debe aceptar la H_0 . Si el valor observado de $\bar{x}_{obs}$ es inferior a 7,05 ó superior a 7,55 se debe rechazar H_0 .

Para expresarlo como probabilidad condicionada:

$$P((\bar{x} < 7,05 \text{ ó } \bar{x} > 7,55) / \mu = 7,30) = 0,05$$

Que afirma que la probabilidad de hallar a $\bar{x}$ por debajo de 7,05 o por encima de 7,55 si la media de la población es 7,30, vale 0,05.

Al hacer la prueba, vemos que $\bar{x}_{obs} = 7,50$, que no va más allá de los puntos críticos, por lo que pertenece a la zona de aceptación de H_0 . Concluimos que se acepta H_0 y que los alumnos no han cambiado el tiempo que tardan en terminar la carrera. La regla de decisión es la misma que antes, solo que ahora está expresada en el lenguaje de $\bar{x}$ y no de z y la conclusión también es la misma.

Volviendo ahora sobre el caso de los promedios con que egresan los estudiantes, para hallar los valores críticos de la media muestral hacemos:

$$\bar{x}_c = \mu \pm z_c * \frac{s}{\sqrt{n}} = 6,50 \pm 1,96 * \frac{0,60}{\sqrt{100}} = 6,50 \pm 0,12$$

Y resultan: 6,38 y 6,62. El promedio observado fue de 6,65, que supera al punto crítico superior y se encuentra en la zona de rechazo. Concluimos que se rechaza la H_0 y los alumnos egresan en la actualidad, con un promedio que difiere del histórico. Nuevamente, es la misma conclusión que si se trabaja sobre z .

⁸⁴Aunque esta expresión es parecida a la de los intervalos de confianza, no se deben confundir. Aquí el centro está en el valor hipotético del parámetro, mientras que los intervalos de confianza se centran en el valor del estimador puntual.

Comparemos los dos procedimientos:

A. Usando valores críticos de z

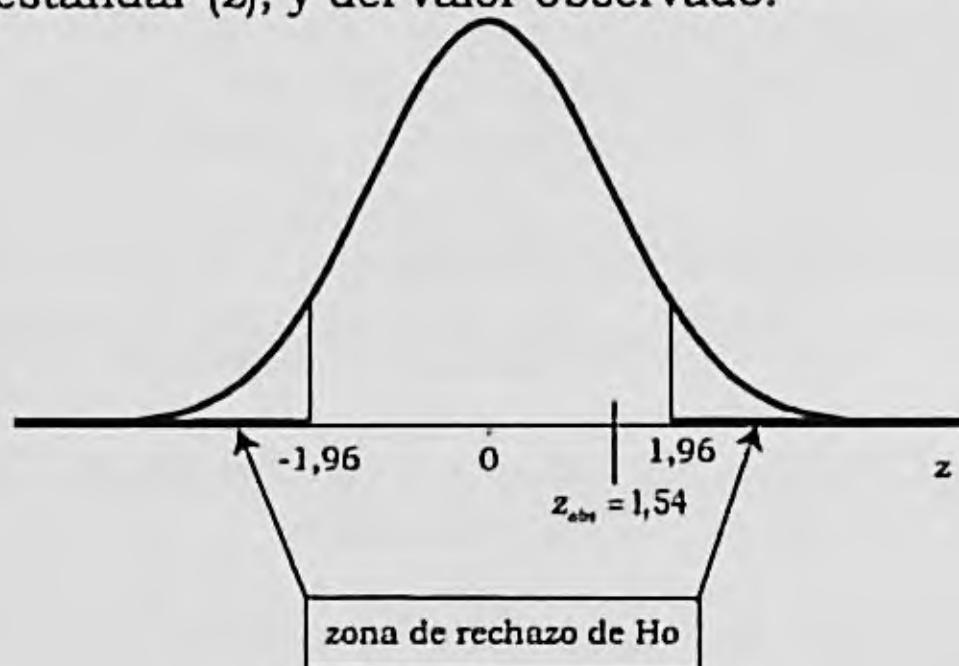
1. Habiendo establecido el nivel de significación, determinar los valores z que dejan esa probabilidad en los extremos. Éstos son los z_c .
2. Para hallar el estadístico de prueba, transformar el valor observado de $\bar{x}$ en puntaje z haciendo:

$$z_{obs} = \frac{\bar{x}_{obs} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

3. Observar la posición de este valor transformado en la distribución de probabilidades z

Por ejemplo, para un nivel de significación de 0,05 (ó 5%), en el ejemplo:

Gráfico 5: Ubicación de la zona de rechazo de H_0 a un nivel de significación de 0,05, sobre puntajes estándar (z), y del valor observado.



B. Usando los valores críticos de $\bar{x}$

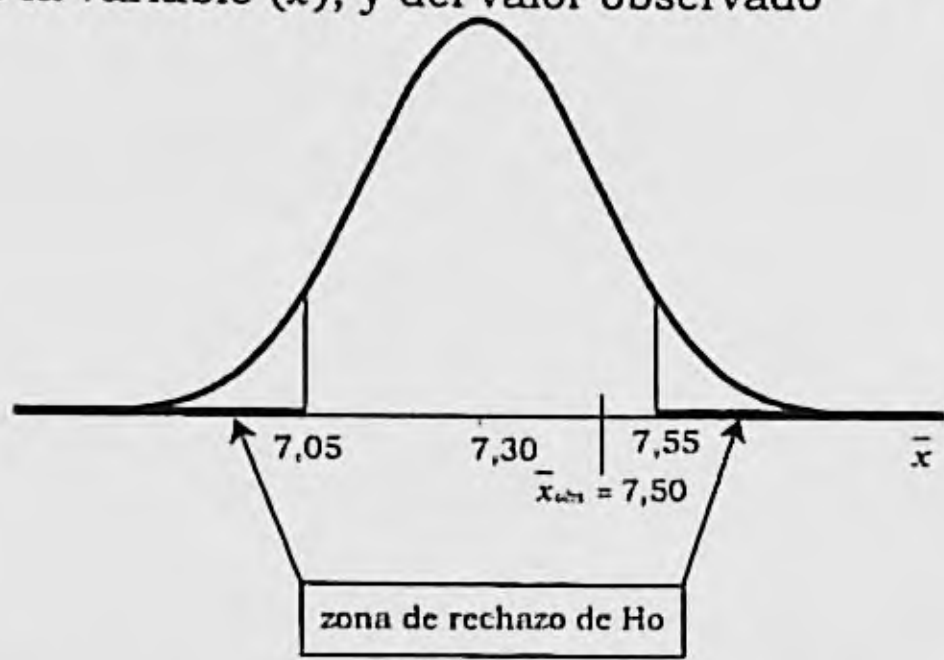
1. Habiendo establecido el nivel de significación, determinar los valores z que dejan esa probabilidad en los extremos. Éstos son los z_c .
2. Usar los z_c para determinar los correspondientes $\bar{x}_c$ haciendo:

$$\bar{x}_c = \mu \pm z_c * \frac{s}{\sqrt{n}}$$

3. Ver la posición de $\bar{x}_{obs}$ en la distribución de probabilidades de $\bar{x}$.

Por ejemplo, para el nivel de significación de 0,05 y el mismo ejemplo, resulta:

Gráfico 6: Ubicación de la zona de rechazo de H_0 a un nivel de significación de 0,05, sobre valores de la variable ($\bar{x}$), y del valor observado



La diferencia entre las dos formas de establecer los puntos críticos es que con la primera se determinan los valores de z_c a partir del nivel de significación y luego se transforma a puntaje z el valor muestral observado de $\bar{x}_{obs}$. En el segundo modo, los z_c se transforman (al revés) en puntos críticos de $\bar{x}_c$ y luego se compara el $\bar{x}_{obs}$ directamente, sin transformarlo.

Los gráficos 5 y 6 expresan lo mismo, el primero en el lenguaje estandarizado de z , el segundo en el de $\bar{x}$. Los procedimientos son equivalentes y puede vérselos aplicados de manera indiferenciada.

Pruebas unilaterales

A menudo la hipótesis alternativa no expresa solo que la media difiera del valor hipotético, sino que indica en qué *dirección* se espera que difiera. Por ejemplo, puede esperarse, en el ejemplo anterior, que los alumnos egresen con promedio superior a 6,50, con lo que ahora la H_1 dirá que $\mu > 6,50$. Se trata en este caso de una prueba unilateral y solo rechazaremos la H_0 si encontramos valores sustancialmente *mayores* que 6,50. Para el mismo nivel de significación del 5%, el valor z que nos interesa es el que delimita un área *superior* de 0,05.

Notemos la diferencia con las pruebas que tratamos antes: al nivel de 5% buscábamos dos z que dejaban en total 0,05 de área extrema (por encima y por debajo) o lo que es lo mismo, los dos z que dejan el 95% del área central. Ahora, como la prueba es unilateral y solo nos interesan valores que se excedan, solo buscamos un z , el que deja al 5% por encima. Ese valor de z es 1,64.⁸⁵

⁸⁵Este número es el mismo que usamos al nivel del 10% en pruebas bilaterales. Esto se debe a que en ese caso el 10% extremo se reparte en 5% en cada cola; ahora nos interesa una sola cola, del 5%.

Gráfico 7: Ubicación de las zonas de aceptación y rechazo de H_0 para una prueba unilateral derecha.



Por oposición a las anteriores, las pruebas unilaterales se llaman **pruebas de una cola**. Como vemos en el gráfico, el conjunto de valores z que conducen a rechazar H_0 se encuentran solo a la derecha.

Ejemplo (datos ficticios): en la situación en que nuestro interés esté en analizar si el promedio con que egresan ahora los estudiantes es *superior* al valor histórico (y no solo diferente a él), las hipótesis de la prueba se expresan:

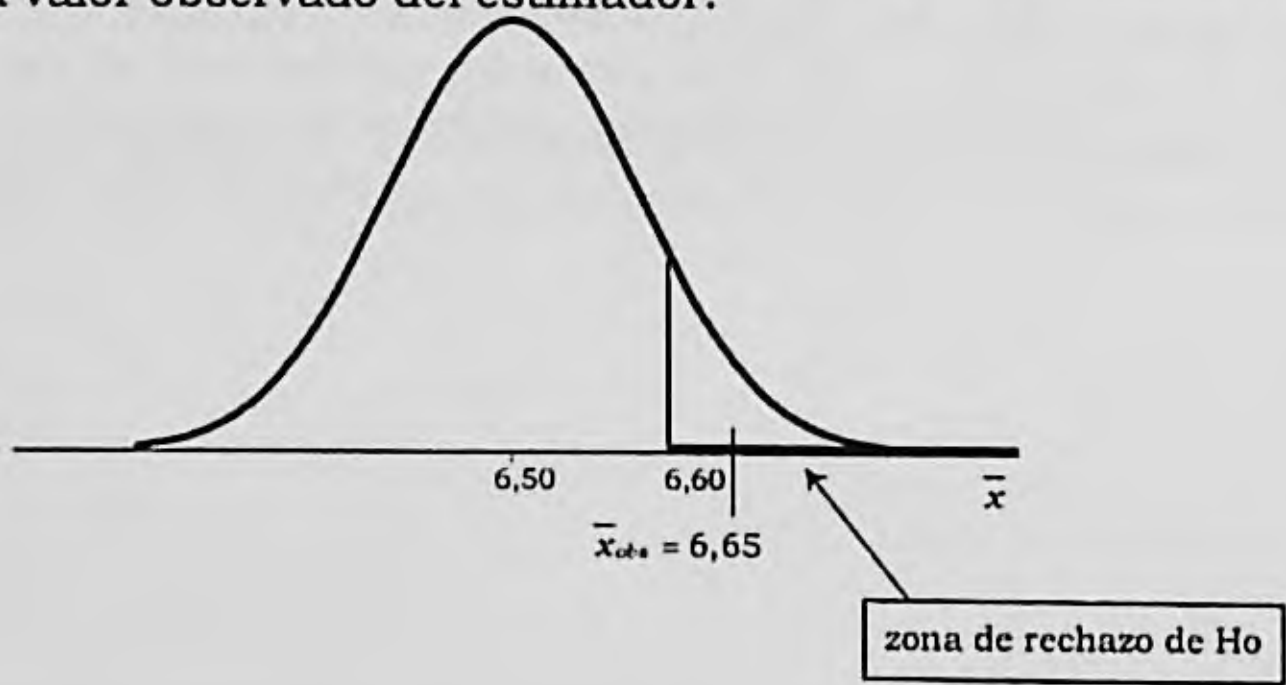
$$H_0: \mu = 6,50$$
$$H_1: \mu > 6,50$$

Haremos la prueba sobre los valores de $\bar{x}$, a un nivel de significación del 5% entonces:

$$\bar{x}_c = \mu + z_c * \frac{s}{\sqrt{n}} = 6,50 + 1,64 * \frac{0,60}{\sqrt{100}} = 6,50 + 0,10$$

Al sumar obtenemos 6,60 que es el único punto crítico que nos interesa por tratarse de una prueba unilateral y hemos sumado porque la prueba es derecha. Con lo que resulta la siguiente región de rechazo de H_0 :

Gráfico 8: Región de rechazo unilateral derecha de $H_0: \mu = 6,50$ a un nivel de significación del 5%, con una muestra de 100 casos y desviación estándar 0,60, y ubicación del valor observado del estimador.



El valor observado de $\bar{x}$ había sido 6,65 que es mayor que el punto crítico, con lo que rechazamos la H_0 y concluimos que los alumnos egresan con un promedio significativamente mayor al histórico.

Si hubiésemos planteado la regla de decisión sobre los valores de z , a un nivel de significación del 5%, corresponde observar el gráfico 7 y obtener el puntaje z correspondiente al valor observado de la media muestral:

$$z_{obs} = \frac{\bar{x}_{obs} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{6,65 - 6,50}{\frac{0,60}{\sqrt{100}}} = 2,5$$

Dado que este resultado supera al punto crítico del gráfico 7, concluimos nuevamente que los alumnos egresan con un promedio significativamente mayor al histórico.

En los párrafos anteriores hemos introducido una expresión nueva, que tiene un sentido preciso. Cuando decimos “significativamente mayor” no nos referimos al uso que suele darse en el lenguaje cotidiano, que es sinónimo de importante, de gran magnitud, grande, etc. Diremos que un valor es significativamente mayor o menor si se ha rechazado una prueba unilateral, o bien que es significativamente diferente o que la diferencia es significativa, si la H_0 que fue rechazada pertenece a una prueba bilateral. Además debe indicarse el nivel de significación de la prueba, por lo que diremos: según los datos observados y a un nivel del 5%, los alumnos egresan con un promedio significativamente superior al histórico.

Un resultado es **significativo** cuando conduce a rechazar una H_0 a un determinado nivel de significación.

Un resultado puede ser significativo a un nivel y no serlo a otro. Por ejemplo, si en una prueba bilateral y luego de transformar el valor observado a puntaje z , se obtiene $z=2,3$, este resultado conducirá a que se rechace H_0 al 5% (porque 2,3 es mayor que 1,96) pero que no se rechace al 1% (porque 2,3 no es mayor que 2,56). En ese caso diremos que se obtienen resultados significativos al 5% pero no al 1%. Luego veremos que esta clasificación puede hacerse más precisa.

Otros ejemplos de prueba de hipótesis sobre la media:

La investigación con sujetos animales en Psicología se basa en que distintas especies comparten mecanismos básicos, y los animales no humanos presentan un nivel de complejidad menor, lo que facilita la comprensión de complejos fenómenos en humanos. De hecho, los *modelos animales* han permitido avanzar en el conocimiento de mecanismos neurofisiológicos, cognitivos y comportamentales de seres humanos, siendo clave en el ámbito de la psicopatología y terapia psicológica.

En este contexto, alumnas de Psicología interesadas en la vulnerabilidad adolescente hacia el uso y abuso de drogas, recurrieron a un modelo animal para estudiar los efectos del alcohol⁸⁶. Uno de los posibles factores que determinan las primeras aproximaciones a las drogas es la búsqueda de nuevas sensaciones, que se manifiesta en niveles elevados tanto en adolescentes humanos como no humanos, particularmente en roedores. En modelos animales, una manera de

⁸⁶Dziula y Reyna (2005)

indagar el comportamiento de búsqueda de novedad es a través del uso de un objeto novedoso. Debido al escaso conocimiento sobre el comportamiento de los roedores ante tales objetos, las alumnas desarrollaron un estudio piloto. Concretamente, expusieron a 32 ratas Wistar⁸⁷ adolescentes (28 a 42 días de edad) a un objeto novedoso durante 3 minutos en distintos intervalos de tiempo. A continuación, se retoman datos parciales del estudio piloto a los fines de exponer la modalidad de trabajo cuando se realiza una prueba de hipótesis sobre un valor determinado de la media. Primero ilustramos el caso de una prueba bilateral y luego unilateral.

Ejemplo (datos modificados⁸⁸): en algunos estudios se ha observado que el tiempo que tardan los roedores (en general) en contactar un objeto novedoso (llamado tiempo de latencia, o simplemente latencia) es de 150 seg. En función de ello, se indaga si la latencia de contacto con el objeto en ratas Wistar adolescentes es la misma o no en relación a la reportada previamente en otros trabajos con roedores. Las hipótesis formuladas son:

$$H_0: \mu = 150$$

$$H_1: \mu \neq 150$$

En la muestra utilizada, la latencia media de contacto con el objeto es de 138,42 seg. y la desviación estándar 42,98. Se establece un nivel de significación del 5%, por lo que los puntos críticos en puntajes z son $z_c = \pm 1,96$.

Luego, se transforma el valor de $\bar{x}$ observado en puntaje z a través de la siguiente fórmula:

$$z_{obs} = \frac{\bar{x}_{obs} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{138,42 - 150}{\frac{42,98}{\sqrt{32}}} = \frac{-11,58}{7,59} = -1,52$$

Vemos que al valor de $\bar{x}_{obs}$ le corresponde un valor z_{obs} que se encuentra entre los puntos críticos $z \pm 1,96$, es decir que se halla en la zona de no rechazo de la H_0 , por lo que concluimos que no hay evidencia que indique que la latencia media de contacto con un objeto novedoso en ratas Wistar es distinta a la latencia que manifiestan los roedores en general.

Se obtiene la misma conclusión si se utilizan los valores críticos de $\bar{x}$. Revisemos el procedimiento: luego de haber establecido el nivel de significación al 5%, se obtienen los puntos críticos en puntajes originales ($\bar{x}_c$) a partir de los puntos críticos en puntajes z (z_c), a través de la siguiente fórmula⁸⁹:

$$\bar{x}_c = \mu \pm z_c * \frac{s}{\sqrt{n}} = 150 \pm 1,96 * \frac{42,98}{\sqrt{32}} = 150 \pm 14,89$$

⁸⁷Se trata de una línea albina de la rata parda. Fue desarrollada en el Wistar Institute en 1906 para fines de investigación biomédica, se trata de la primera rata empleada como organismo modelo (anteriormente se trabajaba con el ratón).

⁸⁸Algunos de los datos son ficticios debido a la falta de disponibilidad y a la necesidad de adaptar el ejemplo a nuestros fines. Se mantiene la temática del estudio de referencia, aunque los resultados mostrados no corresponden exactamente a él.

⁸⁹Sumamos y restamos para obtener dos puntos críticos, porque se trata de una prueba bilateral.

Entonces, los $\bar{x}_c$ que delimitan las zonas de rechazo y no rechazo son 135,02 y 164,89, y el valor observado de $\bar{x} = 138,42$ se encuentra comprendido entre ellos, por lo que no se rechaza la H_0 .

Ejemplo (datos reales⁹⁰): la literatura sobre comportamiento exploratorio en roedores (en general) indica que cuando los organismos son expuestos durante 180 seg a un objeto novedoso permanecen en contacto con el mismo (duración) 14 seg en promedio. Debido a las características del periodo adolescente, en este trabajo se formula una hipótesis que indica que las ratas adolescentes estarán más tiempo en contacto con el objeto. Las hipótesis formuladas son:

$$H_0: \mu = 14$$

$$H_1: \mu > 14$$

En los animales que comprenden la muestra bajo análisis, se observa que la duración de contacto con el objeto es de 17,43 seg y la desviación estándar 4,25. El nivel de significación se establece en el 5% y, dado que la prueba es unilateral derecha, el punto crítico en puntaje z es 1,64.

Luego, transformamos el valor de $\bar{x}$ observado en puntaje z :

$$z_{obs} = \frac{\bar{x}_{obs} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{17,43 - 14}{\frac{4,25}{\sqrt{32}}} = \frac{3,43}{0,75} = 4,57$$

Al valor de $\bar{x}$ observado le corresponde un valor $z = 4,57$, que resulta superior al $z_c = 1,64$, por lo que se rechaza la H_0 , es decir que las ratas adolescentes muestran una duración mayor de contacto con un objeto novedoso que lo señalado por la literatura para roedores en general.

Obtenemos la misma conclusión si usamos los valores críticos de $\bar{x}$. Una vez establecido el nivel de significación al 5%, se obtienen los puntos críticos en puntajes originales ($\bar{x}_c$) a partir de los puntos críticos en puntajes z (z_c)⁹¹:

$$\bar{x}_c = \mu + z_c * \frac{s}{\sqrt{n}} = 14 + 1,64 * \frac{4,25}{\sqrt{32}} = 14 + 1,23 = 15,23$$

El valor observado de $\bar{x} = 17,43$ resulta mayor a $\bar{x}_c = 15,23$, por lo que se rechaza la H_0 , y concluimos que la duración promedio de contacto con un objeto novedoso en ratas adolescentes es significativamente mayor a 14.

Ejemplo (datos reales): luego de haber evaluado la latencia de contacto con un objeto novedoso de los animales en repetidas ocasiones, los investigadores observan un valor promedio de 112,48 seg. Ahora, están interesados en indagar cuál será la latencia de contacto si las ratas son nuevamente expuestas al objeto novedoso, suponiendo que será menor debido a la disminución del carácter novedoso que hacía que los animales tardaran en contactar el objeto en las exposiciones iniciales. Las hipótesis formuladas son:

⁹⁰ Ver nota anterior

⁹¹ Solo se suma para obtener el punto crítico de la derecha, porque se trata de una prueba unilateral derecha.

$$H_0: \mu = 112,48$$

$$H_1: \mu < 112,48$$

En la nueva exposición, la latencia promedio de contacto con el objeto es de 71,36 y la desviación estándar es de 45,77. El nivel de significación se establece en el 5% y, dado que la prueba es unilateral izquierda, el punto crítico en puntaje z es -1,64.

Luego, transformamos el valor de $\bar{x}_c$ observado en puntaje z con el estadístico de prueba:

$$z_{obs} = \frac{\bar{x}_{obs} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{71,36 - 112,48}{\frac{45,77}{\sqrt{32}}} = \frac{-41,12}{8,09} = -5,08$$

Vemos entonces que al valor de $\bar{x}_c$ observado le corresponde un valor $z = -5,08$, que resulta inferior al $z_c = -1,64$, por lo que se rechaza la H_0 , es decir que la latencia de contacto con el objeto novedoso en una nueva exposición es significativamente menor a 112,48 seg.

A la misma conclusión se arriba si se realizan los cálculos con los valores críticos de $\bar{x}_c$, que se obtienen a partir de los puntos críticos en puntajes z (z_c), a través de la siguiente fórmula⁹²:

$$\bar{x}_c = \mu - z_c * \frac{s}{\sqrt{n}} = 112,48 - 1,64 * \frac{45,77}{\sqrt{32}} = 112,48 - 13,27 = 99,21$$

El valor observado de $\bar{x} = 71,36$ resulta menor a $\bar{x}_c = 99,21$, por lo que se rechaza la H_0 , la latencia promedio de contacto con el objeto novedoso en la nueva exposición es significativamente menor a 112,48 seg.

El video *prueba t una muestra* ilustra los comandos para pedir esta prueba a Infostat®, cuya salida es:

Prueba t para una media

Valor de la media bajo la hipótesis nula: 112,48

Variable	n	Media	DE	T	p(Unilateral I)
latencia2	32	71,36	45,77	-5,08	<0,0001

Más adelante se verá el significado del último valor que muestra la tabla.

Debemos recordar que el carácter unilateral o bilateral de la prueba no depende de la H_0 sino de la H_1 . En efecto, la H_0 siempre indica un valor determinado para el parámetro (hasta aquí la media), mientras que la H_1 puede indicar un valor diferente si la prueba es bilateral, o bien señalar la dirección de la diferencia hacia los mayores o menores y en esos casos, la prueba es unilateral. La decisión de hacer una prueba unilateral o bilateral depende de cada investigación concreta, de la pregunta que el investigador formula.

⁹²Solo se resta para obtener el punto crítico izquierdo, porque es una prueba unilateral izquierda.

Cuadro 1: Valores criticos usuales de la distribución normal

Significación	Puntaje z para prueba:		
	Bilateral	Unilateral derecha	Unilateral izquierda
0,10	±1,64	+1,28	-1,28
0,05	±1,96	+1,64	-1,64
0,01	±2,57	+2,33	-2,33

Prueba sobre la proporción

De modo equivalente a los intervalos de confianza, comenzaremos con la prueba de hipótesis sobre una proporción usando la distribución binomial, para luego usar la aproximación normal, si los supuestos se cumplen. El procedimiento conlleva los mismos pasos que cuando se trata de la media: se plantean, en primer lugar, las hipótesis nula y alternativa. La hipótesis nula afirma un valor para la proporción poblacional, mientras que la hipótesis alternativa puede, o bien solo indicar que el valor es diferente (prueba bilateral), o bien precisar si la diferencia se espera hacia valores mayores o menores que los indicados por la hipótesis nula (prueba unilateral). Una vez fijado el nivel de significación (α) y la lateralidad de la prueba, deben determinarse los valores de $\hat{p}$ que dejan esa probabilidad por encima (en el caso de una prueba unilateral derecha), por debajo (unilateral izquierda), o bien repartida en ambas colas (si es una prueba bilateral). La determinación de esos puntos se realiza con la distribución binomial, por lo que es necesario transformar la variable *proporción de éxitos* (p) al *número de éxitos* (x). Esta transformación vale para la proporción hipotética (P) y para la observada ($\hat{p}$):

$$P = \frac{x}{n} \text{ es decir } X = P * n$$
$$\hat{p} = \frac{\hat{x}}{n} \text{ es decir } \hat{x} = \hat{p} * n$$

Ejemplo (datos ficticios): un político tenía, hace tres meses una intención de voto equivalente al 30% del padrón. De acuerdo con algunas acciones de campaña, se cree que esta proporción pudo haber aumentado, por lo que el planteo de las hipótesis es:

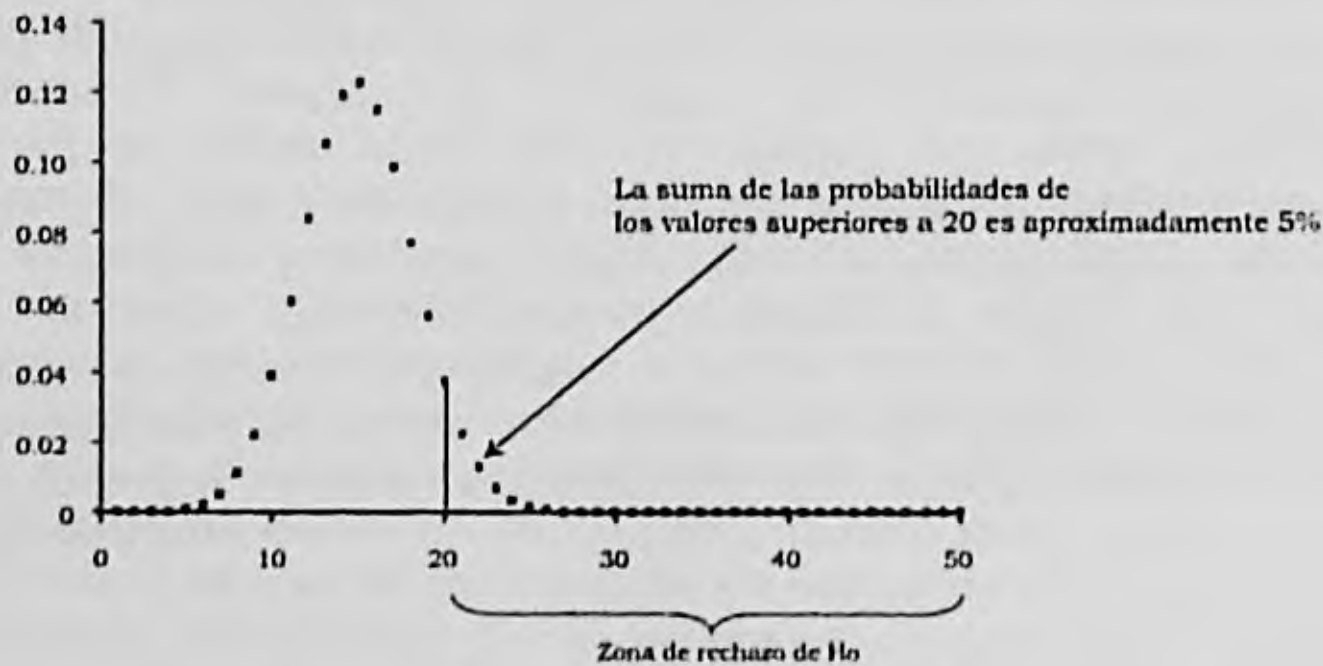
$$H_0: P = 0,30$$
$$H_1: P > 0,30$$

Hipótesis que se pondrá a prueba sobre una muestra de 50 casos. Al igual que sucedió con la media, estos son valores que planteamos de manera hipotética acerca del parámetro, en este caso la proporción poblacional (P). La H_0 indica que la proporción de votos sigue siendo la misma. Se trata de una prueba unilateral derecha, porque estamos interesados en encontrar un eventual aumento en la proporción de votantes que tiene el candidato, por eso la H_1 indica una proporción mayor.

Se fija un nivel de significación de 5% y, para determinar los puntos críticos bajo un modelo binomial, se transforma el valor hipotético de P al correspondiente a X en la muestra dada:

$$X = P * n = 0,30 * 50 = 15$$

Con lo que el punto crítico es el valor de $\hat{x}$ que deja por encima (porque es una prueba unilateral derecha) al 5% de los valores posibles. En InfoStat® se ingresan como datos los valores de $n = 50, P = 0,30$ y $Prob.(X > x) = 0,05$, para obtener, que el número de éxitos es 20. Por lo que el valor de $\hat{x}$ que es superado por el 5% de los valores muestrales posibles es 20. La representación gráfica es la siguiente:



Repasemos la interpretación de estas operaciones: si la proporción de votos que el candidato tiene en la población total fuera del 30% (esa es la hipótesis nula), entonces se esperaría que en una muestra de 50 casos, haya 15 que lo voten (15 es el 30% de 50). Como la muestra es aleatoria, la cantidad de votos que se obtienen en la muestra es aleatoria, puede ir desde cero hasta cincuenta, con diferentes probabilidades, que muestra el gráfico anterior. El criterio del 5%, establece al valor 20 votos como punto crítico. Eso quiere decir que, si la proporción de votos que el candidato tiene en toda la población fuera del 30%, la probabilidad de encontrar más de 20 votos en una muestra de 50 es menor al 5%. La regla de decisión será entonces: rechazar la hipótesis nula si en la muestra se encuentran más de 20 votos.

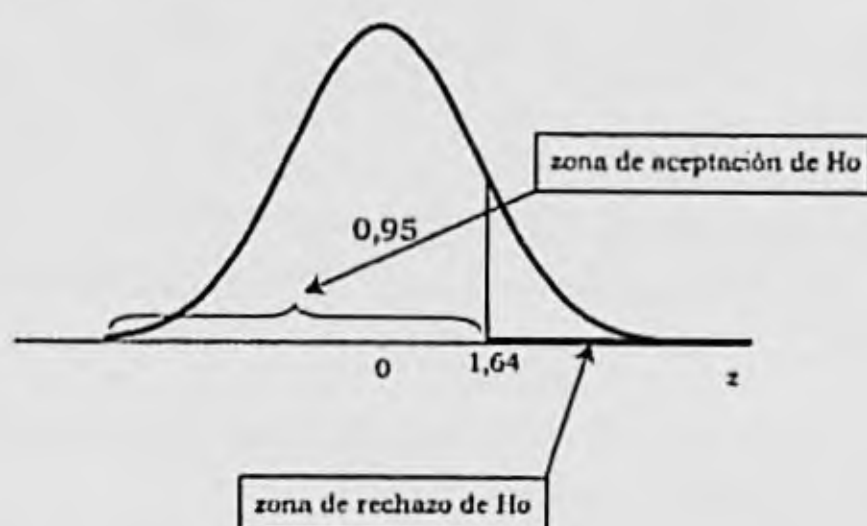
Si en la encuesta realizada sobre la muestra de 50 casos se encuentran 16 personas que dicen que lo votarán (con lo que⁹³ $\hat{p} = 32\%$), la decisión será la de no rechazar H_0 y considerar que no hay evidencia para creer que la proporción de votos que el candidato tiene, haya aumentado de su 30% anterior.

El punto crítico situado en 20 éxitos equivale a $\hat{p}_c = 0,40$ ⁹⁴. La comparación de los 16 éxitos muestrales con los 20 del punto crítico es la misma que la del 32% muestral frente al 40% crítico.

⁹³ $\hat{p} = \frac{16}{50} = 0,32$

⁹⁴ Que proviene de $\frac{20}{50}$

Si se tratara de una muestra de mayor tamaño y tanto $n * P$ como $n * (1 - P)$ fueran mayores a 5, podríamos usar la aproximación normal de la distribución binomial. Para ello, establecemos un nivel de significación de 5%, y el valor crítico de z (en prueba unilateral) es 1,64. Ahora en términos de z , las zonas de aceptación y rechazo quedan así:



Una vez fijado el nivel de significación (α) y la lateralidad de la prueba, quedan determinados los puntos críticos en términos de z , según el cuadro 1.

La principal diferencia a tener en cuenta para la transformación a puntaje z de la proporción es el cálculo de su error estándar que, en la aproximación normal de la distribución en el muestreo de las $\hat{p}$ es:

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{P * (1 - P)}{n}}$$

En la construcción de intervalos de confianza es necesario aproximar $P * (1 - P)$ a través de $\hat{p} * (1 - \hat{p})$, porque se ignora el valor de la proporción poblacional. En la prueba de hipótesis, la situación es diferente, porque se cuenta con una P (poblacional) hipotética, y es esa la que se utiliza para el cálculo de $\sigma_{\hat{p}}$. Por lo tanto, la transformación del valor observado en la muestra a puntajes z se hará según:

$$z_{obs} = \frac{\hat{p}_{obs} - P}{\sqrt{\frac{P * (1 - P)}{n}}}$$

Que es el estadístico de prueba para la prueba de proporciones que debe usarse cuando sea válida la aproximación normal para la distribución binomial. De acuerdo a que la posición de este z_{obs} , sea en la zona de aceptación o de rechazo de H_0 , se toma la decisión.

Nuevamente sobre el ejemplo con las mismas hipótesis, nula y alternativa

$$H_0: P = 0,30$$

$$H_1: P > 0,30$$

Sea ahora que se trató de una muestra de 200 ciudadanos, en la que se halla que 64 dicen que van a votar a ese candidato (de este modo la proporción muestral sigue siendo de 32%). En la muestra entonces:

$$\hat{p} = \frac{64}{200} = 0,32$$

Nos preguntamos si este valor puede considerarse como un verdadero aumento respecto del 30% anterior o si solo se explica por razones de azar. Repitiendo la operación que realizamos para la media, transformamos este valor observado de la proporción muestral a puntaje z y hallamos el estadístico de prueba:

$$z_{obs} = \frac{\hat{p}_{obs} - P}{\sqrt{\frac{P \cdot (1-P)}{n}}} = \frac{0,32 - 0,30}{\sqrt{\frac{0,30 \cdot (1-0,30)}{200}}} = 0,617$$

Este puntaje de z_{obs} no supera al punto crítico ($z=1,64$) por lo que se sitúa en la zona de aceptación de H_0 . Concluimos que la proporción no ha aumentado respecto del valor anterior.

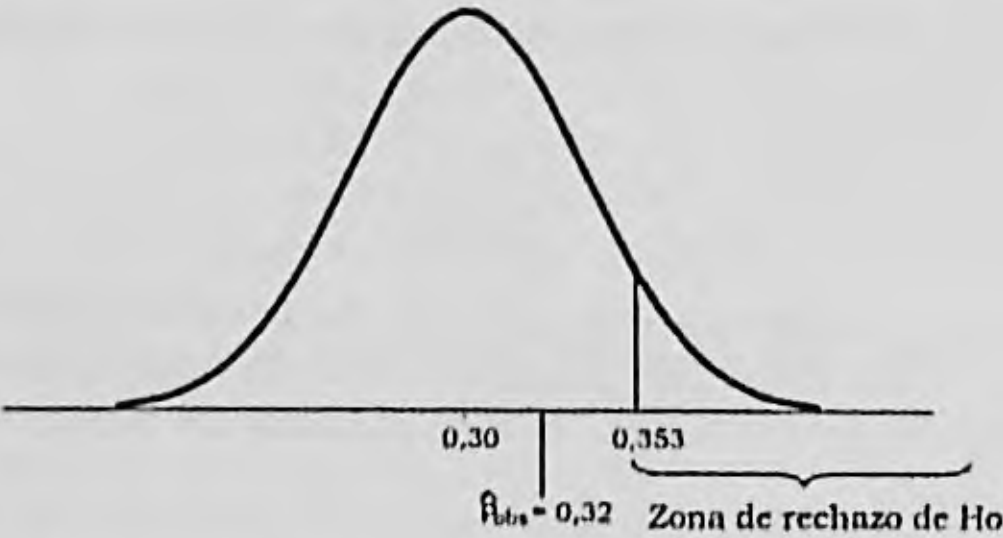
Para repetir la prueba sobre valores del estimador $\hat{p}$, vamos a transformar el punto crítico de acuerdo a la expresión general:

$$\hat{p} = P \pm z_c * \sqrt{\frac{P * (1 - P)}{n}}$$

de la que usaremos ambos signos cuando se trate de una prueba bilateral o solo la suma si es unilateral derecha o solo la resta si es unilateral izquierda. Para nuestro problema, corresponde sumar, por lo que resulta:

$$\hat{p} = P + z_c * \sqrt{\frac{P * (1 - P)}{n}} = 0,30 + 1,64 * \sqrt{\frac{0,03 * (1 - 0,30)}{200}} = 0,353$$

Representamos gráficamente la zona de rechazo como la cola derecha de la distribución de las $\hat{p}$:



El valor hallado en la muestra ($\hat{p}_{obs} = 0,32$) es menor que el punto crítico, por lo que no está en la zona de rechazo, no rechazamos la H_0 y concluimos que no hay evidencia para creer que el candidato haya aumentado su proporción de votos. Como había sucedido antes, la conclusión es la misma si trabajamos sobre los puntajes estandarizados o sobre valores del estimador. Sin embargo, el punto crítico expresado en términos de $\hat{p}$ es diferente, cuando se usó la distribución binomial su valor fue 40% y ahora es 35%.

En los ejemplos siguientes trabajaremos con muestras grandes por lo que las pruebas se realizan usando la aproximación normal.

Ejemplo (datos reales): en el estudio Latinobarómetro⁹⁵ se menciona la importancia de comprender la percepción de la gente sobre el cambio generacional, cómo vivían los padres en relación a ellos y cómo vivirán los hijos con respecto a ellos (expectativa futura). En el año 2004, el 58,2% de los argentinos encuestados consideraba que los hijos vivirían mejor que ellos. En el año 2005, los investigadores indagan nuevamente la expectativa futura. Dado que habían observado fluctuaciones en años previos se preguntan si esa expectativa positiva habrá cambiado o no respecto del año anterior. Las hipótesis que se formulan son:

$$H_0: P = 0,582$$

$$H_1: P \neq 0,582$$

En el estudio del año 2005, observaron que 676 participantes de los 1200 que componían la muestra consideraban que sus hijos vivirían mejor que ellos, siendo la proporción en la muestra:

$$\hat{p} = \frac{676}{1200} = 0,563$$

El nivel de significación se establece al 5%, por lo que los puntos críticos en puntajes z son $z_c = \pm 1,96$ (prueba bilateral).

Para responder a la hipótesis planteada, se transforma el valor de proporción observado a puntaje z haciendo:

$$z_{obs} = \frac{\hat{p}_{obs} - P}{\sqrt{\frac{P \cdot (1-P)}{n}}} = \frac{0,563 - 0,582}{\sqrt{\frac{0,582 \cdot (1-0,582)}{1200}}} = -1,36$$

El valor $z_{obs} = -1,36$ se encuentra entre los puntos críticos $\pm 1,96$, es decir que se halla en la zona de no rechazo de la H_0 , por lo cual se concluye que no hay evidencia que indique que la proporción de expectativas positivas haya cambiado, la proporción no es significativamente distinta de 0,582.

Se alcanza la misma conclusión si se realizan los cálculos en función de los valores del estimador. Establecido el nivel de significación al 5%, se obtienen los puntos críticos en puntajes originales ($\hat{p}$) a partir de los puntos críticos en puntajes z (z_c):

$$\hat{p} = P \pm z_c \cdot \sqrt{\frac{P \cdot (1-P)}{n}} = 0,582 \pm 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,582 \cdot (1-0,582)}{1200}} = 0,582 \pm 0,027$$

De esta manera se obtienen los $\hat{p}_c$ que delimitan las zonas de rechazo y no rechazo: 0,55 y 0,61. El valor $\hat{p}_{obs} = 0,563$ se encuentra comprendido entre ellos, por lo que no se rechaza la H_0 .

⁹⁵Latinobarómetro es un estudio de opinión pública que aplica anualmente alrededor de 19,000 entrevistas en 18 países de América Latina representando a más de 400 millones de habitantes. Corporación Latinobarómetro es una ONG sin fines de lucro con sede en Santiago de Chile, única responsable de la producción y publicación de los datos. <http://www.latinobarometro.org/>

Ejemplo (datos reales): otro de los aspectos indagados en el estudio Latinobarómetro se refiere al progreso en la reducción de la corrupción en las instituciones del Estado. En el año 2004, el 3,33% de los encuestados argentinos consideraba que se había progresado mucho en ese aspecto. En el estudio del 2005, se espera que los resultados sean más favorables debido a la aplicación de una serie de medidas tendientes a controlar la corrupción institucional. Así, las hipótesis que se formulan son:

$$H_0: P = 0,033$$

$$H_1: P > 0,033$$

De los 1200 argentinos encuestados en el año 2005, 51 señalan que se ha progresado mucho en reducir la corrupción institucional, es decir que la proporción en la muestra es

$$\hat{p} = \frac{51}{1200} = 0,043$$

El nivel de significación se establece en el 5%, dado que la prueba es unilateral derecha el único punto crítico en puntaje z es 1,64.

Luego, se transforma el valor de proporción observado en puntaje z , usando el estadístico de prueba:

$$z_{obs} = \frac{\hat{p}_{obs} - P}{\sqrt{\frac{P \cdot (1-P)}{n}}} = \frac{0,043 - 0,033}{\sqrt{\frac{0,033 \cdot (1-0,033)}{1200}}} = 1,94$$

El valor $z_{obs} = 1,94$ resulta superior al $z_c = 1,64$, por lo que se rechaza la H_0 . Por eso concluimos que la proporción de personas que declaran que se ha progresado en la reducción de la corrupción institucional se incrementó de manera significativa.

Se obtiene la misma conclusión a partir de los valores del estimador. Establecido el nivel de significación al 5%, se obtiene el punto crítico en puntaje original ($\hat{p}_c$) a partir del punto crítico en puntajes z (z_c):

$$\hat{p} = P + z_c * \sqrt{\frac{P \cdot (1 - P)}{n}} = 0,033 + 1,64 * \sqrt{\frac{0,033 \cdot (1 - 0,033)}{1200}} = 0,033 + 0,008 = 0,041$$

El valor observado de $\hat{p}_{obs} = 0,043$ resulta mayor a $\hat{p}_c = 0,041$, por lo que se rechaza la H_0 , y se concluye que la proporción de quienes creen que se ha progresado en la reducción de la corrupción institucional se ha incrementado de manera significativa.

Ejemplo (datos reales): otro tema que aborda Latinobarómetro es el interés por la política. En el estudio del año 2004, el 11% de los encuestados argentinos manifestó estar muy interesado en la política. Si bien no ha habido notables cambios en la última década con respecto al interés de los ciudadanos en la política, una serie de indicadores llevaron a los investigadores a considerar que el interés en esta cuestión podría haber disminuido. Las hipótesis planteadas son:

$$H_0: P = 0,11$$

$$H_1: P < 0,11$$

De la muestra de 1200 argentinos encuestados en el año 2005, 111 manifiestan un elevado interés en la política, la proporción en la muestra es:

$$\hat{p} = \frac{111}{1200} = 0,093$$

El nivel de significación se establece en el 5%, dado que la prueba es unilateral izquierda el punto crítico en puntaje z es $-1,64$. Con el estadístico de prueba se transforma el valor de proporción observado en puntaje z :

$$z_{obs} = \frac{\hat{p}_{obs} - P}{\sqrt{\frac{P \cdot (1-P)}{n}}} = \frac{0,093 - 0,11}{\sqrt{\frac{0,11 \cdot (1-0,11)}{1200}}} = -1,88$$

El valor $z_{obs} = -1,88$ resulta inferior al $z_c = -1,64$, por lo que se rechaza la H_0 . Concluimos que la proporción de personas que manifiestan elevado interés en la política ha disminuido de manera significativa.

Como antes, puede alcanzarse la misma conclusión realizando los cálculos con el valor crítico del estimador:

$$\hat{p}_c = P - z_c \cdot \sqrt{\frac{P \cdot (1-P)}{n}} = 0,11 - 1,64 \cdot \sqrt{\frac{0,11 \cdot (1-0,11)}{1200}} = 0,11 - 0,015 = 0,095$$

El valor observado de $\hat{p}_{obs} = 0,093$ resulta menor a $\hat{p}_c = 0,095$, por lo que se rechaza la H_0 . Se concluye entonces que la proporción de ciudadanos argentinos con alto interés en la política en el año 2005 es significativamente menor a 0,11.

Tipos de error en las pruebas de hipótesis

Dado que la decisión de aceptar o rechazar la H_0 se toma de manera probabilística, siempre existe la posibilidad de tomar una decisión incorrecta. Esto sucede porque las muestras son tomadas al azar y puede suceder que la que usamos para tomar la decisión sea una muestra extrema. Aunque es un resultado poco probable, no es imposible.

Como hemos visto, el nivel de significación mide la probabilidad de hallar un determinado resultado muestral si la H_0 fuera cierta, es una probabilidad pequeña, que habitualmente fijamos en 0,05 ó 0,01. Si la H_0 es cierta y la muestra sobre la que basamos la decisión es extrema, es decir, tiene un valor ubicado en alguna de las colas de la distribución, la decisión será la de rechazar H_0 y esa decisión será errónea. La decisión de rechazar puede deberse o bien a que H_0 sea efectivamente falsa, o bien a que H_0 sea verdadera y se haya obtenido una de esas muestras muy poco probables. Por esta razón el nivel de significación mide la probabilidad de errar en la decisión de esta manera: rechazando una H_0 que es verdadera. Al igual que en los intervalos de confianza, éste no es un error de cálculo ni una equivocación, sino una imprecisión inherente a todos los procesos de estimación. Éste error se conoce como **Error de Tipo I (ETI)**.

El **Error de Tipo I** es tomar una decisión errónea que consiste en rechazar la H_0 cuando esta es verdadera. Su probabilidad está fijada de antemano y es α , el nivel de significación de la prueba.

En consecuencia, establecer α es afirmar que se está dispuesto a correr ese riesgo de cometer el ETI. En un experimento que consiste en decidir si una droga produce efectos sobre una determinada patología, la H_0 dirá que no hay efecto, por lo que cometer el ETI será creer que hay efecto (rechazar H_0) cuando en realidad no lo haya (H_0 verdadera). Como no sabemos si H_0 es verdadera o falsa, cada vez que rechazamos H_0 debemos recordar que hay una probabilidad α de haber tomado una decisión incorrecta. Esta incertidumbre está siempre presente en evaluación psicológica y educativa y, en general en la toma de decisión en contextos de incertidumbre.

Ejemplo ilustrativo: las preguntas de un examen oral son una muestra de lo que el alumno sabe, si se usa un bolillero, la elección del tema que toca es aleatoria. Supongamos que un alumno ha estudiado muy poco, pero la unidad que le toca desarrollar es alguna de las (muy pocas) que sabe. En ese caso responderá correctamente y la decisión del docente será darle por aprobado el examen. Si supiéramos que el alumno ignora todos los demás temas de la materia, la decisión correcta sería que no apruebe. La formalización de este problema podría ser la siguiente: la hipótesis nula es la conservadora, esto es, que el alumno no sabe; será necesario sumar evidencia para que se tome la decisión de rechazar esa hipótesis y dar el examen por aprobado. La muestra de información que tiene el docente a su disposición (las bolillas que salieron por azar) es correctamente desarrollada por el alumno, lo que conduce a la decisión de rechazar la H_0 y dar el examen por aprobado. Para quien tiene toda la información (que el alumno solo sabe esas unidades del programa), se ha cometido un Error de Tipo I, pero el docente nunca lo sabrá. En investigación nunca tenemos “toda la información”, trabajamos con muestras, por lo que nunca sabemos si, cuando rechazamos H_0 , estamos cometiendo este error o no.

Esta es la razón por la que α se elige con valores pequeños, pero no se puede reducir indefinidamente el valor de α , porque también existe el riesgo de aceptar H_0 siendo falsa.

Este es otro tipo de error, que se llama **Error de Tipo II** (ETII) que sucede cuando se acepta H_0 , siendo ésta falsa. En el experimento anterior, cometer este error consiste en creer que la droga no es efectiva (aceptar H_0) cuando en realidad sí tiene efectos (H_0 es falsa). En el ejemplo del examen, se trata de aplazar a un alumno (aceptar H_0) cuándo sí sabía, porque le tocó —a la inversa que en el caso anterior— una de las únicas bolillas que no sabía.

Se llama **Error de Tipo II** a la decisión equivocada de aceptar una hipótesis nula cuando ésta es falsa.

Según la prueba de que se trate, el costo de cometer cada tipo de error es diferente. Si se trata de evaluar el efecto de una intervención terapéutica, la H_0 dirá que no produce efectos. Entonces, cometer un ETI equivaldrá a recomendar la intervención y que no produzca efecto. Mientras que el ETII consistirá en

desestimar una intervención que sí tenía efectos. Si se trata de una intervención muy riesgosa, el ETI es muy grave, porque implicará poner en peligro al paciente, por nada. Por su parte, el ETII conlleva la pérdida del beneficio que la intervención habría dado. La decisión sobre qué error es más grave debe tomarse en cada caso y no pertenece al terreno de la estadística.

Esto se vincula a los errores a que están expuestas las pruebas diagnósticas. Cuando la prueba da un resultado positivo al ser aplicada a alguien sano, se llama *falso positivo*. De modo más general, esa expresión indica que el error consiste en creer que “sucedió algo” cuando no fue así y corresponde, en las pruebas de hipótesis, al ETI.

De modo equivalente, el resultado negativo de una prueba diagnóstica aplicada a alguien que sí está enfermo se llama *falso negativo*. Se trata del error opuesto, porque cuando se comete se cree que “no sucedió nada” cuando en realidad sí sucedió. Es el ETII.

Si insistimos sobre estos errores es para llamar la atención sobre dos aspectos fundamentales de las pruebas de hipótesis:

Las conclusiones son probabilísticas, no son verdaderas ni falsas.

Toda conclusión proveniente de estos procedimientos está sujeta a error.

ETII: μ , α y n

A diferencia del ETI, la probabilidad de cometer un ETII no es fijada de antemano, al contrario, el riesgo de creer que H_0 es verdadera cuando no lo es, depende de cuál sea la verdadera. Intuitivamente: no es igualmente probable creer que no hay diferencia entre dos valores cuando en realidad éstos son muy cercanos, que cuando difieren mucho, es más fácil confundir cosas que están cerca (creyendo que son iguales) que cuando están lejos.

Llamaremos β a la probabilidad de cometer el ETII y veremos cómo calcularla según las diferentes posibilidades del verdadero valor del parámetro sobre el cual se realiza la prueba.

El gráfico 9 corresponde a una prueba de hipótesis unilateral derecha sobre la media poblacional⁹⁶, con la forma:

$$\begin{aligned}H_0: \mu &= \mu_0 \\H_1: \mu &> \mu_0\end{aligned}$$

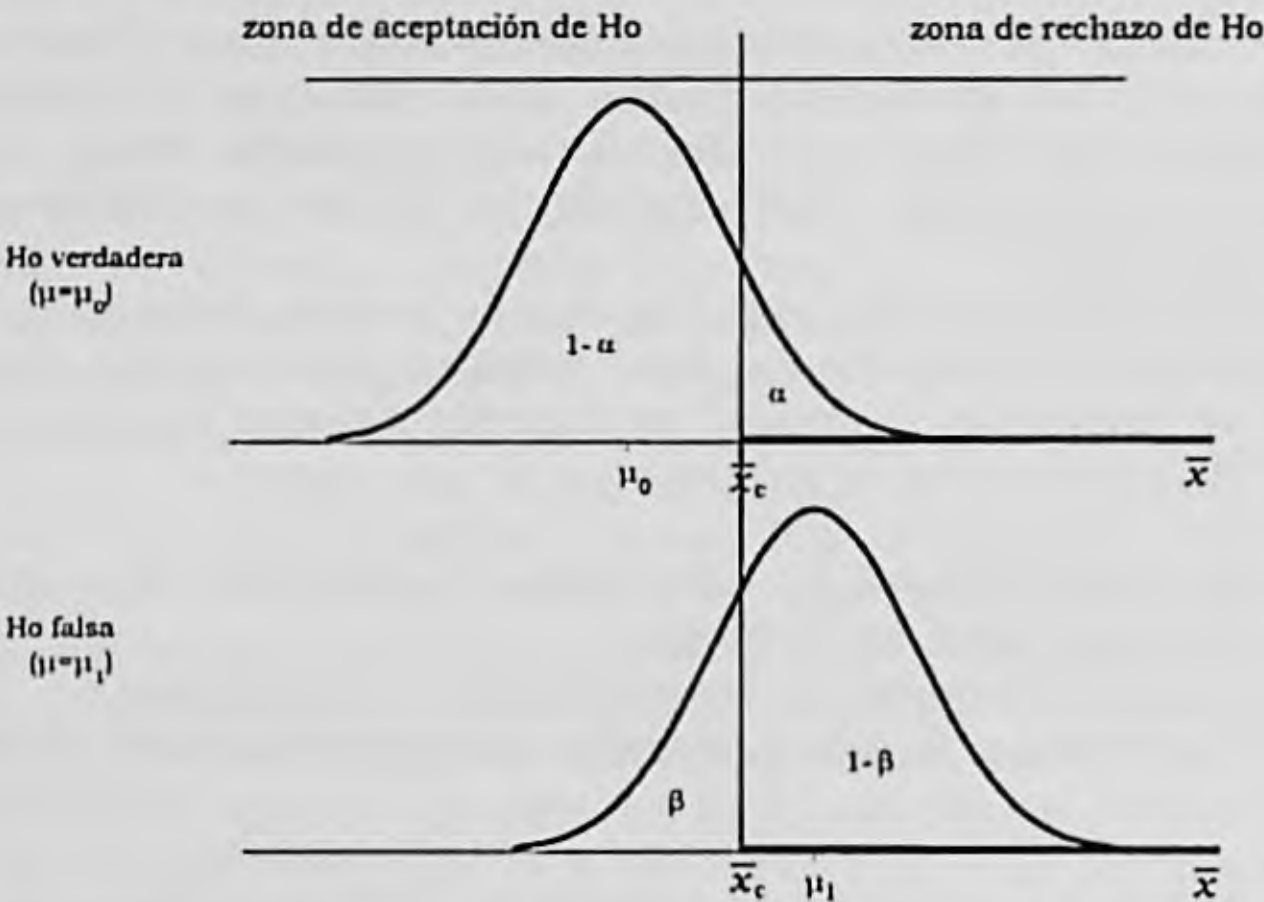
Donde μ_0 es un valor determinado e hipotético para la media de la población. En el gráfico se ha ubicado ese valor hipotético y la zona de rechazo de H_0 , estableciendo el nivel de significación (α) en 0,05. Además, hemos dibujado otra curva, centrada en otra media poblacional que podría ser verdadera⁹⁷. Así, la curva superior representa la distribución de probabilidad de $\bar{x}$ si H_0 fuera verdadera ($\mu = \mu_0$). La curva inferior muestra la distribución de probabilidades de

⁹⁶Aunque ejemplificaremos solo para el caso de la media y para una prueba unilateral derecha, el concepto de errores de tipo I y II es general y vale del mismo modo para la proporción y para pruebas de hipótesis sobre otros parámetros, en pruebas unilaterales o bilaterales.

⁹⁷ Lo que sigue tiene objetivos orientativos, si se necesita un tratamiento más detallado del tema —que requiere considerar que si H_0 es falsa entonces la distribución del estimador no es necesariamente simétrica—, puede consultarse Cumming (2012).

$\bar{x}$ si H_0 fuera falsa ($\mu > \mu_0$) y la verdadera media poblacional fuera μ_1 (que es una de las posibles entre las mayores que μ_0).

Gráfico 9: Comparación de la probabilidad de hallar a $\bar{x}$ en zona de aceptación o rechazo, según sea H_0 verdadera o falsa ($\alpha = 0,05$).



La parte superior del gráfico muestra que, si H_0 es verdadera, $\bar{x}$ tiene una probabilidad α de estar en la zona de rechazo, por lo que, si H_0 es verdadera y $\bar{x}$ está en esa zona, tomaremos la decisión errada de rechazarla. El complemento del nivel de significación ($1-\alpha$), es la probabilidad de tomar la decisión correcta de aceptar H_0 cuando ésta es verdadera. Es la probabilidad de hallar a $\bar{x}$ en la zona de aceptación de H_0 .

En el gráfico inferior vemos que, si H_0 es falsa, $\bar{x}$ tiene probabilidad $1-\beta$ de estar en la zona de rechazo, lo que llevará a tomar la decisión correcta de rechazar una H_0 falsa. Bajo el mismo supuesto de H_0 falsa, β es el área correspondiente a la zona de aceptación de H_0 , por lo que mide la probabilidad de errar aceptando una H_0 falsa.

Debido a que no podemos tener certeza acerca de la verdad o falsedad de H_0 , es que se nos plantean dos posibles escenarios: que H_0 sea verdadera o que sea falsa. En base a los datos con que contamos en la muestra podemos tomar dos decisiones: aceptar H_0 o rechazarla, con lo que la decisión que tomemos puede ser correcta o incorrecta.

Esquema 1: Posibles combinaciones de estados de realidad y decisión que se toma. (Entre paréntesis, la probabilidad de cada evento):

Estado de realidad	Decisión	
	Aceptar H_0	Rechazar H_0
H_0 verdadera	Decisión correcta ($1-\alpha$)	Error de tipo I (α)
H_0 Falsa	Error de tipo II (β)	Decisión correcta ($1-\beta$)

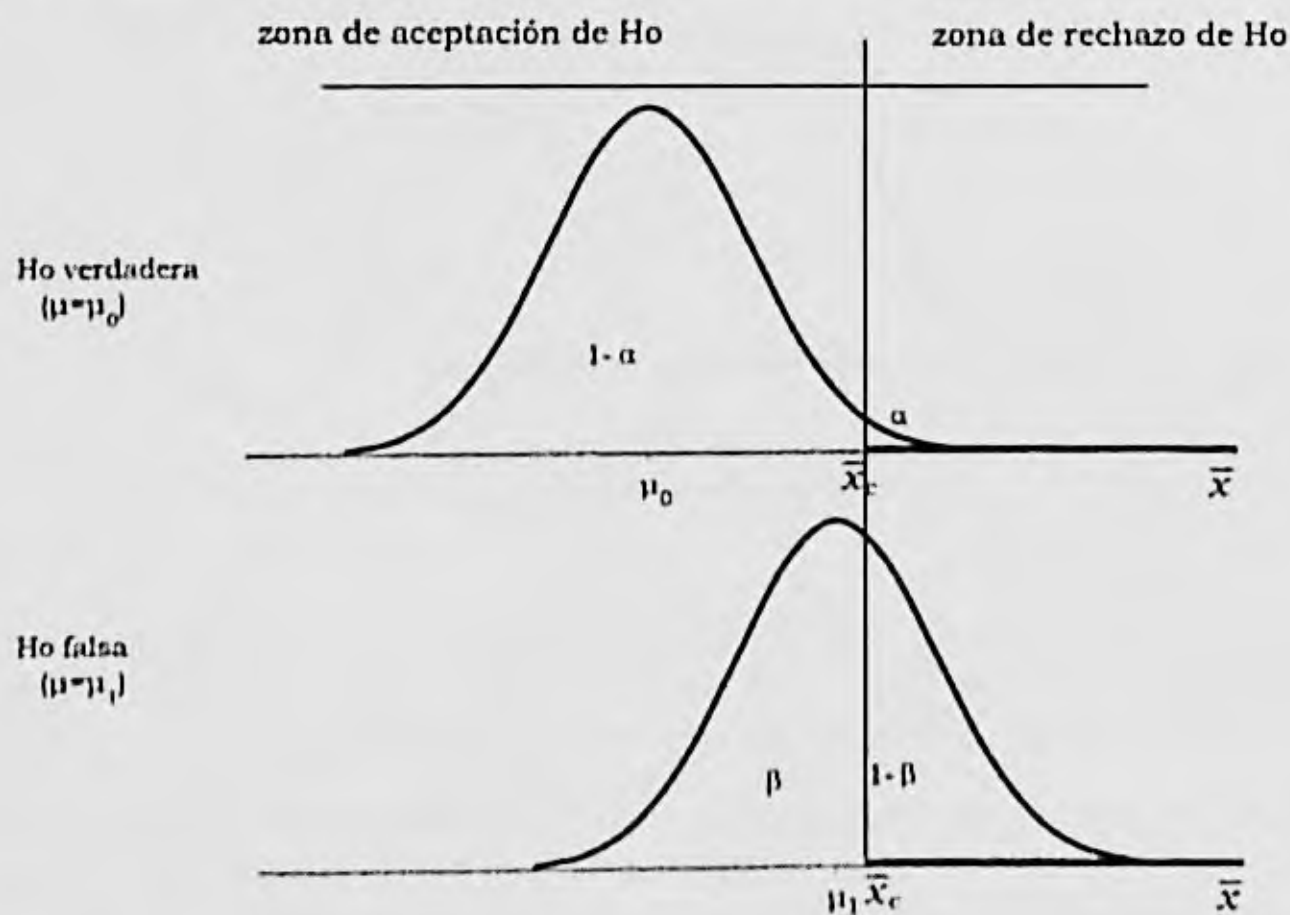
La última celda del esquema corresponde a la decisión correcta de rechazar una H_0 que es falsa, y se la denomina **potencia de la prueba**. Es un indicador de la capacidad de la prueba para detectar hipótesis nulas que son falsas y rechazarlas.

Se llama **potencia de una prueba** a la probabilidad de rechazar una H_0 cuando ésta es falsa.

Es una importante medida de la calidad de la prueba, luego volveremos sobre su cálculo, y en el apéndice ofrecemos más detalles.

Así entonces, α es elegido por el investigador y mide el riesgo que está dispuesto a correr de rechazar una H_0 que es verdadera. Por el contrario, β depende de varios elementos. En primer lugar, depende de α : si se reduce el nivel de significación, aumenta el riesgo de cometer ETII. Si cambiamos el gráfico 9, reduciendo el nivel de significación, ahora la posición relativa de las áreas de rechazo y no rechazo queda:

Gráfico 10: Comparación de la probabilidad de hallar a $\bar{x}$ en zona de aceptación o rechazo, según sea H_0 verdadera o falsa ($\alpha = 0,01$).

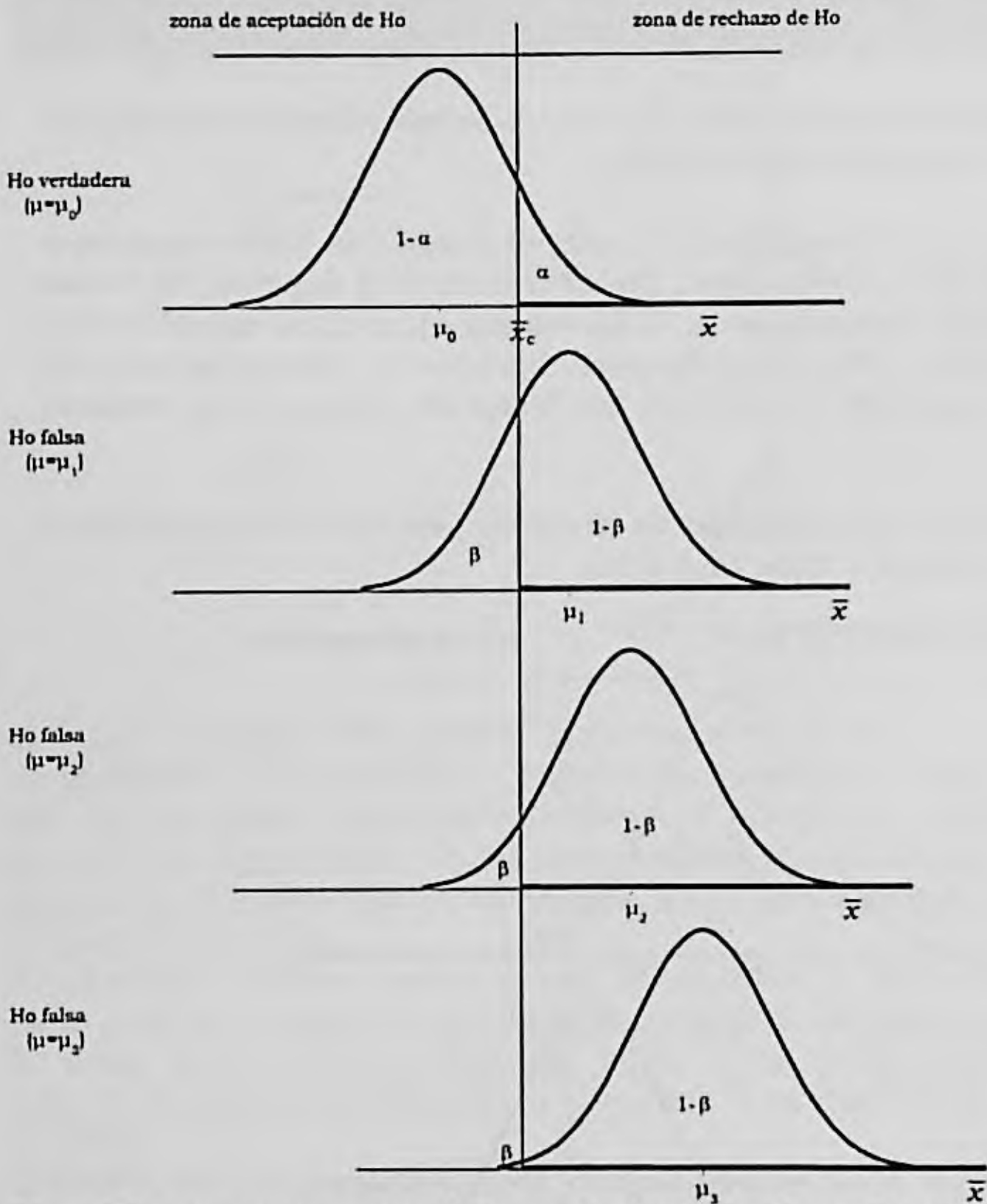


Como vemos, la reducción del nivel de significación del 5% al 1% hace que el punto crítico se desplace hacia la derecha y, en consecuencia, que aumente el área bajo la otra curva, que corresponde a H_0 falsa. Este cambio consiste en hacer a la prueba más exigente, al reducir las chances de rechazar H_0 por error del 5 al 1%. Su consecuencia es la de aumentar las chances de aceptar H_0 por error, aumentando β .

El ETII depende también de cuál sea la verdadera media poblacional. En los gráficos 9 y 10 planteamos como "otra posibilidad" que la verdadera media fuera μ_1 , que es una de las formas en que puede ser H_0 falsa. Siendo H_0 falsa, μ puede tener distintos valores y ellos incidirán en la probabilidad de cometer

ETII. En el gráfico siguiente, además de μ_1 agregamos otras dos medias poblacionales posibles μ_2 y μ_3 .

Gráfico 11: Comparación de la probabilidad de hallar a $\bar{x}$ en zona de aceptación o rechazo, según sea H_0 verdadera o falsa, de tres modos diferentes.



El gráfico muestra que si la verdadera media poblacional difiere mucho de la hipotética (como es el caso de μ_3), es menor la probabilidad β de cometer ETII: β va decreciendo a medida que se consideran medias más alejadas de la que sostiene la H_0 . Ésta es una manera de formalizar la idea intuitiva que mencionamos más arriba: es más fácil aceptar un valor equivocado de μ si el verdadero se le parece, que si es muy diferente. Más concreto aún: es más fácil aceptar por error un billete falso si se le parece mucho al verdadero que si es muy distinto, cuanto más difiera, menor será la probabilidad de aceptarlo por error. El gráfico 11 también muestra que, de manera complementaria, $1 - \beta$ (la potencia de la prueba), va creciendo a medida que se consideran medias alternativas más alejadas de la hipotética.

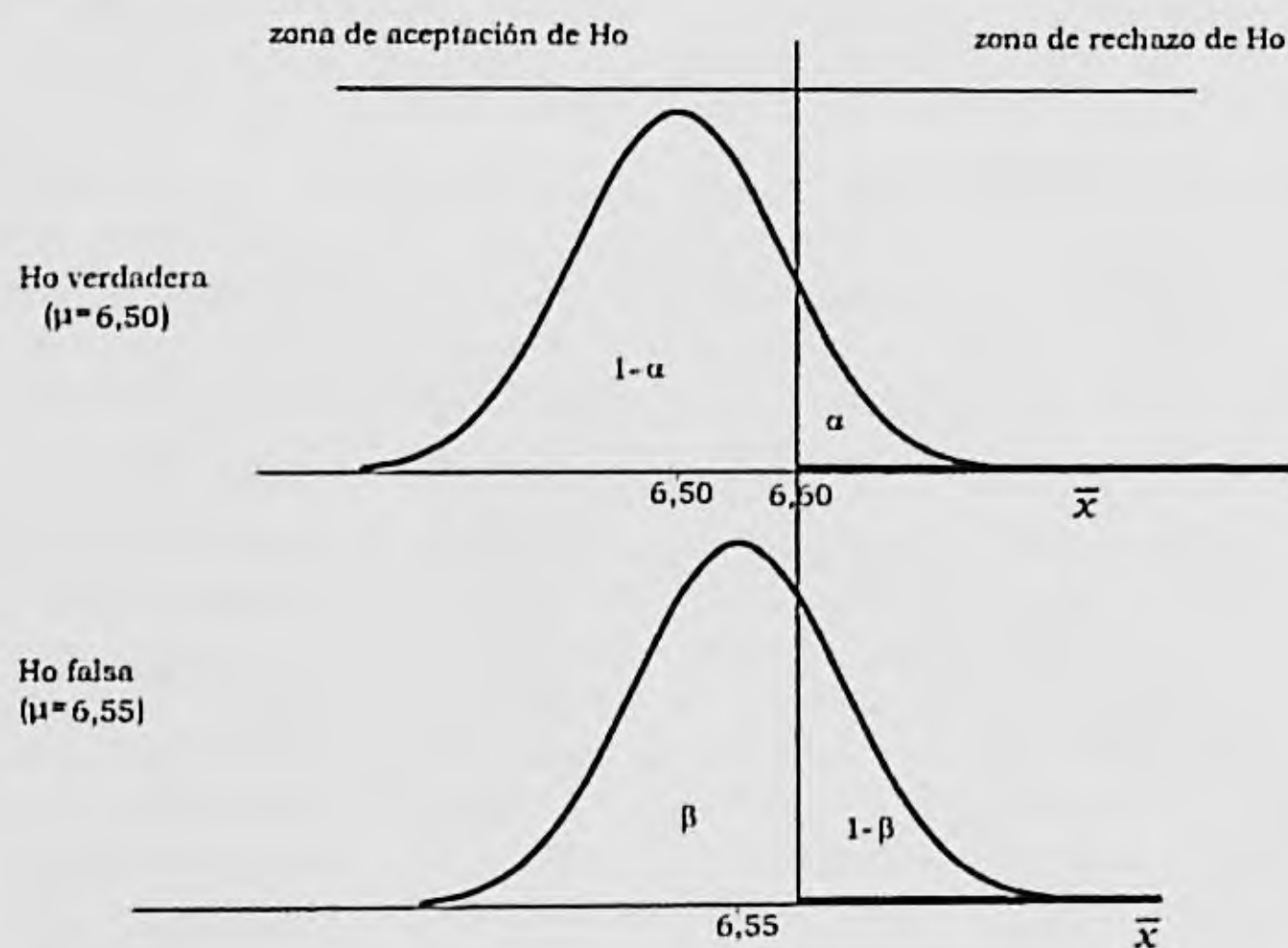
Volvamos al ejemplo (ficticio) sobre el promedio con que egresan los estudiantes de Psicología en la prueba unilateral derecha, cuyas hipótesis son:

$$H_0: \mu = 6,50$$

$$H_1: \mu > 6,50$$

Preguntamos: si la verdadera media de nota con que egresan los estudiantes fuera de 6,55, ¿cuál habría sido la probabilidad de haber aceptado H_0 ? Dicho de otra forma ¿qué probabilidad hay de creer que la media sigue siendo 6,50 si en realidad ha aumentado a 6,55? Se trata de calcular la probabilidad de cometer ETII, porque se trata de aceptar una H_0 que es falsa. A un nivel de significación del 5%, el punto crítico que habíamos encontrado es 6,60, por lo que:

Gráfico 12: Ubicación de los tipos de error de la prueba si H_0 es verdadera o si es falsa.



La probabilidad de ETII en este caso es el área bajo la curva inferior que está por debajo del punto crítico, 6,60. Para calcular β es necesario hallar esa área bajo la curva normal centrada en 6,55, lo que requiere que se lo transforme a puntaje z :

$$z = \frac{6,60 - 6,55}{\frac{0,60}{\sqrt{100}}} = \frac{0,05}{0,06} = 0,83$$

Cuya área izquierda asociada (provista por InfoStat®) es: $P(z < 0,83) = 0,7977$

Éste es el valor de β para esta prueba y esta media alternativa. Leemos el resultado diciendo que “si el verdadero promedio con que egresan los estudiantes de Psicología fuera de 6,55, habría una probabilidad de 0,7977 de creer que sigue siendo igual al histórico, de 6,50”.

Calculamos la potencia de esta prueba, como el complemento de β :

$$\text{Potencia} = 1 - \beta = 1 - 0,7977 = 0,2023$$

Esta potencia es la probabilidad de detectar una diferencia de 0.05 entre la media real y la hipotética (es la diferencia entre 6.50 y 6.55) a un nivel de significación del 5%, con una muestra de 100 observaciones. Estos cuatro elementos:

magnitud de la diferencia, tamaño de la muestra, nivel de significación y potencia están vinculados entre sí y deben tenerse en cuenta al planificar un estudio que vaya a usar pruebas de hipótesis.

Curva de potencia

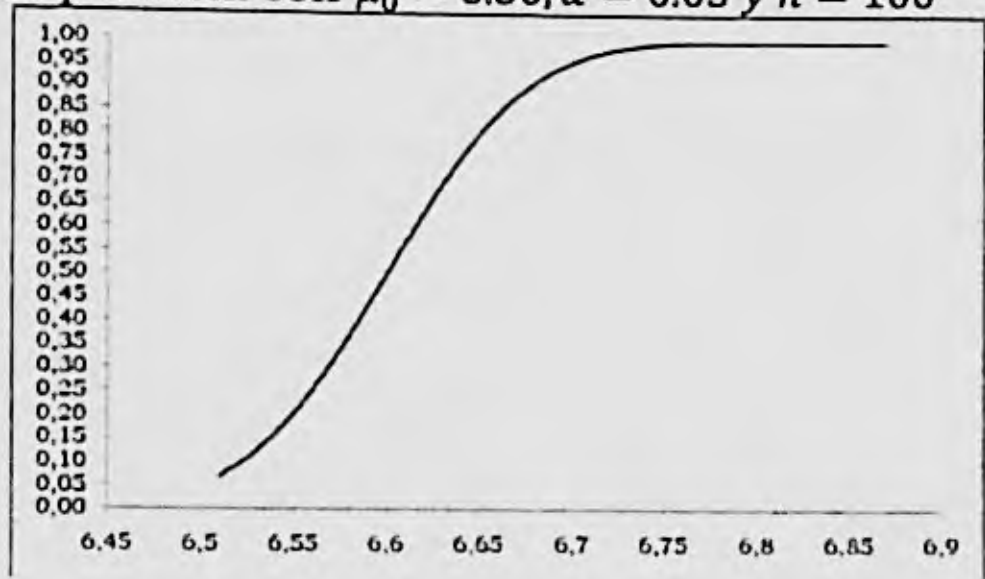
Dado que no se conoce la verdadera media de la población, solo podemos conjeturar acerca de ella y calcular el ETII, así como la potencia para diferentes valores posibles, como hemos hecho para tres valores en el gráfico 10. En general, resulta más valioso calcular la potencia ($1-\beta$) porque nos informa sobre la calidad de la prueba. El cálculo es largo porque deben seguirse los mismos pasos que en el ejemplo anterior para cada una de las medias posibles, pero podemos automatizarlo en una hoja de cálculo. La tabla para calcular la potencia de la prueba anterior se construye manteniendo el punto crítico fijo en 6,60 (y también la desviación estándar y el tamaño de la muestra), y calculando el puntaje z correspondiente a ese valor “desde” diferentes medias poblacionales alternativas, a las que hemos llamado μ_k . Así resulta:

Media alternativa μ_k	$z = \frac{6,60 - \mu_k}{\frac{0,60}{\sqrt{100}}}$	Probabilidad de ETII β	Potencia $1 - \beta$
6,51	1,50	0,9332	0,0668
6,53	1,17	0,8783	0,1217
6,55	0,83	0,7977	0,2023
6,57	0,50	0,6915	0,3085
6,59	0,17	0,5662	0,4338
6,61	-0,17	0,4338	0,5662
6,63	-0,50	0,3085	0,6915
6,65	-0,83	0,2023	0,7977
6,67	-1,17	0,1217	0,8783
6,69	-1,50	0,0668	0,9332
6,71	-1,83	0,0334	0,9666
6,73	-2,17	0,0151	0,9849
6,75	-2,50	0,0062	0,9938
6,77	-2,83	0,0023	0,9977
6,79	-3,17	0,0008	0,9992
6,81	-3,50	0,0002	0,9998
6,83	-3,83	0,0001	0,9999
6,85	-4,17	0,0000	1,0000
6,87	-4,50	0,0000	1,0000

Resultan así diferentes valores para la potencia, uno para cada media posible y vemos, ahora numéricamente, como disminuye el riesgo de aceptar H_0 a medida que la verdadera media es más lejana. Al mismo tiempo, aumenta la probabilidad de rechazar H_0 (aumenta la potencia). Esos resultados se representan

gráficamente en lo que se denomina **curva de potencia**. Para el ejemplo anterior, la curva de potencia es la siguiente:

Gráfico 13: Curva de potencia con $\mu_0 = 6.50, \alpha = 0.05$ y $n = 100$



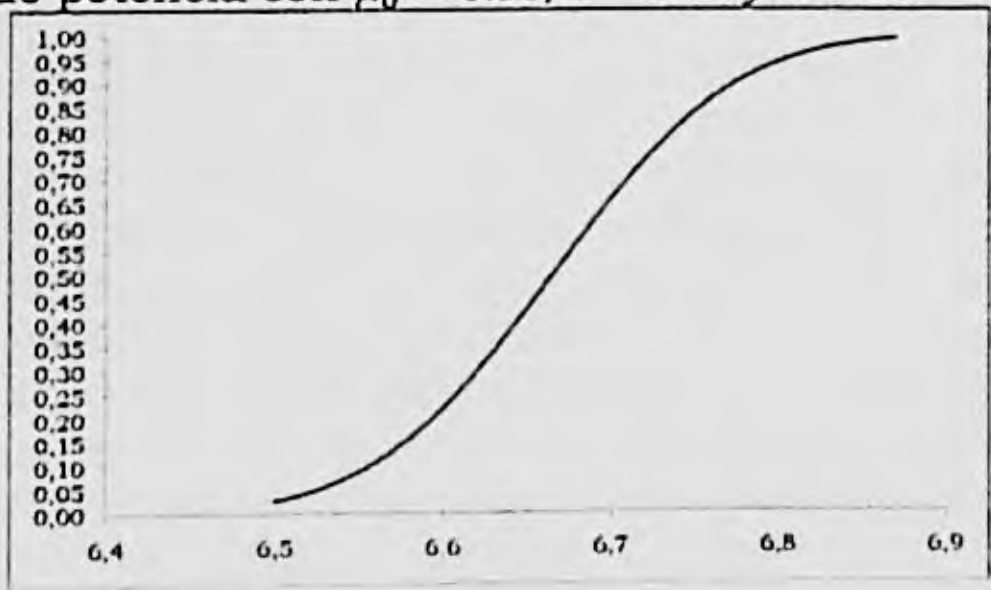
En el eje horizontal se ubican las posibles medias poblacionales (las distintas μ_k) y en el vertical, la potencia asociada a cada una de ellas. Vemos que si la verdadera media es la hipotética ($\mu = 6.50$), la probabilidad de rechazarla es α , y esa probabilidad aumenta a medida que se consideran medias más lejanas a μ_0 . Si la verdadera media poblacional fuera tan lejana como 6.90, la probabilidad de rechazar H_0 es casi 1, lo que indica que es casi seguro que se rechazará esa hipótesis.

Dijimos antes que la potencia es una medida de la calidad de la prueba, en efecto, cuanto más rápidamente crezca esta curva, tanto más sensible será la prueba, porque será más probable detectar hipótesis nulas que son falsas y rechazarlas. Dicho de otro modo, será alta la probabilidad de rechazar una hipótesis nula si la verdadera media difiere —aunque sea poco—, de la hipotética.

La forma de la curva de potencia depende de varios factores, de los que solo nos detendremos en el tamaño de la muestra: con muestras más grandes, si todo lo demás se mantiene sin cambios, la potencia de la prueba aumenta. Inversamente, muestras pequeñas reducen la potencia.

Veamos esto gráficamente, si la muestra fuera de menor tamaño que la del ejemplo, como $n=50$, la curva de potencia toma la siguiente forma:

Gráfico 14: Curva de potencia con $\mu_0 = 6.50, \alpha = 0.05$ y $n = 50$

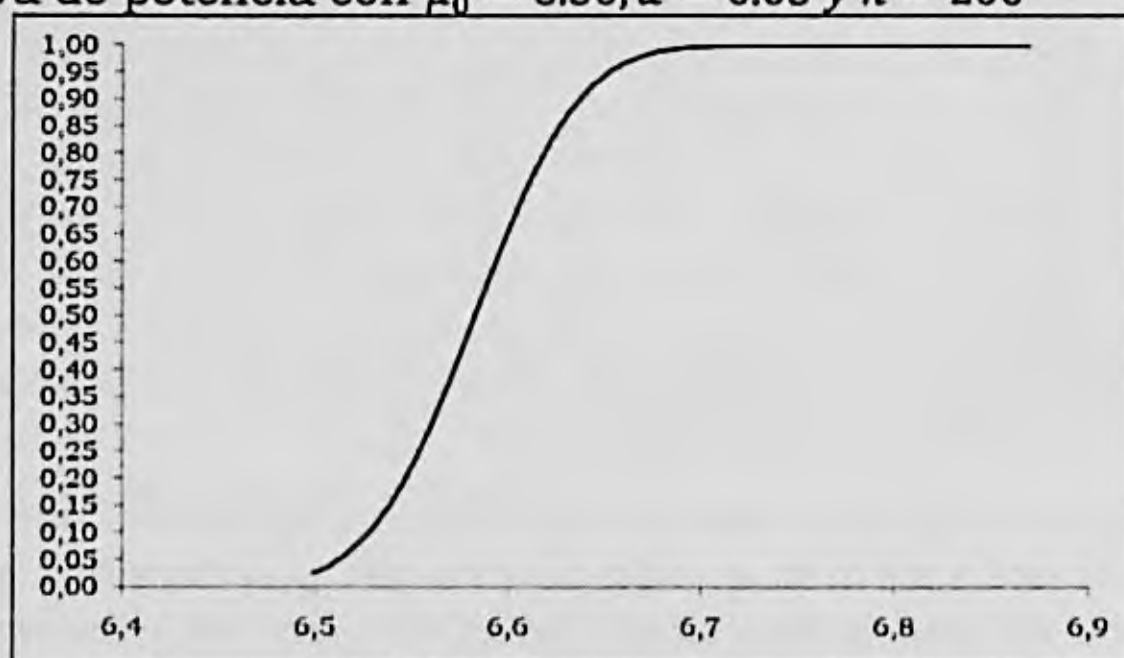


Igual que antes en 6.50, la probabilidad de rechazo es 0.05, que es α . Pero cuando consideramos valores más lejanos de la media poblacional, la curva sube

con más lentitud que la anterior, podríamos decir que “tarda más en reaccionar”, son necesarios alejamientos más grandes para que crezca la probabilidad de rechazo.

Por el contrario, si se trata de una muestra de mayor tamaño, como 200 casos, la curva tiene la forma:

Gráfico 15: Curva de potencia con $\mu_0 = 6.50$, $\alpha = 0.05$ y $n = 200$



Que muestra un aumento más rápido de la probabilidad de rechazar una H_0 cuando ésta es falsa.

Es importante destacar que la potencia no depende del resultado observado en la muestra, por el contrario, es un indicador de la calidad de la prueba como tal, independientemente de lo que se encuentre en la muestra. Por esta razón, el análisis de la potencia se realiza al momento de planificar un experimento. Tiene mucha importancia para calcular el tamaño de muestra necesario para detectar una determinada diferencia entre grupos.

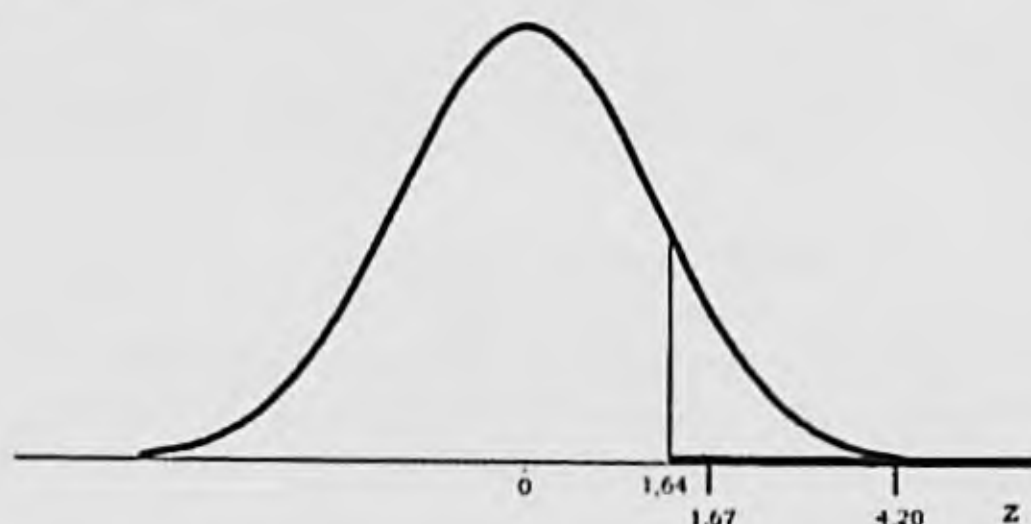
Existen índices para estandarizar la distancia entre el verdadero valor del parámetro y el hipotético. Esos índices permiten comparar entre pruebas de diferente naturaleza (porque están estandarizados), se denominan *medidas del tamaño del efecto*. Ellis (2010) provee un tratamiento detallado de este tema, en el apéndice regresaremos sobre ellas.

Significación estadística y valor p

Hasta este punto se ha indicado que el investigador establece el nivel de significación estadística al realizar una prueba de hipótesis, a partir de lo cual se determinan zonas de rechazo y no rechazo de la hipótesis nula y que esto puede hacerse sobre valores estandarizados o del estimador. Luego, una vez obtenido el resultado de la muestra, se indica en qué zona se ubica, y se decide si se acepta o rechaza la H_0 . La forma en que se comunican los resultados es, por ejemplo: “se rechaza la H_0 a un nivel del 5%”. De modo que, como hemos dicho, se establece una regla de decisión y en base a ella se decide por sí o por no.

En una prueba unilateral derecha al 5%, el puntaje z que determina el punto de corte entre las zonas de aceptación y rechazo (z crítico) es 1,64, por lo que, si se obtiene un z observado de 1,67, se rechaza H_0 y también se rechaza si se obtiene 4,20, porque ambos son superiores al punto crítico. Sin embargo, encontrar $z=4,20$ indica que el valor observado se aleja en gran magnitud del

hipotético, mientras que si $z=1,67$, se rechaza muy cerca del límite. Entre dos situaciones, que ambas llevan a rechazar H_0 , puede haber diferencias de importancia; por eso es necesaria una medida de la magnitud de la diferencia. Veamos esto gráficamente:



Aunque los dos valores de z llevan a concluir que se debe rechazar la H_0 (porque ambos están en la zona de rechazo), el valor 4,20 es sustancialmente menos probable que el 1,67, por lo que podríamos decir que en ese caso ($z_{obs}=4,20$) tenemos *más* evidencia para rechazar H_0 , sin embargo, si solo informamos que “se rechaza H_0 a un nivel del 5%”, quien lee no puede saber si se trató de una diferencia grande o pequeña.

El modo en que se transmite esta información es ofreciendo el **valor de probabilidad** asociado al resultado muestral, que también se llama **valor p** . Se trata de la probabilidad de observar en la experiencia un resultado igual o más extremo que el obtenido a partir de los datos muestrales, bajo el supuesto de que la hipótesis nula es cierta. Es decir, la probabilidad de hallar un resultado como el que se encontró o más extremo que él, solo por azar. Un valor p pequeño indica que el resultado observado (o resultados más extremos que él) son poco probables bajo el supuesto de hipótesis nula cierta, por lo cual hay evidencia en contra de la hipótesis nula.

El valor p es una probabilidad condicional a la que escribimos formalmente como:

$$p(|u| \geq u_{obs} / H_0 V)$$

Donde u es el estimador del parámetro al que se refiere la H_0 . La expresión $|u| \geq u_{obs}$ es la forma reducida de decir que u sea más extrema (por encima o por debajo) que el valor observado.

Cuanto más pequeño es el valor p , tanta más evidencia hay para rechazar H_0 . Por el contrario, un valor p grande indica que el resultado observado es muy probable bajo el supuesto de hipótesis nula cierta, lo que no aporta evidencia en contra de la hipótesis nula y conduce a no rechazarla.

Esta manera de indicar cuán esperable sería lo que hemos observado si H_0 fuera cierta, puede vincularse con el razonamiento anterior, comparando el valor p con el nivel de significación fijado de antemano. Así resultan dos posibilidades:

Si el valor p es menor que el nivel de significación establecido ($p < \alpha$): se rechaza la hipótesis nula y se describe como “un resultado estadísticamente significativo”. Esto quiere decir que la probabilidad de haber hallado este resultado por azar es

pequeña, por lo que se trata de un efecto o diferencia que muy difícilmente se puede atribuir al azar.

Si el valor p es mayor que el nivel de significación establecido ($p > \alpha$): no se rechaza la hipótesis nula y se expresa como “un resultado no estadísticamente significativo”. Lo que expresa que la probabilidad de haber hallado este resultado por azar es mayor que el máximo establecido, por lo que es razonable atribuirlo al azar, es decir a la variabilidad propia de los resultados muestrales.

Pero aun cuando esta modalidad de presentar el resultado puede hacerse equivalente al procedimiento anterior, constituye un aporte de información adicional de importancia porque pasa de la conclusión dicotómica (se acepta o se rechaza) a la probabilidad de hallar este resultado si la hipótesis nula fuera cero. A continuación calculamos estas probabilidades en los ejemplos vistos, empezando por pruebas unilaterales:

En el ejemplo sobre el promedio con que egresan los alumnos:

$$\begin{aligned}H_0: \mu &= 6,50 \\H_1: \mu &> 6,50\end{aligned}$$

En la muestra de 100 alumnos habíamos hallado $\bar{x}_{obs} = 6,65$ y $s = 0,60$, con esos datos debemos calcular la probabilidad de hallar “un valor tan extremo como el observado o más extremo que él, si H_0 es verdadera”. Se trata de una probabilidad condicional, en la que la condición es que H_0 sea verdadera, lo escribimos así:

$$P(\bar{x} \geq 6,65 / \mu = 6,50)$$

Que expresa la probabilidad de coincidir con 6,65 o superarlo (se trata de una prueba unilateral derecha, por eso usamos el signo $\geq$), si la media poblacional fuera la hipotética (6,50). Para encontrar la probabilidad, transformamos $\bar{x}$ a puntaje z :

$$z = \frac{6,65 - 6,50}{\frac{0,60}{\sqrt{100}}} = \frac{0,15}{0,06} = 2,50$$

Entonces debemos hallar $P(z \geq 2,50)$ y ya no hace falta indicar la condición (si $\mu = 6,50$), porque está incluida en el cálculo de z . Usando la opción de InfoStat®, obtenemos:

$$P(z \geq 2,50) = 0,0062$$

Ese es el valor p , e indica cuál es la probabilidad de encontrar un valor como el observado o uno más extremo que él, si la H_0 fuera verdadera. Vemos que se trata de un valor pequeño, es menor a 0,05 y también menor a 0,01, por lo que podemos decir que la H_0 se rechaza a un nivel del 5% y también del 1%. Pero además de esto, comunicamos el valor p obtenido, porque eso da al lector una idea más completa de nuestro resultado.

Para el caso de la proporción, consideremos la segunda parte del ejemplo del candidato, cuando usamos una muestra grande:

$$H_0: P = 0,30$$

$$H_1: P > 0,30$$

En la muestra de $n = 200$ casos habíamos hallado $\hat{p}_{obs} = 0,32$.

Por tratarse de una prueba unilateral derecha, necesitamos conocer la probabilidad condicional de hallar un valor como el observado —o más extremo que éste—, si fuera verdadera H_0

$$P(\hat{p} \geq 0,32 / P = 0,30)$$

Para calcular esta probabilidad transformamos el valor de $\hat{p}$ a puntaje z :

$$z = \frac{\hat{p} - P}{\sqrt{\frac{P \cdot (1-P)}{n}}} = \frac{0,32 - 0,30}{\sqrt{\frac{0,30 \cdot (1-0,30)}{200}}} = 0,617$$

Usando InfoStat® que $P(z \geq 0,617) = 0,2686$. Se trata de una probabilidad “grande”, si se compara con los niveles de significación que usamos, es superior a 0,05 y también superior a 0,10, por lo que la decisión será la de no rechazar H_0 y concluir que el candidato no mejoró su proporción de votos.

En el mismo ejemplo, cuando se trabaja con la muestra pequeña, no es válida la aproximación normal, por lo que debe usarse la binomial. El cálculo del valor p es equivalente, solo que se realiza en términos de la variable *número de éxitos*. En el ejemplo, el número observado de éxitos era de 16, la probabilidad condicional que corresponde al valor p es entonces la probabilidad de hallar en la muestra de 50 casos, 16 personas o más que vayan a votar al candidato, si en la población la proporción de quienes lo votarán es de 30%:

$$P(\hat{x} \geq 16 / n = 50, P = 0,30) = 0,4308$$

Nuevamente es un valor elevado para p , por lo que no se rechaza H_0 .

Los software de análisis de datos ofrecen, como resultado de las pruebas de hipótesis este valor, a veces llamado “ p ”, “ p -value”, “valor p ” o “significación”; y es en él que hay que basar la decisión.

Muestras pequeñas y pruebas t

Se ha mencionado que la distribución t de Student, es un modelo de probabilidades con una forma similar a la distribución normal, pero más aplanada y dependiente de un dato al que se llama “grados de libertad”. Estos grados de libertad dependen del número de casos que haya en la muestra. También se indicó que a medida que los grados de libertad aumentan, la curva t tiende a asemejarse más a la normal. De modo que si se trata de muestras grandes, la distribución t es muy similar a la normal. Esto se denomina convergencia de la distribución t hacia la normal.

Vamos a usar esa distribución en las pruebas de hipótesis cuando trabajemos con muestras pequeñas, pero con una restricción. En aquellos casos en que sea posible suponer que la variable de origen (en la población) tiene distribución normal, entonces la distribución de las medias muestrales es adecuadamente modelada por la distribución t . Dicho de otro modo: si la variable tiene —en la

población—, distribución normal, entonces las medias muestrales, cuando se trate de muestras pequeñas, tienen *distribución t*. Nos encontramos así con distintas situaciones, de acuerdo al tamaño de la muestra y a la normalidad o no de la variable en la población.

Muestras grandes: Por el teorema central del limite, estamos autorizados a usar distribución normal para la media muestral, sin importar cuál sea la distribución de la variable en la población.

Muestras pequeñas: Si la variable tiene distribución normal en la población, usamos distribución *t de Student*, cuyos grados de libertad son $n-1$.

De estas dos condiciones (tamaño de muestra y normalidad de la variable en la población) resultan cuatro combinaciones:

Tamaño de la muestra	Distribución de la variable en la población	
	Normal	No normal
grande ($n \geq 30$)	distribución normal	por TCL tiende a normal
pequeña ($n < 30$)	distribución <i>t de Student</i>	ninguna ⁹⁸

De modo que hay una situación que no podemos abordar con estos procedimientos: la de muestras pequeñas provenientes de poblaciones no normales, para ellas disponemos de procedimientos llamados “no paramétricos” de los que nos ocuparemos más adelante. Las demás combinaciones pueden todas ellas resolverse con la distribución *t* que es específica en el caso de muestras pequeñas y es equivalente a la normal cuando la muestra es grande (porque lo son los grados de libertad).

Por esta razón, en la mayoría de los paquetes informáticos de análisis de datos, se habla de *pruebas t* de manera genérica para las pruebas sobre la media, y el estadístico de prueba constituye un valor *t* en lugar de *z*. La lógica es exactamente la que hemos seguido en este capítulo, solo que el programa hace las cuentas usando la distribución *t* que, cuando se trabaja con una muestra grande, da el mismo resultado que la normal.

Además de operar internamente con la distribución *t de Student*, los programas de análisis de datos ofrecen los resultados de las pruebas de hipótesis siempre en términos del valor *p*. Eso permite que quien lee la salida pueda decidir si rechaza o no rechaza la H_0 , de acuerdo al nivel de significación que haya fijado.

La siguiente salida InfoStat® corresponde a una prueba de hipótesis acerca del promedio del número de hijos por mujer. Se busca evidencia para decidir si, según los datos de una muestra de 116 casos, la población de la que esa muestra proviene tiene en promedio dos hijos por mujer o si ese promedio es menor a 2. Las hipótesis entonces son:

⁹⁸Existe un procedimiento basado en un resultado importante de la estadística que se conoce como “desigualdad de Tchebycheff”, que establece que la probabilidad de encontrar a una variable a una distancia de su media superior a *k* desviaciones estándar es menor a $\frac{1}{k^2}$. Se expresa como $P(|x - E(x)| > k\sigma) < \frac{1}{k^2}$. También es posible recurrir a la distribución empírica, obtenida por remuestreo, InfoStat® lo hace en la opción *estimación por bootstrap* para construir intervalos de confianza. En el capítulo 13 se verán pruebas que permiten resolver situaciones en las que no se cumplen los supuestos, como pequeñas muestras, distribución no normal y/o nivel de medición no métrico.

$$H_0: \mu = 2$$

$$H_0: \mu < 2$$

Prueba t para una media

Valor de la media bajo la hipótesis nula: 2

Variable	n	Media	DE	T	p(Unilateral)
hijos	116	1,98	1,22	-0,18	0,4326

En el primer renglón, la salida ofrece el valor de μ bajo H_0 , que es 2. Luego muestra el nombre de la variable (hijos), la cantidad de casos en la muestra (n), la media muestral ($\bar{x} = 1,98$), la desviación estándar muestral ($DE=1,22$), el valor del estadístico de prueba ($t = -0,18$) y el valor de probabilidad asociado ($p(\text{Unilateral}) = 0,4326$). Esta última probabilidad especifica que se trata de una prueba unilateral izquierda (rechaza para valores menores que el hipotético).

La media muestral tiene un valor que está muy levemente por debajo del hipotético (1,98 frente a 2), por lo que podríamos suponer que la diferencia no es significativa, sin embargo, con la apreciación subjetiva no es suficiente, es necesario observar el valor p de la salida. Esta última cifra es grande (43,26%) por lo que no se rechaza la H_0 . Concluimos que no hay evidencia para considerar que la población de la que proviene la muestra tenga un nivel de fecundidad inferior a dos hijos por mujer.

Resumen de pruebas sobre una muestra

Parámetro	Estimador	Estadístico de prueba	Puntos críticos en términos del estimador	Supuestos
μ	$\bar{x}$	$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$	$\bar{x}_c = \mu \pm z * \frac{s}{\sqrt{n}}$	$n \geq 30$ ó distribución normal de x en la población
P	$\hat{p}$	$z = \frac{\hat{p} - P}{\sqrt{\frac{P * (1 - P)}{n}}}$	$\hat{p}_c = P \pm z * \sqrt{\frac{P * (1 - P)}{n}}$	$n * P \geq 5$ $n * (1 - P) \geq 5$

Usando el valor p , la lectura del resultado de la prueba de hipótesis se expresa:

Si la hipótesis nula fuera verdadera, habría una probabilidad p de hallar un valor como el observado o uno más extremo.

Capítulo 12 Prueba de hipótesis: las aplicaciones

Hasta aquí, la prueba de hipótesis es un procedimiento para evaluar si un valor observado en la muestra es compatible con el valor poblacional que plantea la hipótesis nula, para la media o la proporción. Se trabajó sobre una única población y se puso a prueba un valor determinado para un parámetro (media o proporción). Ahora ampliamos el análisis, porque vamos a poner a prueba la eventual diferencia entre dos grupos y la correlación entre dos variables. Probaremos por ejemplo, si puede aceptarse que dos poblaciones tengan la misma media en una variable cuantitativa o también la misma proporción de casos en una categoría de una variable cualitativa. Como antes, la hipótesis nula será la de no diferencia, es decir que formularemos como H_0 que las dos poblaciones tienen la misma media o bien la misma proporción. Para la correlación, la H_0 indica que, a nivel poblacional, el coeficiente vale cero.

En este capítulo se abordan los procedimientos que permiten comparar las medias o proporciones de dos grupos y determinar si las diferencias que se encuentran son significativamente mayores de lo que pudiera esperarse por puro azar. Es decir, recorreremos los pasos necesarios para tomar una decisión en términos estadísticos, a favor o en contra de la hipótesis que sostiene que dos grupos son iguales respecto del parámetro bajo análisis. Un modo alternativo de expresar el problema es considerar que lo que se pone a prueba es si las dos muestras provienen de la misma población o de dos poblaciones diferentes.

En el diseño experimental —tema que se verá en detalle en Metodología de la Investigación—, a menudo interesa conocer, si un grupo sometido a cierto tratamiento muestra cambios diferentes a los que experimenta otro grupo que no fue sometido a ese tratamiento. Los procedimientos que veremos se utilizan para determinar si las ganancias obtenidas en una muestra de sujetos tras un tratamiento —por ejemplo de entrenamiento cognitivo—, son lo suficientemente amplias como para representar diferencias en la población. En este tipo de casos, se realiza una primera evaluación del grupo (pre-test), se obtiene la media de ciertas variables (aciertos en una prueba de atención, palabras recordadas, aciertos en la correspondencia entre nombres y caras, etc.). Luego se somete a los sujetos a un período de entrenamiento y a continuación son nuevamente evaluados (post-test). Necesitamos determinar si los cambios, medidos a través de la diferencia de los promedios, son de una magnitud tal que podamos atribuirlos al entrenamiento o bien si pueden explicarse por azar.

Los procedimientos destinados a comparar grupos tienen gran difusión en investigación. Muchos de los problemas que interesa resolver usándolos se encuentran vinculados a distintos campos de la Psicología y la Educación, ya que se comparan grupos que han recibido una droga con quienes no la han recibido, que han pasado por un período de entrenamiento o no, que han participado en grupos terapéuticos o han desarrollado otra actividad, alumnos que aprenden con uno u otro método, etc. En todos los casos se realiza una comparación en algún resultado, que puede ser el puntaje en un test o cualquier otra variable sobre la que se busca intervenir. Por ejemplo, en una tesis de Maestría en Psicología Clínica, el autor separa a un grupo de niños deficientes mentales en dos grupos. Uno de ellos participa de un taller con actividades ecológicas (se lo llama “grupo experimental”), mientras que el otro grupo no lo hace (es el denominado “grupo

control"). A través de pruebas estandarizadas se mide la sociabilidad, esperando que las actividades en las que participaron pudieran estimularla. Se comparan los niveles de sociabilidad de los niños que participaron del taller con los de quienes no participaron, esta evaluación se hace antes y después de la realización de estas actividades, que se prolongaron por un mes. En este ejemplo hay dos comparaciones: la socialización de los niños que participaron con la de los que no lo hicieron, y la de la sociabilidad de los que participaron antes del taller y luego de él. En ambos casos se utilizan las pruebas sobre las que trata este capítulo.

Siempre la hipótesis nula sostendrá que no hay diferencias entre las puntuaciones obtenidas antes y después del tratamiento, o por un grupo y el otro; o lo que es lo mismo, que las diferencias son cero (nulas). En la hipótesis alternativa se planteará la situación opuesta, sea bilateral (las medias difieren) o unilateral (una media es mayor que la otra).

Sin embargo estos procedimientos no sólo se utilizan en experimentos, sino también en estudios que analizan datos de encuestas o de observación. Así una variable independiente puede constituirse por grupos o muestras de sujetos que conforman categorías diferentes. Varones versus mujeres, población rural versus población urbana, niños que repiten o no repiten un grado. Pueden interesar entonces, ciertas diferencias en los promedios de alguna variable entre estos grupos. ¿Tienen los mismos ingresos promedio los varones jefes de hogar que las mujeres que son jefas de hogar? ¿La proporción de analfabetos es la misma entre provincias del NOA o del Centro del país? La edad promedio de las madres primerizas que se atienden en hospitales públicos, ¿es la misma que la de quienes van a privados? Podemos comparar varones y mujeres y evaluar si hay diferencia entre el promedio de un grupo y otro en relación a la introversión, el neuroticismo o su afabilidad. También podríamos comparar personas mayores y jóvenes en relación a los promedios que obtuvieran en pruebas de inteligencia fluida o cristalizada. En estos casos, como los investigadores esperan que ciertas puntuaciones promedios sean más altas en los adultos jóvenes (inteligencia fluida) versus los promedios que pudieran obtener los mayores, probablemente más altos en los desempeños de pruebas de inteligencia cristalizada. En estos ejemplos, jefes y jefas de hogar, NOA y Centro del país, jóvenes y viejos, mujeres y varones, etc. son grupos independientes, que se diferencian por los valores de una variable (región, edad, género) y nos interesa investigar si estos agrupamientos evidencian diferencias en otras variables de interés: como los ingresos, la proporción de analfabetos, la inteligencia, la introversión.

Cuando apreciamos que las medias de dos grupos son diferentes, no podemos saber a priori si las muestras provienen de poblaciones cuyas medias son diferentes o no, porque las diferencias observadas entre los resultados muestrales pueden provenir de azar. Por eso, encontrar que $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$ (en las muestras) no conduce inmediatamente a que $\mu_1 \neq \mu_2$ (en las poblaciones).

El procedimiento para comparar los parámetros (medias o proporciones) de dos poblaciones consiste en extraer una muestra de cada población: llamaremos a los tamaños de esas muestras n_1 y n_2 . En cada muestra se calculan —como antes—, los estimadores correspondientes. Si se estima una diferencia de medias calcularemos las medias ($\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$), así como las desviaciones estándar (s_1 y s_2) de cada una. Si lo que se estima es una diferencia de proporciones, en cada muestra

se calculará la proporción de casos en la categoría de interés: $\hat{p}_1$ y $\hat{p}_2$ que son los estimadores de los parámetros P_1 y P_2 .

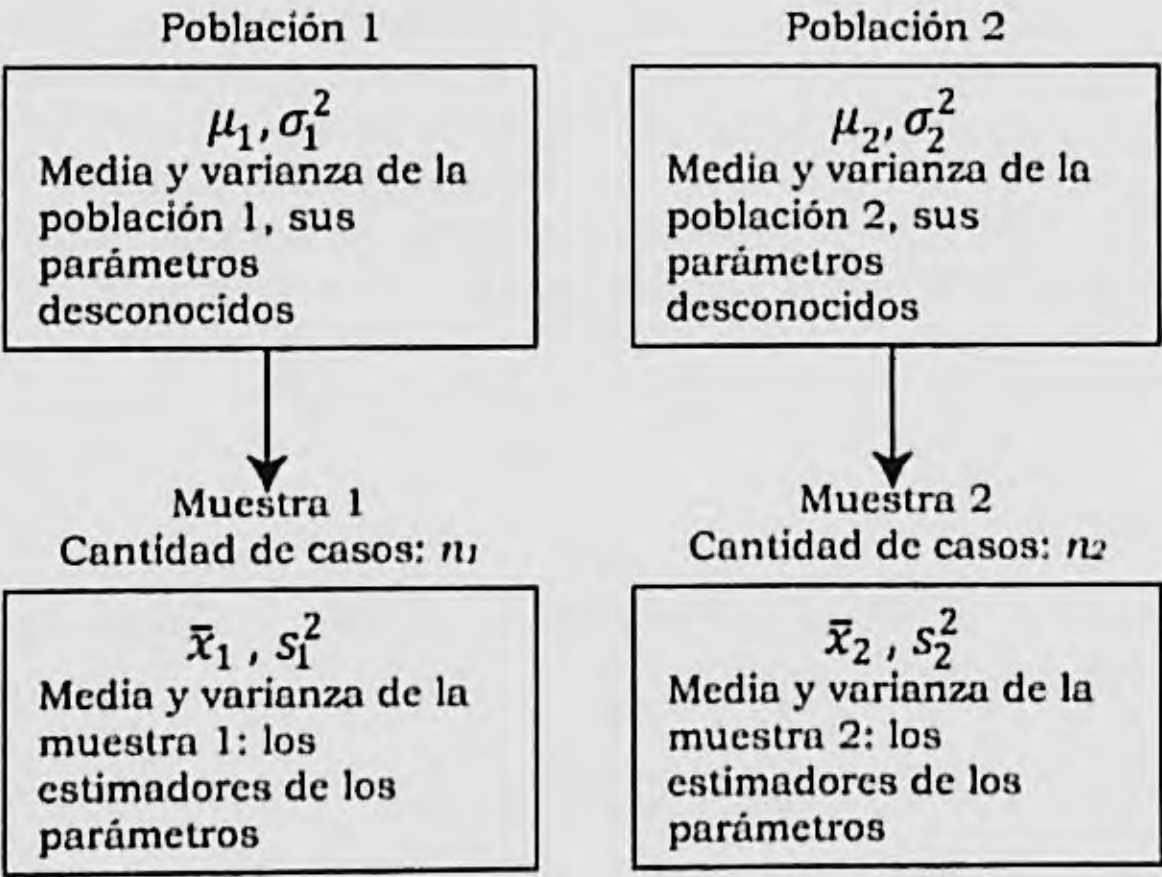
Aquellas situaciones en que no se puedan calcular medias y varianzas porque las variables son ordinales o bien no se sostengan los supuestos sobre normalidad de las distribuciones poblacionales, se aplican otro tipo de prueba de hipótesis, que serán tratados en el próximo capítulo.

Veamos en primer lugar el caso en que la variable bajo análisis es cuantitativa y entonces nos interesa comparar las medias poblacionales. El parámetro que se estima es la diferencia entre las medias poblacionales: $\mu_1 - \mu_2$, y la estimación se hace a través de la diferencia entre las medias muestrales: $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$. El error estándar de ese estimador (que será necesario para estandarizar el valor observado) va a depender del tipo de prueba de que se trate. En este capítulo trataremos dos situaciones, cuando sean muestras independientes, y muestras apareadas o dependientes.

Muestras independientes

Prueba de diferencia de medias

La comparación de las medias de dos poblaciones independientes se realiza comparando los correspondientes estimadores de las medias poblacionales, veamos el siguiente esquema para recordar la notación:



Una vez que se dispone de los datos muestrales, el estadístico de prueba toma la forma;

$$\frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}$$

Es decir, se trata de la diferencia entre la diferencia de las medias muestrales y la diferencia de las medias poblacionales, dividida por el error estándar de la

diferencia (el error estándar del estimador). La expresión mantiene la estructura que mencionamos en el capítulo anterior: estimador menos parámetro sobre el error estándar del estimador. En este caso el estimador es la diferencia de las medias muestrales y el parámetro es la diferencia de las medias poblacionales. Este estadístico de prueba tiene distribución normal si los tamaños de las muestras son suficientemente grandes (mayores a 30 casos) y tiene distribución *t de Student* si se trata de muestras pequeñas y puede además suponerse que las variables que se analizan tienen distribución normal en la población. Debido a que la distribución *t* tiende a la normal a medida que aumenta el tamaño de la muestra, y como lo hicimos antes para una sola muestra, escribiremos de manera general:

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}$$

Como sabemos, cuando las muestras sean grandes, las probabilidades asociadas al valor de *t* coincidirán con las de la distribución normal.

El denominador del estadístico de prueba puede ser calculado de dos maneras diferentes y eso va a depender de que podamos suponer que las varianzas de las dos poblaciones de las que provienen las muestras son iguales o que no sea así.

Caso 1: Varianzas poblacionales iguales $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Si puede suponerse que las varianzas poblacionales son iguales, entonces las dos varianzas que se calculan desde las muestras, constituyen dos estimadores (diferentes por azar) del mismo parámetro. Cada muestra ofrece una estimación de la varianza, que es la misma en las dos poblaciones de origen. En ese caso, calcularemos primero un promedio⁹⁹ de las dos estimaciones dadas por las varianzas muestrales, a la que llamaremos varianza combinada:

$$s_{comb}^2 = \frac{(n_1 - 1) * s_1^2 + (n_2 - 1) * s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Usando este estimador de la (supuestamente única) varianza poblacional, el estadístico de prueba asume la forma:

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{s_{comb} * \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

Cuyos grados de libertad se calculan, en función de los tamaños de las muestras como: $gl = n_1 + n_2 - 2$.

⁹⁹La fórmula de este promedio tiene en cuenta que las varianzas provienen de muestras de diferente tamaño y que los denominadores de las varianzas son $n-1$. Por eso no es simplemente la suma de ambas dividida dos. Solo en el caso que las muestras son de igual tamaño ($n_1=n_2$), se trata del promedio simple y $s_{comb}^2 = \frac{s_1^2 + s_2^2}{2}$

Caso 2: Varianzas poblacionales diferentes $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Si no es posible suponer que las varianzas de las poblaciones de donde provienen las muestras son iguales, entonces debemos usar las varianzas muestrales de manera separada. Cuando éste es el caso, el estadístico de prueba es:

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

Esta expresión es más sencilla, pero el cálculo de los grados de libertad de la distribución *t de Student* se vuelve más complejo. La fórmula para hacerlo es¹⁰⁰

$$gl = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$$

No vamos a usar esta expresión para calcular los grados de libertad, pero es la que usan los programas de análisis de datos cuando detectan que las varianzas poblacionales no son iguales.

De acuerdo a esto, cuando vamos a hacer una prueba *t* para comparar las medias de dos grupos debemos antes saber si estamos ante el caso 1 ó el caso 2; lo que significa que deberemos antes decidir si las varianzas de las dos poblaciones pueden considerarse iguales o no. Dado que no conocemos estas varianzas poblacionales, la decisión se toma a partir de los datos muestrales, es decir, a partir de las varianzas halladas en las muestras (s_1^2 y s_2^2). Se realiza una prueba, cuya hipótesis nula afirma que las varianzas poblacionales son iguales y su resultado permitirá decidir, a un determinado nivel de significación, si puede tratarse a las varianzas poblacionales como iguales o si debe considerárselas diferentes, la prueba se llama prueba de homogeneidad de varianzas¹⁰¹ y tiene las siguientes hipótesis.

$$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$$
$$H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$$

El estadístico de prueba es el cociente de las varianzas muestrales:

$$\frac{s_1^2}{s_2^2}$$

Y tiene una distribución *F* con $n_1 - 1$ grados de libertad en el numerador y $n_2 - 1$ grados de libertad en el denominador.

¹⁰⁰Esta expresión se conoce como la ecuación de Welch-Satterthwaite y fue desarrollada en el campo de la teoría de errores, los programas de análisis de datos la aplican de manera automática cuando las varianzas son diferentes a cierto nivel de significación.

¹⁰¹ Se llama homogeneidad aquello que coloquialmente podría expresarse como "suficientemente parecidas como para tratarlas como iguales".

Ejemplo (datos ficticios): nos preguntamos si, para una carrera universitaria dada, el tiempo que tardan en completar sus estudios los estudiantes que trabajan y los que no trabajan es el mismo o si difiere. Para ello tomamos una muestra de 100 alumnos que trabajan y obtenemos una media de duración de la carrera de 6,7 años y una desviación estándar de 1,2 años. Extraemos otra muestra, de 150 casos de estudiantes que no trabajan, en la que obtenemos un promedio de los años de duración de 6,3 con una desviación estándar de 1,5 años. Todos estos datos provienen de la información descriptiva que proveen las muestras, son los que vamos a usar para hacer la inferencia acerca de las poblaciones, constituidas por el total de alumnos que trabajan y que no trabajan. Como antes, la hipótesis nula es la del “no cambio”, la que afirma que no hay diferencia, por lo que:

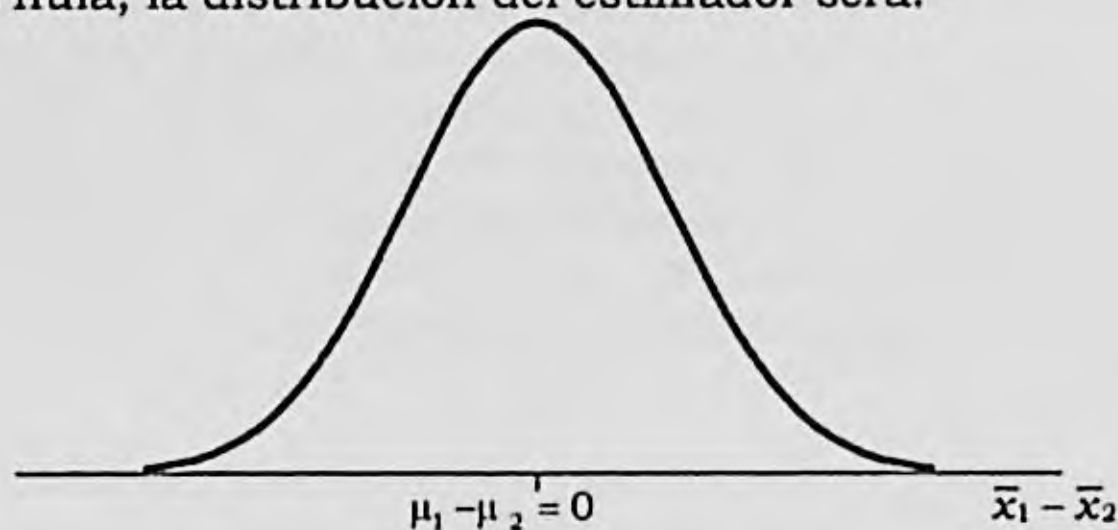
$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$$

Que dice que la diferencia entre las medias poblacionales es cero (es nula). Hemos dicho que nuestro interés está en saber si las medias poblacionales son iguales o si difieren, por lo que se trata de una prueba bilateral, entonces la hipótesis alternativa indicará que:

$$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

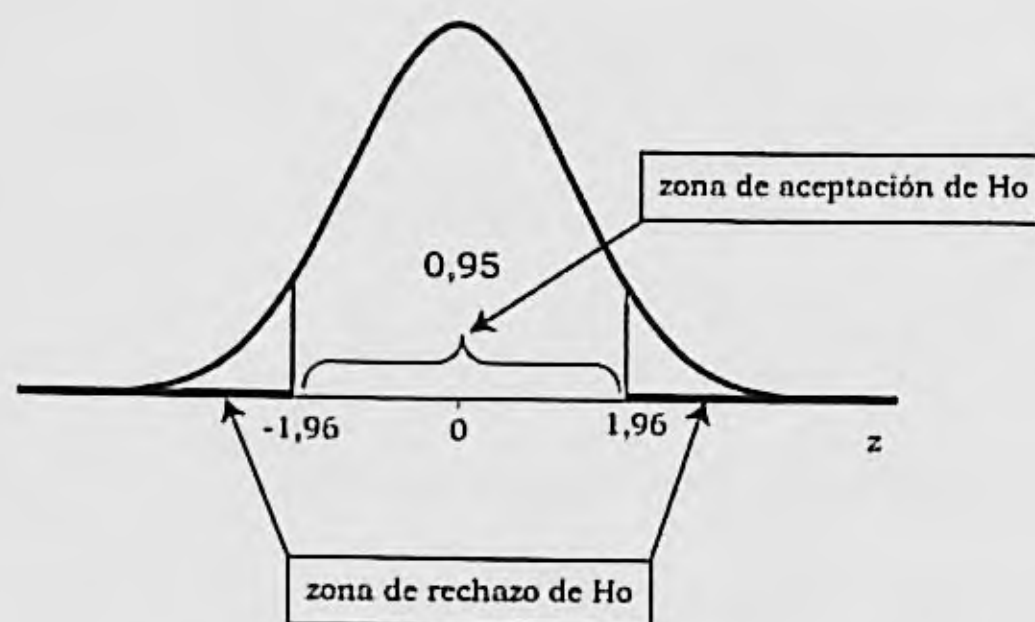
Para la presentación continuaremos usando la distribución normal, ya que resulta más familiar, pero los paquetes de análisis de datos usan directamente distribuciones t .

Bajo la hipótesis nula, la distribución del estimador será:



Para decirlo nuevamente, la variable aleatoria es la diferencia de medias muestrales, el centro de la distribución es el parámetro, que según la hipótesis nula es cero.

Fijamos el nivel de significación de la prueba en el 5% y los puntos críticos resultan, sobre la distribución normal estándar $\pm 1,96$, gráficamente:



Ahora transformamos a puntaje z los valores observados en las muestras. Recordemos para ello que el puntaje z se define como la diferencia entre el estimador y el parámetro, dividida por el error estándar del estimador. Para esta prueba, el parámetro es la diferencia de medias poblacionales, su estimador es la diferencia de medias muestrales, con lo que:

$$z_{obs} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}$$

Y queda por decidir cómo calcular el denominador, lo que va a depender de que puedan o no suponerse iguales las varianzas poblacionales. Para decidirlo, se realiza la prueba de homogeneidad de varianzas:

$$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$$

$$H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$$

El estadístico de prueba es

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{1,2^2}{1,5^2} = 0,64$$

Con Infostat® se busca la probabilidad asociada a un valor como el observado o mayor, bajo un modelo $F_{n_1-1, n_2-1} = F_{99, 149}$, que resulta 0,99. Este es un valor p , por lo que debe interpretarse como la probabilidad de hallar un cociente entre las varianzas muestrales como el observado o más extremo, si las varianzas poblacionales fueran iguales. Dado que es un número muy alto, no se rechaza la hipótesis nula, y se concluye que las varianzas pueden suponerse iguales. Se trata entonces de lo que se ha llamado “caso 1” y, para el denominador del estadístico de prueba, se calcula la varianza combinada¹⁰²:

¹⁰² Cuando se solicita a InfoStat®, automáticamente (a menos que pidamos lo contrario) se verifica si puede suponerse que las varianzas poblacionales son iguales o no y, en base al resultado de esa verificación, se calcula el error estándar de la diferencia con una fórmula o con otra.

$$s_{comb}^2 = \frac{(n_1 - 1) * s_1^2 + (n_2 - 1) * s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Con los datos del ejemplo, la varianza combinada es:

$$s_{comb}^2 = \frac{(100 - 1) * 1,2^2 + (150 - 1) * 1,5^2}{100 + 150 - 2} = \frac{477,81}{249} = 1,92$$

por lo que la desviación estándar combinada resulta:

$$s_{comb} = \sqrt{1,92} = 1,38$$

Como la hipótesis nula establece que la diferencia de medias poblacionales es cero $\mu_1 - \mu_2 = 0$, entonces, el estadístico de prueba queda:

$$z = \frac{(6,7 - 6,3) - 0}{1,38 * \sqrt{\frac{1}{100} + \frac{1}{150}}} = \frac{0,4}{0,18} = 2,22$$

Este es el estadístico de prueba correspondiente a la diferencia de medias para muestras independientes cuando las varianzas poblacionales pueden suponerse iguales. Este valor de z (2,22) se encuentra en la zona de rechazo de H_0 , por lo que la decisión será la de rechazar H_0 y concluir que el tiempo que tardan en terminar la carrera los alumnos que trabajan difiere significativamente del que tardan los que no trabajan. Dicho de otro modo: la diferencia observada en las medias de las muestras es significativa a un nivel del 5%.

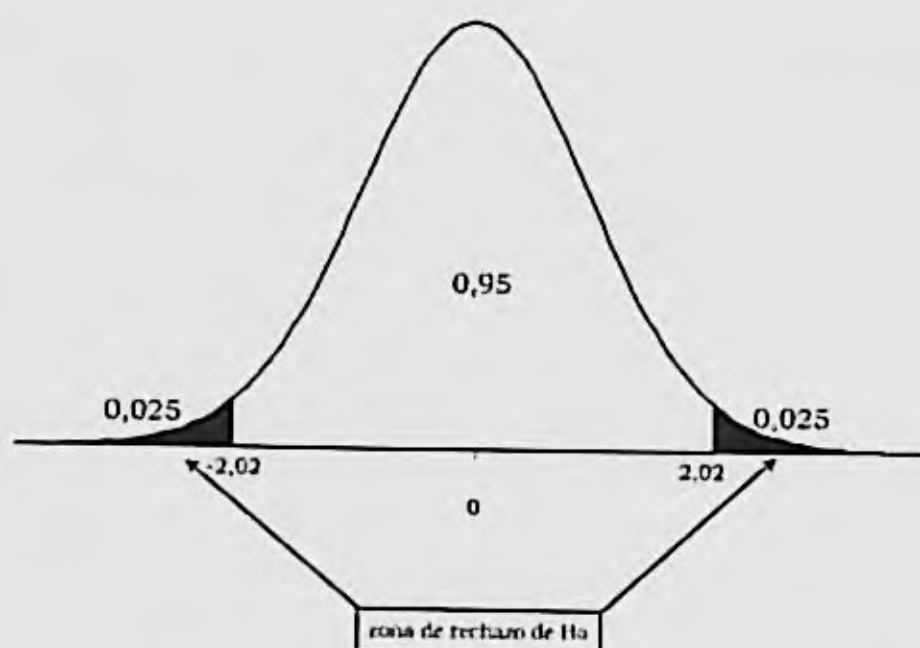
Si los mismos resultados se hubiesen hallado en muestras más pequeñas, por ejemplo de 20 y 25 casos de estudiantes que trabajan y no trabajan respectivamente, y además hubiésemos podido suponer que las dos poblaciones son normales en la variable *duración de la carrera*; entonces habría correspondido usar una prueba t^{103} . La prueba de homogeneidad de varianzas da, con esos nuevos tamaños de muestra, $p = 0,16$. Un valor que también es elevado, por lo que se puede tratar a las varianzas como iguales.

Los grados de libertad de la distribución t se calculan sumando los tamaños de muestra y restando dos:

$$gl = n_1 + n_2 - 2 = 20 + 25 - 2 = 43$$

Con 43 grados de libertad, los valores t que delimitan un 5% extremo en la distribución de probabilidades son $\pm 2,02$, que gráficamente se representan así:

¹⁰³Recordemos que la distribución normal vale para muestras grandes, por el Teorema Central del Límite.



Para tomar la decisión calculamos el estadístico de prueba con el mismo procedimiento anterior, para lo que es necesario contar primero con la desviación estándar combinada. Calculamos primero la varianza combinada:

$$s_{comb}^2 = \frac{(20 - 1) * 1,2^2 + (25 - 1) * 1,5^2}{20 + 25 - 2} = \frac{81,36}{43} = 1,89$$

Y la desviación estándar combinada es:

$$s_{comb} = \sqrt{1,89} = 1,37$$

por lo que el estadístico de prueba resulta:

$$t = \frac{(6,7 - 6,3) - 0}{1,37 * \sqrt{\frac{1}{20} + \frac{1}{25}}} = \frac{0,4}{0,41} = 0,97$$

Este valor no se ubica en la zona de rechazo de H_0 , por lo que la conclusión será en este caso que no hay evidencia para creer que el tiempo promedio que tardan en terminar la carrera los alumnos que trabajan sea diferente que el que tardan quienes no trabajan.

La comparación de las conclusiones de estos dos ejemplos muestra algo muy importante: una misma diferencia absoluta de 0,4 años en los promedios muestrales de los grupos, es significativa cuando proviene de muestras grandes (100 y 150 casos) y deja de serlo cuando se obtiene en muestras pequeñas (20 y 25 casos). El tamaño de las muestras incide en la potencia de la prueba, que es su capacidad para detectar diferencias.

Por las razones que ya hemos mencionado, en el cálculo informatizado del estadístico de prueba no se distingue entre utilizar distribución normal (z) para muestras grandes y t de Student para muestras chicas, como acabamos de hacer en los ejemplos anteriores. Por el contrario, se usa siempre distribución t^{104} . Así, esta prueba se conoce como *prueba t de diferencia de medias*. Es el caso del programa InfoStat® que estamos utilizando.

Ejemplo (datos reales): la salida que mostramos a continuación es una comparación de la edad promedio de los docentes varones y mujeres del nivel

¹⁰⁴Recordemos que esta distribución tiende a la normal cuando las muestras son grandes.

medio. Los datos provienen de una muestra aleatoria de 246 docentes de la ciudad de Córdoba. La hipótesis nula de esa comparación es que no hay diferencia en la edad promedio de mujeres y varones docentes del nivel medio, que se confronta con una hipótesis alternativa que afirma que sí hay diferencia. Se trata de una prueba bilateral que se expresa así:

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$$
$$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

Donde los subíndices 1 y 2 se refieren a los grupos formados por docentes mujeres y varones respectivamente. En el video *prueba t dos muestras independientes*, se ve como pedir a Infostat® la realización de esta prueba, la salida es:

Prueba T para muestras Independientes

Clasific	Variable	Grupo 1	Grupo 2	n(1)	n(2)	Media(1)	Media(2)	Media(1)-Media(2)	p=Ho/Var	T	P-valor	prueba
sexo	edades	(mujer)	(varon)	180	66	38.77	41.52	-2.75	0.2122	-1.15	0.2366	Bilateral

La primera columna (Clasific) indica cuál es la variable de clasificación, es decir la que define los grupos.

Luego se especifica la variable sobre la que se hará la comparación (la edad).

Los grupos (mujeres y varones).

La cantidad de casos en cada uno de ellos (180 mujeres y 66 varones).

Las dos columnas siguientes indican las medias muestrales: la edad promedio de las mujeres de la muestra es de 38,77 años y la de los varones 41,52.

La columna siguiente se usa para probar si las varianzas de los grupos son iguales o diferentes. P(Var.Hom) es el valor p asociado a la prueba de homogeneidad de varianzas. En este caso es 0,2122, en un valor grande (mucho mayor a 0,05 que es el nivel de significación usual) por lo que no se rechaza la igualdad de las varianzas. Por lo tanto, lo que sigue de la prueba de diferencia de medias corresponde al caso 1, varianzas iguales. Esto permite decidir cuál es la fórmula para calcular el *t_{obs}*. Infostat® realiza la corrección de Welch-Satterthwaite de manera automática si comprueba que las varianzas difieren al 5%.

Luego encontramos el valor del estadístico de prueba *t*, es el *t_{obs}* para los datos del problema.

Sigue el valor de probabilidad asociado a ese *t_{obs}*, que es de 0,2366.

La última columna indica que se trata de una prueba bilateral que fue lo que solicitamos al programa.

Debido a que el valor de probabilidad es un número alto (24%), muy superior al 5% que solemos usar como criterio para rechazar *H₀*, la decisión es la de no rechazarla. Por lo que concluimos que no hay evidencia para creer que en las escuelas de nivel medio de la ciudad de Córdoba, la edad promedio de los docentes varones sea diferente de la de las mujeres.

La lateralidad de la prueba que analizamos en el capítulo anterior, sigue del mismo modo cuando trabajamos con diferencias de medias. Por ejemplo, podemos tener expectativa en que una droga que se está experimentando produzca efectos sobre la depresión, en dirección a reducir el puntaje que

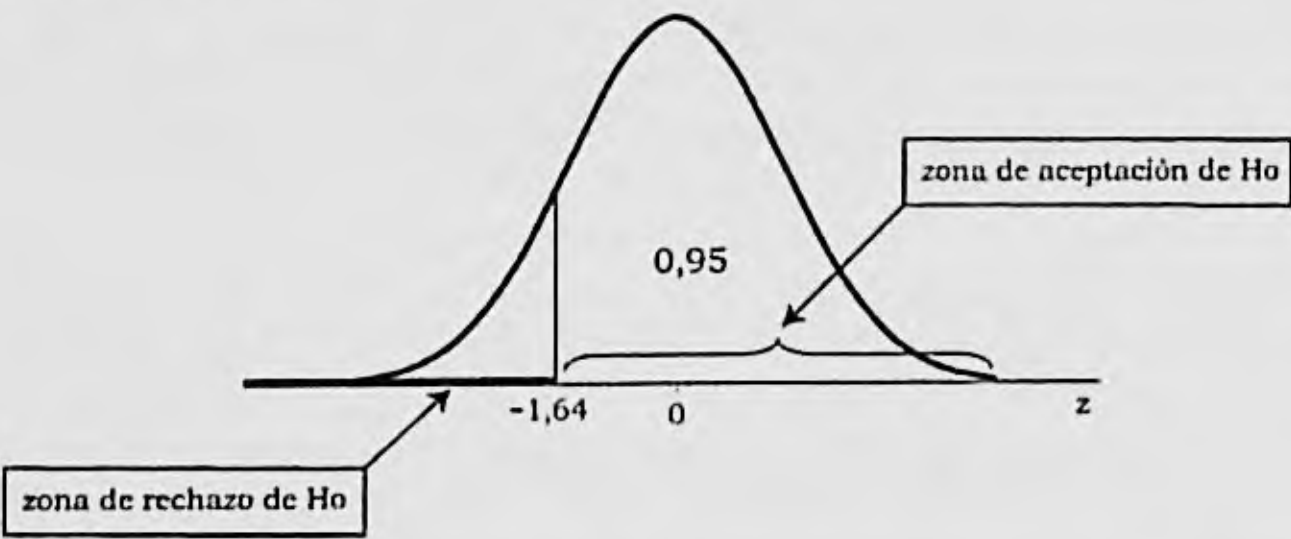
alcanzan los sujetos en un test que la evalúa. Para poner a prueba la droga será necesario diseñar un experimento, no avanzaremos en ese tema pero de manera muy simple, podemos pensar en dos grupos de pacientes depresivos a uno de los cuales se administra la droga (grupo 1) y al otro no (grupo 2)¹⁰⁵. Concluiremos que la droga tiene efectos si luego de un tiempo de su administración, el grupo de pacientes que la recibieron experimenta cambios positivos en mayor magnitud que el otro. Dicho de otro modo, habrá efectos si la media de puntaje en el test que evalúa depresión es significativamente menor en el grupo que se sometió al tratamiento. Como siempre, la hipótesis nula afirmará que no hay diferencia:

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$$

Como ahora nos interesa que el grupo 1 haya reducido su puntaje en el test de depresión, esperamos que la media del grupo 1 sea menor que la del grupo 2, lo cual se escribe:

$$H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0$$

Por la lateralidad de la prueba, solo hay una zona extrema de rechazo, la izquierda. Fijando un 5% de nivel de significación, si se tratara de muestras grandes, en las que podemos usar distribución normal, esta zona se representa del modo habitual:



Por el contrario, si se trata de muestras pequeñas, corresponde usar distribución *t*, y el punto crítico dependerá de los grados de libertad.

Ejemplo (datos ficticios): el grupo de 15 sujetos que recibió un medicamento arroja un puntaje promedio en la prueba que evalúa la depresión de 5,7 puntos, con desviación estándar de 1,1 puntos. Los 10 pacientes que no recibieron el medicamento alcanzan un puntaje promedio de 7,2 puntos, con desviación estándar de 1,6 puntos. La prueba previa sobre la homogeneidad de las varianzas indica que no puede suponerse las iguales, por lo que estamos en el caso 2. Debe utilizarse la distribución *t* con grados de libertad que deben calcularse con la expresión de Welch-Satterthwaite, el resultado¹⁰⁶ es 15. El punto crítico $t_{15; 0,05}$, es -1,76.

¹⁰⁵Se trata de una versión muy simplificada, solo para ver el uso de esta prueba. El tema se desarrolla con detalles en la materia Metodología de la Investigación Psicológica.

¹⁰⁶Redondeado al entero

El estadístico de prueba vale:

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{(5,7 - 7,2) - 0}{\sqrt{\frac{1,1^2}{15} + \frac{1,6^2}{10}}} = -2,58$$

Es un valor que se sitúa a la izquierda del punto crítico, por lo que se rechaza la H_0 y se concluye que el grupo que recibió la droga alcanzó un puntaje significativamente menor que el otro grupo.

Ejemplo (datos reales): en un estudio realizado en el Centro de Promoción del Adulto Mayor, se seleccionaron aleatoriamente entre todos los asistentes, a 503 personas mayores de 50 años. Entre otras preguntas, se computó el número de hijos de cada uno de ellos.

Se conformaron dos grupos con los sujetos estudiados, quienes tenían hasta 65 años en el momento del estudio y quienes tenían 66 o más años. En este ejemplo, estos dos grupos, si bien no fueron asignados de manera aleatoria, se comportarían como muestras independientes.

Podríamos suponer que las personas de mayor edad tendrían más hijos, dadas ciertas razones históricas, religiosas y culturales que habitualmente inciden en el control de la natalidad. Esta hipótesis está basada también en el conocimiento demográfico; sabemos que las tasas de fecundidad en nuestro país han venido descendiendo desde hace varias décadas. Sostenemos así que los que conforman el grupo de 66 años y más tendrán más hijos que los de 65 años o menos, con lo que se trata de una prueba unilateral. Si llamamos 1 al grupo de los de hasta 65 años y 2 al de quienes tienen 66 ó más, las hipótesis se expresan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} H_0: \mu_1 - \mu_2 &= 0 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 &< 0 \end{aligned}$$

Los resultados descriptivos de los dos grupos se muestran a continuación:

Estadística descriptiva

edadcod	Variable	n	Media	D.E.
1,00	hijos	243	2,49	1,44
2,00	hijos	260	2,61	1,38

El nombre de la variable edadcod, corresponde a los grupos 1, hasta 65 años y 2, de 66 ó más. Los grupos tienen 243 y 260 personas respectivamente.

Vemos que hay diferencia en el número de hijos promedio de los dos grupos. Los del segundo grupo (66 o más) tienen en promedio 0,12 hijos más que los del otro grupo. Ahora bien, dadas estas diferencias entre las medias encontradas, nos interesa determinar si se deben al azar o bien si tienen una magnitud tal que representen una diferencia que pueda atribuirse a la diferencia de edad de los sujetos de los dos grupos.

Planteamos una prueba t para muestras independientes, fijamos el nivel de significación en 5% y hallamos que el valor crítico de t con 501 grados de libertad $(243+260-2)$ es -1,65 (como habíamos señalado, cuando los grados de libertad

son elevados, casi no hay diferencia entre una distribución t y una normal). La región de rechazo está conformada por todos los valores de t que sean inferiores a -1,65.

InfoStat® presenta la salida de esta prueba de la siguiente manera:

Prueba T para muestras Independientes

Clasific	Variable	Grupo 1	Grupo 2	n(1)	n(2)	Media(1)	Media(2)	pHomVar	T	p-valor	prueba
edadcod	hijos	{1.00}	{2.00}	243	260	2.49	2.61	0.5191	-0.94	0.1747	Unilateral

Que muestra: la variable que clasifica (edadcod), la que se analiza (hijos), los nombres de los dos grupos (1 y 2), los tamaños de muestra en cada grupo (243 y 260), las medias (2,49 y 2,61), el valor p para la prueba de homogeneidad de varianzas (0,5191), el valor del estadístico de prueba ($t=-0,94$), el valor de probabilidad asociado a la prueba y el tipo de prueba, unilateral en este caso.

La prueba preliminar de homogeneidad de varianzas da un valor p de 0,5191, por lo que no se rechaza la hipótesis nula de esa prueba: las varianzas no difieren significativamente. Por lo tanto, la prueba de diferencia de medias se hace considerando varianzas iguales y los grados de libertad se calculan directamente como $n_1 + n_2 - 2$.

El t_{obs} de la prueba es -0,94, que se ubica en la zona de no rechazo (la zona de rechazo es la que queda por debajo de -1,65). Con ese resultado ya estamos en condiciones de concluir sobre la prueba: no se rechaza H_0 , las medias no difieren de manera significativa, no hay diferencia en el número de hijos entre los grupos conformados.

Si no hubiésemos calculado previamente el punto crítico, podemos llegar a esta conclusión a partir del valor p , que en este caso es 0,1747 y representa la probabilidad de haber hallado esa diferencia o una mayor, por puro azar. Este es el valor que, como sabemos, se juzga en comparación con el nivel de significación, por ser mayor a 0,05 que habíamos establecido, decidimos no rechazar la H_0 . Cuanto más pequeña sea esta probabilidad, tanta más evidencia habrá para rechazar H_0 , en este caso la consideramos grande y no rechazamos. La lectura del valor p es, en este caso “si el número promedio de hijos de los dos grupos fuera el mismo, la probabilidad de haber encontrado entre dos muestras de tamaños 243 y 260, una diferencia de 0,12 ó superior, es de 0,1747”. Brevemente:

$$P((\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < -0,12)/(\mu_1 - \mu_2 = 0)) = 0,1747$$

Prueba de diferencia de proporciones

Compararemos ahora dos muestras en cuanto a la proporción de casos que hay en una categoría de una variable que puede ser nominal o también de un nivel superior¹⁰⁷. Aunque en los programas de análisis de datos este procedimiento se

¹⁰⁷Aunque la prueba se usa principalmente para comparar variables nominales, no hay inconveniente en usarla con variables métricas, definiendo con precisión qué se compara. Por ejemplo, si la variable es la edad, podemos comparar la proporción de personas mayores de 65 años en dos muestras. Todos los mayores de 65 constituyen una categoría y el resto la otra. En ese caso decimos que hemos “dicotomizado” una variable métrica, la hemos transformado en una variable con dos categorías: *mayores de 65* y *65 o menos*. De mismo modo que se definen como promocionados, los alumnos con notas 7 o mayores.

realiza también solicitando *prueba t*, esto sólo está autorizado si se trabaja con muestras grandes.

De manera muy similar a la prueba de diferencia de medias, la H_0 afirma que no hay diferencia entre las proporciones de las dos poblaciones, por lo que tiene la forma:

$$H_0: P_1 - P_2 = 0$$

Mientras que la H_1 puede indicar que las proporciones solo difieren:

$$H_1: P_1 - P_2 \neq 0$$

Cuando la prueba es bilateral o bien, si es unilateral derecha:

$$H_1: P_1 - P_2 > 0$$

O izquierda:

$$H_1: P_1 - P_2 < 0$$

Dado que solo trabajaremos con muestras grandes al analizar la diferencia de proporciones, solo usaremos la distribución normal. El estadístico de prueba tiene forma similar al que usamos en la prueba de la proporción para una sola muestra, solo que ahora hay que hacer participar los datos que provienen de dos muestras. Así resulta:

$$z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (P_1 - P_2)}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1 \cdot (1 - \hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2 \cdot (1 - \hat{p}_2)}{n_2}}}$$

Donde $\hat{p}_1$ y $\hat{p}_2$ son los estimadores de P_1 y P_2 respectivamente. A diferencia de la prueba sobre una sola proporción, ahora no se cuenta con valores poblacionales de P_1 ni de P_2 , ya que la H_0 solo enuncia que son iguales. Por eso ahora, el error estándar del estimador (el denominador del estadístico de prueba) se calcula en base a las proporciones muestrales.

Ejemplo (datos ficticios): se dispone de datos de la proporción de aplazos sobre el total de materias rendidas que tienen varones y mujeres estudiantes de una carrera universitaria. En una muestra de 200 mujeres hay un 15% de aplazos, mientras que entre los 150 varones que componen la otra parte de la muestra, el porcentaje es del 17%. Nos preguntamos si se trata de una diferencia significativa o si puede explicarse por la variabilidad propia de los datos. Así, las hipótesis de la prueba serán:

$$H_0: P_1 - P_2 = 0$$

$$H_1: P_1 - P_2 \neq 0$$

Es decir que la hipótesis nula afirma que la diferencia en la proporción de aplazos entre varones y mujeres es cero en la población, y la hipótesis alternativa, dice que esa diferencia es diferente de cero.

Fijamos el nivel de significación en el 5% y, por tratarse de una prueba bilateral, los puntos críticos son $\pm 1,96$.

A continuación calculamos el estadístico de prueba, que resulta:

$$z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (P_1 - P_2)}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1 \cdot (1 - \hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2 \cdot (1 - \hat{p}_2)}{n_2}}} = \frac{(0,15 - 0,17) - 0}{\sqrt{\frac{0,15 \cdot (1 - 0,15)}{200} + \frac{0,17 \cdot (1 - 0,17)}{150}}} = -0,50$$

Es un valor que no se ubica en la zona de rechazo, por lo que la decisión es la de aceptar H_0 y concluir que no hay evidencia para creer que la proporción de aplazos entre mujeres y varones sea diferente.

Muestras apareadas

Esta prueba es útil cuando se buscan diferencias que puedan haber aparecido en sujetos individuales. La prueba se llama así porque las diferencias se consideran en pares o en parejas. En lugar de comparar muestras provenientes de dos poblaciones independientes, compararemos unidades de análisis consigo mismas, en dos momentos distintos. Ejemplo típico de este uso lo constituyen las pruebas en las que se compara una situación “antes y después”. Así, cuando cierta característica de los sujetos experimentales se evalúa antes de un tratamiento y se vuelve a medir luego del tratamiento, interesa conocer en qué medida se han producido cambios *individuales*. Observamos a cada individuo en dos momentos y comparamos las dos observaciones (mediciones). En el contexto del diseño experimental, la medición en el momento inicial se llama *pretest* y la posterior *postest*.

Pero no es el único ámbito en que se usa, cuando se comparan los logros que los alumnos alcanzan luego de una determinada experiencia pedagógica, es valioso poder comparar el “estado inicial” (anterior a la intervención) con el “estado final” (posterior) de cada individuo, o cuánto aprendieron o si se modificó determinada conducta. Esta prueba pone el acento en los cambios sucedidos en cada sujeto y no en las diferencias entre sujetos. Cuando interesa conocer la diferencia de presión arterial a la mañana y al atardecer, corresponde medir la presión arterial de cada persona en los dos horarios y comparar uno a uno. Por cierto, luego los resultados se agregan, pero las diferencias se miden sujeto a sujeto.

No hay cambio conceptual en el planteo de las hipótesis: la H_0 afirma que no hay diferencia entre las dos mediciones (o entre las mediciones hechas en momentos distintos) y la H_1 podrá ser unilateral o bilateral. Sin embargo cambiamos levemente la notación, porque vamos a resumir la diferencia en la letra $\bar{D}$ (por media de diferencias) y equivale a $\mu_1 - \mu_2$. El objetivo de este cambio es poner el acento en que no tratamos con dos poblaciones independientes (una representada por μ_1 y la otra por μ_2) sino con las diferencias entre dos mediciones. $\bar{D}$ es un parámetro y es sobre $\bar{D}$ que formulamos ahora las hipótesis:

$$H_0: \bar{D} = 0$$

La hipótesis alternativa puede ser bilateral

$$H_1: \bar{D} \neq 0$$

Unilateral derecha

$$H_1: \bar{D} > 0$$

O bien unilateral izquierda

$$H_1: \bar{D} < 0$$

El estimador de $\bar{D}$ se llamará $\bar{d}$ y es la media de las diferencias individuales, que tiene distribución *t de Student* con $n-1$ grados de libertad. Como se trata de una sola variable, el estadístico de prueba es semejante al que usábamos para una sola muestra, porque resume las diferencias para cada caso:

$$t = \frac{\bar{d} - \bar{D}}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{d}}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}}$$

La última igualdad se debe a que, bajo la H_0 , $\bar{D} = 0$.

s_d es la desviación estándar de la variable d , que mide las diferencias individuales.

Ejemplo (parcial¹⁰⁸): se busca detectar el eventual efecto que tendría una intervención terapéutica sobre el bienestar de pacientes diagnosticados de depresión. Disponemos de un test que nos permite evaluar el bienestar de los pacientes con nivel cuantitativo, en una escala que va de 0 (mínimo bienestar) a 10 (máximo bienestar). Para evaluar la terapia, nos interesamos por los cambios que suceden en el bienestar de los pacientes entre el momento previo y el posterior a la misma. Hacemos esto por medio de la aplicación del test a una muestra de 7 pacientes diagnosticados de depresión, en dos momentos: antes de la terapia y al cabo de ella.

Esperamos que la terapia tenga por efecto el de aumentar el bienestar de los sujetos que la reciben, dicho de otro modo, esperamos cambios positivos en el puntaje del test. Las hipótesis son entonces:

$$H_0: \bar{D} = 0$$

$$H_1: \bar{D} > 0$$

Fijado el nivel de significación en el 5% y suponiendo que la variable se distribuye de manera normal en la población, el punto crítico de la distribución *t* con 6 grados de libertad, de una cola derecha es $t_c = +1,943$.

¹⁰⁸ Es un ejemplo incompleto porque no hay grupo control, por lo que no es seguro que los cambios observados se deban a la intervención terapéutica o a otros factores.

Los siguientes son los datos recogidos:

sujeto	antes x_1	después x_2	diferencia d_i
1	5	7	2
2	4	7	3
3	6	6	0
4	3	5	2
5	4	5	1
6	5	6	1
7	7	7	0

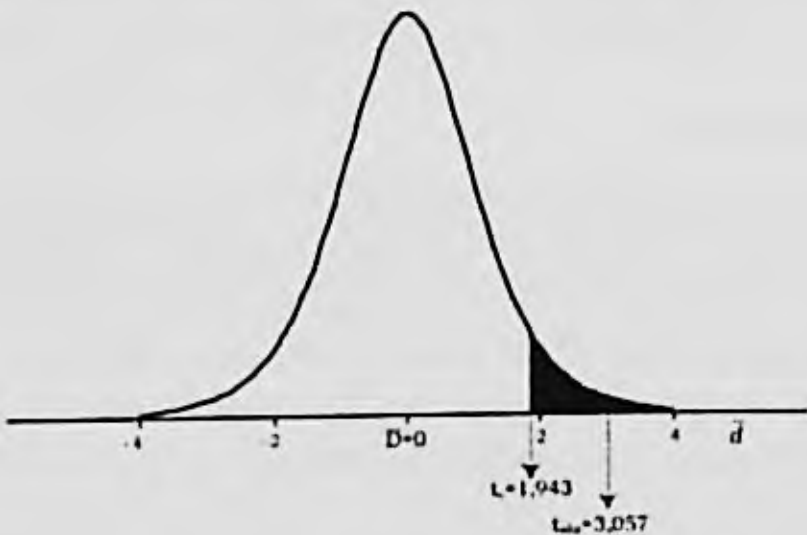
Esta tabla indica, para cada individuo, el puntaje que obtuvo en la prueba que mide bienestar tomada antes de la terapia (x_1) y en la tomada después (x_2). Además, las diferencias para cada sujeto, que es la resta de la segunda menos la primera, a esas diferencias las llamamos d_i , el subíndice i se refiere a cada sujeto y va desde 1 hasta 7.

La hipótesis nula de la prueba es que no hay diferencia en las dos mediciones, es decir que no hay efectos de la terapia, que el bienestar de los sujetos luego del tratamiento es igual que antes de él. El cambio respecto de las pruebas para muestras independientes es que ahora pasamos a trabajar con d como variable, sus medidas descriptivas son; la media de las d_i , $\bar{d} = 1,286$, y desviación estándar, $s_d = 1,113$.

Con esa información se llega al estadístico de prueba:

$$t_{obs} = \frac{\bar{d}}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}} = \frac{1,286}{\frac{1,113}{\sqrt{7}}} = 3,057$$

Por ser mayor que el punto crítico ($t_{obs} > t_c$), está en la zona de rechazo de H_0 , y se concluye que hay evidencia para considerar que los puntajes en el test de bienestar son mayores luego de la terapia. La siguiente es la representación gráfica de este resultado.



El video *prueba t muestras apareadas* indica como pedir esta prueba a InfoStat®; el resultado se muestra así:

Prueba T (muestras apareadas)

Obs(1)	Obs(2)	N	media(dif)	DE(dif)	T	p(Unilateral D)
x2	x1	7	1.29	1.11	3.06	0.0112

En la última columna, que dice "P(Unilateral D)" que es el tipo de prueba que se pidió, agrega el valor de probabilidad de ese t , que vale 0,0112. Es una probabilidad pequeña (menos del 0,05) que confirma el rechazo de H_0 .

Ejemplo (datos reales): un estudio que se llevó a cabo con personas mayores que asisten a centros de día, programas universitarios y centros de jubilados. Los participantes de este estudio manifestaban quejas de atención y memoria, sobre todo a corto plazo. Las quejas están centradas en cierta falta de competencia en tareas domésticas: pérdida de llaves, dejar una hornalla prendida o ciertas ejecuciones cotidianas afectadas por un declive normal del funcionamiento cognitivo. Todos los sujetos fueron entrenados en destrezas básicas asociadas a la mejora de estas habilidades cognitivas, durante 12 sesiones grupales de dos horas duración, con una frecuencia semanal. Basado en la teoría del procesamiento de la información, los alumnos mayores aprenden ciertas técnicas que les permiten controlar los automatismos motores, ser más detallistas, prestar más atención a información que se les escapa, y a través de la imaginación, del uso del lenguaje y de diversas técnicas, aprenden a mejorar su capacidad asociativa. Esta actividad se denomina "taller de memoria".

Los sujetos fueron evaluados con pruebas neuropsicológicas que valoran las habilidades entrenadas, al inicio y finalizada la intervención.

Una de las pruebas toma en cuenta los puntajes de una prueba de asociación entre caras y nombres, que consiste en presentar a las personas fotos y sus correspondientes nombres y apellidos. Luego de un tiempo, en el que deben aprenderse las caras con sus correspondientes nombres, se les presentan sólo las fotos y ellos deben completar los nombres y apellidos. Se le asigna un punto por cada nombre y por cada apellido correcto, sin descontar puntos si obtuvieron errores. La hipótesis nula dirá que no hay diferencia entre los puntajes obtenidos antes y después de la intervención, mientras que la hipótesis alternativa afirmará que sí hay diferencia (sin especificar la dirección de la diferencia). Tomados los puntajes de 401 sujetos, solicitamos a InfoStat® una prueba t apareada, bilateral y la salida es:

Prueba T (muestras apareadas)

Obs(1)	Obs(2)	N	media(dif)	DE(dif)	T	Bilateral
nomcarpr	nomcarpo	401	-0.22	3.59	-1.25	0.2112

Las variables se llaman nomcarpr (nombres y caras pretest) y nomcarpo (nombres y caras posttest). También se puede pedir en las opciones que muestre las medias de las pruebas antes y después, y la salida queda:

Obs(1)	Obs(2)	N	media(dif)	Media(1)	Media(2)	DE(dif)	T	Bilateral
nomcarpr	nomcarpo	401	-0.22	23.36	23.58	3.59	-1.25	0.2112

Las medias difieren poco: de 23,36, el puntaje sube a 23,58. Esa apreciación intuitiva sobre la pequeñez de la diferencia es confirmada por el valor de probabilidad (bajo el rótulo Bilateral), que es alto (21%), más grande que el 5 y

que el 10%. Como resultado, no se rechaza la H_0 y consideraremos que los puntajes no han cambiado. El entrenamiento no ha tenido efectos significativos en esta habilidad tan compleja, como la de relacionar caras y nombres.

Ejemplo (datos reales): aplicada sobre la misma muestra de adultos mayores, es una prueba de atención que consiste en marcar en medio de una sopa de letras, sólo las letras zetas, en 30 segundos. Por cada acierto se le asigna un punto, sin descontar cuando cometen errores. Formularemos la prueba de modo unilateral, con la expectativa de hallar un aumento en el puntaje de atención; esperamos que el puntaje posterior sea mayor que el previo, por lo que la diferencia de la segunda medición menos la primera dará positiva, luego $H_1: \bar{D} > 0$, es una prueba unilateral derecha. Aplicada sobre 397 casos¹⁰⁹, la prueba da como resultado:

Prueba T (muestras apareadas)

Obs(1)	Obs(2)	N	media(dif)	Media(1)	Media(2)	DE(dif)	T	p(Unilateral D)
atenpos	atenpre	397	5.19	23.04	17.85	7.38	14.00	<0.0001

Los nombres de las variables son atenpre (atención pretest, *Obs(2)*) y atenpos (atención posttest, *Obs(1)*)¹¹⁰. La primera lectura muestra que las medias son apreciablemente diferentes, el puntaje cambió de 17,85 a 23,04, es decir un aumento de 5,19 puntos, que juzgaríamos como elevado. En efecto, el valor de probabilidad de la última columna (*p(unilateral D)*) indica que, si en la población al diferencia fuese nula, la probabilidad de haber hallado esta diferencia solo por azar es menor a 1 en 10.000, lo que nos lleva a rechazar la H_0 y concluir que los puntajes efectivamente se incrementan luego del entrenamiento.

Coefficiente r de Pearson

En el análisis de relaciones entre variables a partir de datos de muestras, se han calculado coeficientes para medir el grado (o intensidad) de la asociación. Luego de haber visto los procedimientos de inferencia, corresponde generalizar las conclusiones obtenidas en estos análisis a toda la población de referencia. Ahora se dispone de las herramientas necesarias para hacer esa generalización. Para el coeficiente *r de Pearson* la lógica para la prueba de hipótesis es la que ya conocemos, solo cambia la forma de calcular el estadístico de prueba. Para niveles de medición más bajos (ordinales o nominales), se usan otras pruebas, que se desarrollan en el próximo capítulo

Si ha sido obtenido en una muestra representativa, el coeficiente de correlación de Pearson allí calculado es un estimador del coeficiente de correlación poblacional, es decir que mide la intensidad de la asociación entre las variables

¹⁰⁹ El número de casos difiere porque no siempre todas las personas completan íntegramente todas las pruebas, lo que da lugar a que haya casos perdidos, sea porque solo se cuenta con la medición previa o solo con la posterior.

¹¹⁰ La que se llama *Obs(1)* es el resultado del posttest y la *Obs(2)* es el puntaje del pretest, para esta elección hay que tener en cuenta la forma en que el programa hace la resta: siempre opera como *Obs(1)-Obs(2)*, debe elegirse cómo llamar a cada una para que la resta sea en el orden adecuado. La elección se realiza en la primera ventana de la prueba, al momento de ingresar las variables, la primera que se ingresa es la que se va a llamar *Obs(1)* y la segunda *Obs(2)*.

en la población; así como $\bar{x}$ es el estimador de μ y $\hat{p}$ el estimador de P . Manteniendo la notación anterior, usaremos la letra griega ρ (rho) para referirnos al coeficiente de correlación paramétrico (o poblacional).

Si se extraen todas las muestras posibles de una población dada y en cada una se calcula r , la media de todos los coeficientes de correlación encontrados, coincide con el coeficiente de correlación paramétrico. A esa media, que no calculamos, porque no es posible extraer "todas las muestras de la población", la llamamos esperanza.

Dicho de otra manera, r es un estimador insesgado de ρ . Los escribimos: $E(r) = \rho$.

Por su parte, la varianza de r es:

$$\sigma_r^2 = \frac{1 - r^2}{n - 2}$$

Por lo que el error estándar del estimador tiene la forma:

$$\sigma_r = \sqrt{\frac{1 - r^2}{n - 2}}$$

Y, tal como sucedió con la media y la proporción, el Teorema Central del Límite indica que a medida que aumenta el tamaño de las muestras, la distribución de los r tiende a ser normal. Si podemos suponer que en la población, la variable bajo análisis tiene distribución normal, es válido usar la distribución t cuando la muestra es pequeña. Cuando aumenta el tamaño de la muestra esta distribución tiende a la normal. En consecuencia, y como sucedió con la media, usaremos distribución t de Student siempre.

Para esta prueba de hipótesis, la distribución t tiene grados de libertad que se calculan como el tamaño de la muestra menos dos:

$$gl = n - 2$$

Conociendo la distribución de probabilidades para r podemos construir el estadístico de prueba restando el estimador menos el parámetro y dividiendo por el error estándar del estimador:

$$t = \frac{r - \rho}{\sqrt{\frac{1 - r^2}{n - 2}}}$$

La hipótesis de carácter conservador (aquella que señala la no-diferencia) será la que afirme que en la población no hay relación entre las variables, por lo que si en la muestra hallamos un valor de r no nulo, habrá sido por azar. Nuevamente se trata de decidir si un valor muestral observado es evidencia suficiente para rechazar la H_0 ; a la que escribiremos:

$$H_0: \rho = 0$$

La hipótesis alternativa puede ser bilateral:

$$H_1: \rho \neq 0$$

O unilateral derecha:

$$H_1: \rho > 0$$

O unilateral izquierda:

$$H_1: \rho < 0$$

Y en todos los casos transformaremos el coeficiente r observado a puntaje t , haciendo:

$$t = \frac{r_{obs} - \rho}{\sqrt{\frac{1-r_{obs}^2}{n-2}}} = \frac{r_{obs}}{\sqrt{\frac{1-r_{obs}^2}{n-2}}}$$

La última igualdad se debe a que la hipótesis nula afirma que $\rho = 0$.

Ejemplo (datos ficticios): se observa la relación entre el tiempo que los alumnos dedicaron a preparar el examen de una materia y la calificación obtenida en ese examen, a partir de una muestra de 27 estudiantes. Se obtiene un coeficiente de correlación lineal de Pearson de $r_{obs} = +0,37$. El signo positivo de este coeficiente indica que la relación es directa, por lo que, en la muestra, los alumnos que dedican más tiempo a la preparación, tienden a tener notas más altas. El valor absoluto indica que se trata de una relación moderada entre las dos variables. Ahora nos interesa probar si este resultado es suficiente evidencia para creer que en la población, las dos variables están relacionadas, es decir, que en la población el coeficiente de correlación no es cero. La pregunta es si hemos encontrado 0,37 porque en la población las variables están correlacionadas o solo por las variaciones propias del procedimiento aleatorio de muestreo, es decir, solo por azar.

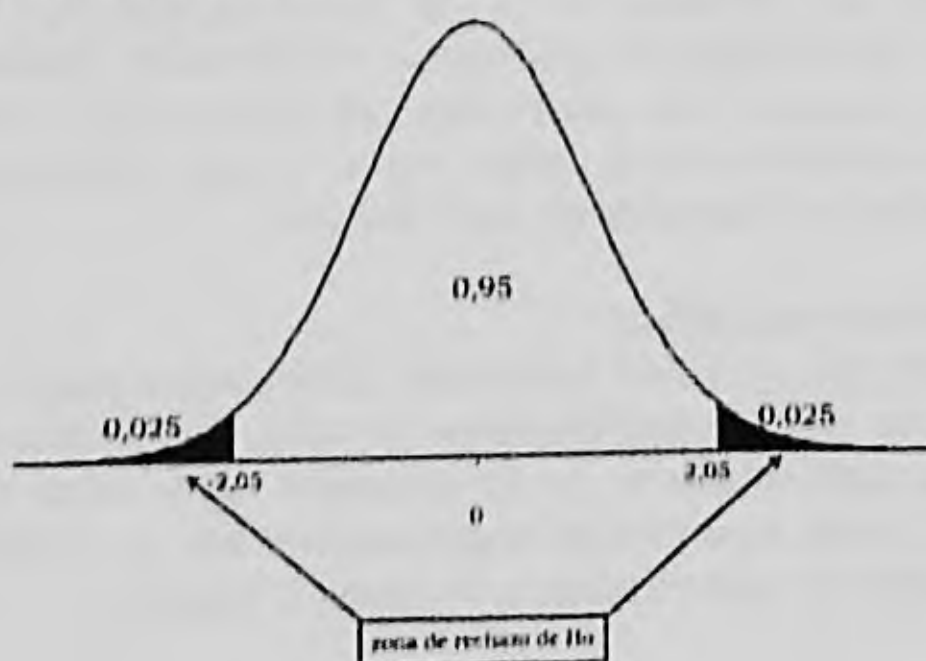
Las hipótesis correspondientes a este problema son:

$$H_0: \rho = 0$$

$$H_1: \rho \neq 0$$

Es bilateral porque nuestro interés es saber si ρ difiere de cero.

Fijamos el nivel de significación en el 5% y hallamos en una distribución t de Student con 25 grados de libertad ($n-2=27-2=25$) los valores críticos correspondientes son $\pm 2,05$, gráficamente:



El área sombreada constituye la probabilidad extrema de 0,05, repartida en dos colas de 0,025 cada una. La zona de rechazo de H_0 se constituye por el conjunto de los valores t mayores a 2,05 así como los menores a -2,05.

Ahora transformamos el valor de r obtenido a puntaje t , calculando el estadístico de prueba:

$$t = \frac{r_{obs}}{\sqrt{\frac{1-r_{obs}^2}{n-2}}} = \frac{0,37}{\sqrt{\frac{1-0,37^2}{27-2}}} = 1,99$$

Un valor que no se encuentra en la zona de rechazo, por lo que la decisión es la de aceptar H_0 y concluir que no hay suficiente evidencia para afirmar que haya una correlación lineal no nula entre el tiempo que los alumnos dedican a preparar una materia y la nota que obtienen en el examen. Diremos que el coeficiente de correlación hallado en la muestra no difiere significativamente de cero o, más simplemente, que no es significativo.

Como siempre puede hacerse en las pruebas de hipótesis, vamos a llegar a la misma conclusión calculando el *valor p* asociado al coeficiente r muestral. Se trata de encontrar la probabilidad de hallar un valor de r como el observado o uno más extremo que él, si la hipótesis nula fuera cierta. Como la prueba es bilateral debemos tratar a la expresión “más extremo” como incluyendo dos posibilidades, que r sea mayor que el observado o menor que su opuesto, por lo que la probabilidad que buscamos se escribe:

$$P(r < -r_{obs} \cup r > r_{obs} / H_0 \text{ es verdadera}) = P(r < -0,37 \cup r > 0,37 / \rho = 0)$$

Que se lee como “la probabilidad que r sea menor que el opuesto al valor observado o mayor que el valor observado, dado que la hipótesis nula es verdadera”

Usando el estadístico de prueba, transformamos los dos valores de r_{obs} en puntajes t y entonces esa probabilidad, expresada en términos de t , nos queda:

$$P(t < -1,99 \cup t > 1,99)$$

En la que no incluimos la condición que H_0 sea verdadera ($\rho = 0$) porque está implícita en la distribución t de r . Cuando la solicitamos a InfoStat®, esa probabilidad nos da 0,0568. Debido a que es mayor a nuestro nivel de significación ($\alpha = 0,05$), la decisión es la de no rechazar H_0 . La lectura de este valor p es “si en la población no existiera correlación entre las variables, la probabilidad de haber hallado un valor como el observado o más extremo que él sería de 0,0569. Consideramos a este valor como elevado, por lo que no rechazamos la hipótesis de ausencia de correlación”.

Dos consecuencias de este resultado:

Primera: un coeficiente que, a nivel muestral habríamos juzgado como moderado no puede generalizarse como significativo a toda la población. Esto se debe principalmente al reducido tamaño de la muestra. Así, para que este valor de r hubiese representado una asociación significativa en la población, habría sido necesario que proviniese de una muestra de mayor tamaño.

Segunda: el valor de t_{obs} es cercano al punto crítico (1,99 frente a 2,05), de modo que es poco lo que le falta para que la hipótesis sea rechazada. En el procedimiento a través del valor p , eso equivale a que dicho valor de probabilidad apenas supera al nivel de significación establecido: 5,6% frente a 5%. Aun así, nuestro criterio fijado a priori indica que no debemos rechazar H_0 . Pero esto debe informarse en el reporte, para que el lector pueda interpretar los resultados.

Solicitada a InfoStat®, esta operación da el siguiente resultado:

Coeficientes de correlación

Correlación de Pearson: Coeficientes\probabilidades

	horas	calificacion
horas	1,00000	0,05608
promedio	0,37195	1,00000

La expresión *Coeficientes\probabilidades* indica que en la diagonal secundaria de la tabla debe leerse: primero el coeficiente, en la intersección de las dos variables (promedio y horas) y luego la significación (el valor p) en la otra intersección de las variables (horas y promedio).

Si la salida se pide en “forma de lista” y “formato compacto” se obtiene:

Correlación de Pearson

Variable(1)	Variable(2)	n	Pearson	p-valor
horas	promedio	27	0,37195	0,05608

Que es de lectura más accesible.

La lectura es entonces que la correlación muestral entre las dos variables es 0,37195 y que la probabilidad de que ese resultado haya sido encontrado por puro azar es 0,05608. A un nivel de significación del 5% no se rechaza la H_0 según la cual las variables no están correlacionadas. Aunque sí se rechaza si se fija un nivel de significación “más tolerante” del 10%.

Resumen de pruebas tratadas en el capítulo

Parámetro	Estimador	Estadístico de prueba	Supuestos
$\mu_1 - \mu_2$	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2$	$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{s_{comb} * \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$ $gl = n_1 + n_2 - 2$ $s_{comb}^2 = \frac{(n_1 - 1) * s_1^2 + (n_2 - 1) * s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$	Grupos independientes Distribución normal en la dos poblaciones ó $n_1 > 30$ y $n_2 > 30$ Varianzas iguales
$\mu_1 - \mu_2$	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2$	$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$ $gl = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$	Grupos independientes Distribución normal en la dos poblaciones ó $n_1 > 30$ y $n_2 > 30$ Varianzas diferentes
$P_1 - P_2$	$\hat{p}_1 - \hat{p}_2$	$z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1 * (1 - \hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2 * (1 - \hat{p}_2)}{n_2}}}$	Grupos independientes y $n_1 > 100$ y $n_2 > 100$
$\bar{D}$	$\bar{d}$	$t = \frac{\bar{d}}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}}; gl = n - 2$	Distribución normal de d , ó $n > 30$
ρ	r	$t = \frac{r}{\sqrt{\frac{1 - r^2}{n - 2}}}$	Distribución normal

Capítulo 13 Cuando los supuestos no se cumplen

Las condiciones que se han pedido hasta este punto para los procedimientos vistos, son exigentes. Por ejemplo, en las *pruebas t* debemos suponer que la variable tiene distribución normal en la población¹¹¹. El Teorema Central del Límite nos dice que si las muestras son lo suficientemente grandes, la distribución muestral tiende a ser normal, por lo que puede eliminarse el supuesto de normalidad en la población si las muestras tienen suficiente tamaño, pero a menudo no es posible contar con muestras grandes. Todas las pruebas que hemos visto hasta este momento hacen supuestos acerca de la población, que son condiciones que debe cumplir la distribución de las variables bajo análisis en la población; estos supuestos a veces se cumplen y otras no. Los resultados que se obtengan de esas pruebas dependen del cumplimiento de esas condiciones. En algunos casos es posible poner a prueba la veracidad de esas exigencias, para ver si se cumplen, en otros casos, solo es posible "suponer" que es así. Por esa razón los resultados pueden ser aproximados o directamente incorrectos, si hay violaciones graves a sus condiciones de aplicación.

Además, los cálculos hechos en las pruebas mencionadas, requieren un nivel de medición alto, para poder calcular medias y varianzas. Hemos resuelto parcialmente el problema cuando, al tratar con variables nominales, usamos la proporción de casos en alguna categoría. Sin embargo no hemos resuelto aún el problema de analizar relaciones entre variables cualitativas, a las que no puede calcularse la media ni la varianza, pero que a menudo aparecen en nuestros análisis. Es el mismo caso con el coeficiente de Pearson, su cálculo requiere que se calculen medias y varianzas, lo que no puede hacerse si las variables no son métricas.

Para este tipo de problemas, que son muy frecuentes en investigación social (pocos casos, variables que no son métricas, sin certeza sobre la normalidad de las distribuciones paramétricas), existe un conjunto de pruebas llamadas **pruebas no paramétricas**. Por oposición a ellas, todas las pruebas presentadas hasta aquí son **pruebas paramétricas**, que quiere decir que especifican ciertas condiciones que deben cumplir (o que puede suponerse que cumplan) los parámetros de la población de la que se extrae la muestra.

Son **pruebas no paramétricas** las pruebas de hipótesis que no especifican condiciones sobre los parámetros de la población de la que proviene la muestra.

La limitación de las pruebas no paramétricas respecto de las paramétricas, es que tienen, a igual nivel de significación e igual tamaño de muestra, menor potencia. Eso significa que, para obtener la misma potencia en una prueba no paramétrica que en una paramétrica, es necesario usar más casos.

Si el problema es el del nivel de medición de las variables —que en la mayoría de los casos no es métrico—, puede resolverse apelando a una prueba no paramétrica y lograr resultados de la misma calidad, aunque a un mayor costo por la mayor cantidad de casos necesarios.

¹¹¹ Lo que puede verificarse inicialmente observando el histograma, comparando la media y la mediana, y calculando los coeficientes de asimetría y curtosis

Si el problema es el tamaño de la muestra, es decir, si tenemos muy pocos casos observados y no puede suponerse distribución normal en la población, entonces no hay alternativa y debe usarse una prueba no paramétrica.

En este capítulo desarrollaremos tres pruebas no paramétricas basadas en el puntaje *ji cuadrado* y dos alternativas a las pruebas *t* para muestras independientes y apareadas. Puede consultarse el manual de Siegel (1956) para una presentación muy completa, aunque no actualizada a procedimientos informáticos.

Las pruebas *ji cuadrado* (o *chi cuadrado*)

El puntaje *ji cuadrado* fue usado para derivar medidas de la asociación entre dos variables nominales (*V* de Cramer, *C* de Pearson) y luego como un modelo especial de probabilidades. Ahora relacionaremos esos dos usos del puntaje *ji cuadrado*, en primer lugar para analizar la eventual independencia entre dos variables (prueba de independencia de atributos), luego para evaluar si una distribución se ajusta a un modelo predicho (prueba de bondad de ajuste) y finalmente para comparar la tendencia central entre variables de nivel ordinal (prueba de la mediana).

Prueba de independencia de atributos

El puntaje *ji cuadrado* (χ^2) es una medida de la distancia que hay entre una distribución de frecuencias bivariada observada y la correspondiente distribución de frecuencias esperadas. Estas frecuencias esperadas son las que se esperarían observar si las variables fueran independientes. Así, cuanto más alejadas se encuentren las frecuencias observadas de las esperadas, tanto más grande será el puntaje χ^2 y más alejadas de la independencia estarán las variables que se analizan, el hecho de estar alejadas de la independencia implica que existe alguna asociación entre ellas. El valor mínimo de este puntaje es cero, que solo podría alcanzarse si todas las frecuencias observadas coincidieran con las esperadas y sería el caso de una independencia perfecta; una situación muy improbable de hallar en la realidad. El puntaje χ^2 carece de un valor máximo, puede ser indefinidamente grande, dependiendo no solo de lo alejadas que están las frecuencias observadas de las esperadas, sino también de la dimensión de la tabla y de la cantidad de casos.

Como las frecuencias observadas que están en la tabla bivariada provienen de una muestra, necesitamos poder generalizar el resultado que hallemos a la población de referencia. Es decir que ahora, en el contexto de la inferencia, nos preguntamos ¿Cómo debería ser de grande el puntaje χ^2 encontrado para que consideremos que las variables se alejan lo suficiente de la independencia? Por la redacción de la pregunta puede verse que tratamos con una prueba de hipótesis, nos estamos preguntando ¿A partir de qué valor podemos considerar que χ^2 es significativo? La respuesta dependerá del valor que asuma χ^2 (que está influido por el tamaño de la muestra) y de la dimensión de la tabla. Para formular las hipótesis de esta prueba, recordemos que la H_0 es aquella que indica no-diferencia, el no-cambio, es la hipótesis "conservadora". Por el contrario, la hipótesis alternativa presenta una diferencia en algún sentido. En este problema,

como vamos a tratar acerca de relaciones entre variables, la H_0 indicará que no hay relación o, lo que es lo mismo, que las variables son independientes.

Ejemplo (datos ficticios) se trata analizar la posible relación entre el resultado del primer parcial de Psicoestadística (aprobado – no aprobado) y el turno en que los alumnos lo hicieron. Se construye una muestra con 180 alumnos seleccionados entre quienes hicieron el primer parcial en los últimos cinco años. La siguiente es la tabla de distribución de frecuencias observadas.

Tabla 1: Frecuencias conjuntas observadas del resultado del parcial y el turno en que se realizó:

Resultado del parcial	Turno			Total
	Mañana	Tarde	Noche	
Aprobado	60	30	40	130
No aprobado	30	10	10	50
Total	90	40	50	180

Para el análisis de la independencia se calculan las frecuencias esperadas¹¹²:

Tabla 2: Frecuencias conjuntas esperadas del resultado del parcial y el turno en que se realizó.

Resultado del parcial	Turno			Total
	Mañana	Tarde	Noche	
Aprobado	65	29	36	130
No aprobado	25	11	14	50
Total	90	40	50	180

Las frecuencias esperadas conducen al puntaje¹¹³ χ^2 , que en este caso es $\chi^2 = 3,05$. En el interés por generalizar a toda la población, se trata de alcanzar una conclusión acerca de la independencia o no de las dos variables, que no esté limitada a estos 180 casos, sino que sea general. No debemos olvidar que los datos disponibles son muestrales y, por el modo en que se seleccionan los casos de la muestra, dependen del azar.

Nos preguntamos: ¿el valor hallado para el puntaje $\chi^2 = 3,05$, puede explicarse por azar, o representa un distanciamiento suficientemente grande como para atribuirlo a una relación entre las variables en la población?

Queremos entonces decidir si lo que hemos observado para estos alumnos (la muestra de quienes cursaron en los últimos cinco años, por ejemplo) es general, es decir, si vale para alumnos a los que no hemos observado. Por eso, la hipótesis nula de la prueba será:

¹¹² Como $f_{ij} = \frac{f_i \cdot f_j}{n}$

¹¹³ Haciendo: $\chi^2 = \sum \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e}$

H_0 : El resultado del parcial es independiente del turno en que se realiza¹¹⁴

Que equivale a afirmar que no hay relación entre el turno y el resultado.
Su contrapartida, la H_1 dirá que:

H_1 : Existe relación entre el turno en el que se realiza el parcial y el resultado que se obtiene.

La pregunta será entonces si la evidencia hallada a partir de nuestros datos es suficiente para rechazar H_0 y concluir que las variables están relacionadas o si, por el contrario, deberemos seguir sosteniendo que las variables no están relacionadas.

La variable aleatoria χ^2 tiene una distribución de probabilidad asimétrica y su forma depende de los grados de libertad. Estos últimos, para tablas de doble entrada dependen del número de filas y de columnas que tenga la tabla, según:

$$gl = (f - 1) * (c - 1)$$

Donde gl son los grados de libertad, f es el número de filas de la tabla y c el número de columnas. Entonces conocemos el puntaje χ^2 y su distribución de probabilidad, con lo que puede decidirse si se trata de un valor extremo (muy poco probable si H_0 fuera cierta) o bien de un valor esperable. En el primer caso rechazaremos H_0 y concluiremos que hay relación entre el turno en que se hace el parcial y el resultado que se obtiene. En el segundo caso, aceptaremos H_0 y diremos que no hay evidencia para descartar la independencia, o que no hay pruebas para sostener que las variables estén relacionadas. Rechazaremos H_0 si el valor χ^2 encontrado es grande, porque eso es sinónimo de un gran alejamiento de nuestros datos respecto de la independencia. En razón de ello, ésta será siempre una prueba unilateral derecha: se rechaza para valores que excedan cierto límite.

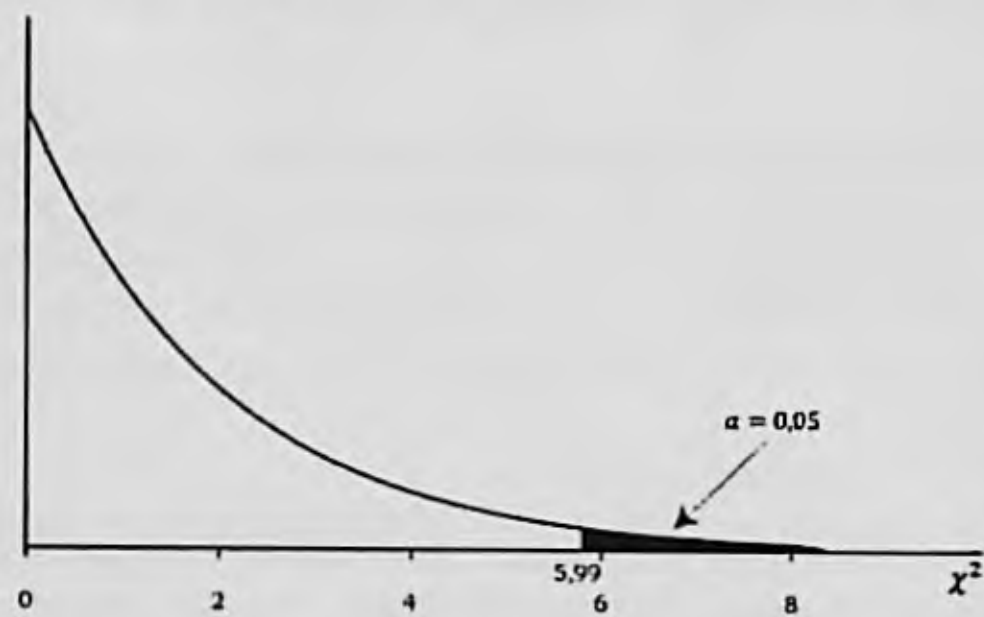
El procedimiento para hacer la prueba puede ser el tradicional, que consiste en fijar de antemano el nivel de significación (α), luego determinar el (único) punto crítico y comparar si el valor observado de χ^2 excede ese punto crítico; si es así se rechaza H_0 . O también puede usarse el *valor p* asociado al puntaje χ^2 observado, y si esa probabilidad es menor al nivel de significación, se rechaza H_0 . En este ejemplo, los grados de libertad son:

$$gl = (f - 1) * (c - 1) = (2 - 1) * (3 - 1) = 1 * 2 = 2$$

Se fija un nivel de significación $\alpha = 0,05$ y, usando una hoja de cálculo (o el calculador de probabilidades y cuantiles de Infostat®), se encuentra que el punto crítico que corresponde para esa área (superior) y esos grados de libertad bajo la curva de la distribución χ^2 es 5,99, se lo llama χ^2_c (chi cuadrado crítico). La representación gráfica de la zona de rechazo de H_0 es entonces:

¹¹⁴De mismo modo que sucede con las pruebas paramétricas, las hipótesis se refieren a toda la población, aunque aquí no aparezca el nombre de un parámetro reconocible, como μ o P .

Gráfico 1: Ubicación del punto crítico que deja un 5% de área superior en una distribución χ^2 con 2 grados de libertad.



De acuerdo a este gráfico, la región de rechazo de H_0 es la que se encuentra a la derecha de 5,99, formada por todos los valores de χ^2 que superen a 5,99. Los datos dieron un puntaje $\chi^2_{obs} = 3,05$, que no pertenece a la zona de rechazo de H_0 , por lo que no se rechaza H_0 y se concluye que no hay relación entre las variables; o bien que no hay evidencia suficiente para descartar la independencia entre el resultado del parcial y el turno en que éste se realiza.

Si se prefiere usar el valor de probabilidad (*valor p*) para tomar la decisión y dar mayor claridad a los resultados, entonces, como en las pruebas paramétricas, se informa la probabilidad de hallar un valor de χ^2 como el observado o más extremo que él. En esta prueba (de independencia de atributos), “más extremo” siempre quiere decir “mayor que”, porque es una prueba unilateral derecha. Buscamos entonces la probabilidad que tiene la variable χ^2 con dos grados de libertad, de asumir un valor igual o mayor al que hemos observado, es decir:

$$P(\chi^2 \geq \chi^2_{obs}) = P(\chi^2 \geq 3,05)$$

Y en la calculadora de Infostat® se encuentra 0,2176. Lo leemos diciendo que, si las dos variables fueran independientes, la probabilidad de hallar un puntaje χ^2 como el observado o más extremo que él es de 0,2176. Dado que es una probabilidad alta (sea a un nivel de significación del 5 o del 10%), consideramos a éste como un resultado altamente probable, de ser cierto que las variables son independientes.

En el video *ji cuadrado* se muestra cómo pedirlo a InfoStat®. La salida es:

Frecuencias absolutas

En columnas: turno

resultado	mañana	tarde	noche	Total
aprobado	60	40	30	130
no aprobado	30	10	10	50
Total	90	50	40	180

Frecuencias esperadas bajo independencia

En columnas: turno

resultado	mañana	tarde	noche	Total
aprobado	65,00	36,11	28,89	130,00
no aprobado	25,00	13,89	11,11	50,00
Total	90,00	50,00	40,00	180,00

Estadístico	Valor	gl	p
Chi Cuadrado Pearson	3,05	2	0,2180
Chi Cuadrado MV-G2	3,10	2	0,2119
Coef.Conting.Cramer	0,09		
Coef.Conting.Pearson	0,13		

Que muestra las frecuencias observadas (los datos originales) y la tabla de frecuencias esperadas si fueran independientes. Luego aparece el puntaje χ^2 (3,05) y su valor de probabilidad asociado ($p=0,2180$). Esa es la parte que interesa de esta salida.

Pruebas de bondad de ajuste

El cálculo del puntaje χ^2 ofrece la posibilidad de hacer comparaciones entre frecuencias observadas (reales, provenientes de la recolección de datos) y frecuencias esperadas bajo diferentes hipótesis. En la prueba anterior, las esperadas lo han sido bajo la hipótesis de independencia, pero la condición bajo la cual se esperan determinadas frecuencias puede ser otra y el puntaje χ^2 también permite medir esas distancias.

Ejemplo (datos ficticios): la distribución de la condición que alcanzan los alumnos que cursan Psicoestadística ha sido, históricamente, 35% de promocionados, 35% de regulares y 30% de libres. Consideremos el subconjunto de alumnos que estudian otra carrera además de Psicología. Una muestra de 142 de estos alumnos se distribuye, según condición, del siguiente modo:

Tabla 3: Distribución de frecuencias de los alumnos de Psicología que también estudian otra carrera, según condición:

condición	alumnos
Promocionados	53
Regulares	51
Libres	38
Total	142

La tabla anterior muestra las frecuencias observadas. Nos preguntamos si esta distribución se aleja significativamente de la tendencia general, o bien si está dentro de lo esperado. Esta pregunta puede reformularse en dirección a saber si los datos observados se “ajustan” a la distribución general o se apartan de ella. Expresado en términos de hipótesis, la H_0 afirmará que no hay diferencia:

H_0 : La distribución de promocionados, regulares y libres de los alumnos que estudian otra carrera se ajusta a la distribución del total de alumnos.

Mientras que la H_1 , afirmará lo contrario:

H_1 : La distribución de promocionados, regulares y libres de los alumnos que estudian otra carrera se aparta de la distribución del total de alumnos.

Si la distribución se mantuviera igual (si H_0 fuera verdadera), esperaríamos que los 142 alumnos que estudian otra carrera se distribuyeran en las tres categorías según estas proporciones: 0,35 - 0,35 - 0,30. La frecuencia que esperaríamos encontrar en la categoría promocionados es $0,35 \cdot 142 = 49,7$ y del mismo modo con las demás categorías. Por lo que esperaríamos la siguiente distribución de frecuencias:

Tabla 4: Frecuencias esperadas bajo la hipótesis de ajuste a la distribución general:

condición	Alumnos
Promocionados	49,7
Regulares	49,7
Libres	42,6

Disponemos ahora de las dos tablas, una de frecuencias observadas y otra de esperadas y queremos evaluar si son similares o muy diferentes; que es el mismo problema que en la prueba de independencia, solo que ahora las tablas son univariadas. Para medir la distancia entre las dos tablas nuevamente se usa el puntaje χ^2 , que compara una a una las frecuencias de las celdas. Aplicada a las tablas de arriba, da:

$$\chi^2 = \sum \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e} = \frac{(53 - 49,7)^2}{49,7} + \frac{(51 - 49,7)^2}{49,7} + \frac{(38 - 42,6)^2}{42,6} = 0,75$$

Del mismo modo que en la prueba de independencia de atributos, buscaremos un valor crítico de χ^2 , para tomar la decisión. En este caso, los grados de libertad de la distribución χ^2 dependen del número de categorías de la tabla univariada, simplemente es el número de categorías menos uno:

$$gl = k - 1$$

En este ejemplo, las categorías son tres, por lo que $gl=2$. Con 2 grados de libertad y 5% de nivel de significación, el punto crítico es $\chi^2 = 5,99$, por lo que la región de rechazo es el conjunto de valores que superan 5,99. El valor observado se encuentra fuera de la región de rechazo, por lo que corresponde no rechazar H_0 y concluir que los alumnos que estudian otra carrera además de Psicología no muestran, en Psicoestadística, una distribución entre promocionados, regulares y libres que difiera significativamente de la tendencia general de quienes cursan esa materia.

Prueba de la mediana

Cuando es necesario comparar la tendencia central de dos distribuciones, se dispone de la *prueba t de diferencia de medias*. Sin embargo esa prueba no es válida cuando se trabaja con variables que tienen nivel ordinal, ya que allí no tiene interpretación la media ni tampoco la varianza. Si se deben comprar dos muestras en una variable medida a nivel ordinal se puede plantear la hipótesis que afirma que las medianas son iguales, como una equivalencia a la que, en variables métricas plantea que las medias de dos distribuciones son iguales:

$$H_0: M_{dn_1} - M_{dn_2} = 0$$

Frente a una hipótesis alternativa que usualmente es bilateral:

$$H_1: M_{dn_1} - M_{dn_2} \neq 0$$

El procedimiento consiste en calcular, en primer lugar, la mediana del grupo compuesto por los casos de las dos muestras, todos reunidos en una sola distribución, se la denomina "mediana combinada" y se indica M_{dn_c} . Luego se cuentan los casos de cada grupo que quedan por encima y por debajo de esa mediana combinada. Si la mediana de los dos grupos fuera la misma, se esperaría que aproximadamente la mitad de los casos de cada grupo queden por encima de la mediana combinada y la otra mitad por debajo. En la medida que los casos de los grupos se aparten de esa forma de distribuirse habrá evidencia para creer que las medianas difieren. Por lo tanto, se trata de ver si una distribución real de datos respeta una distribución teórica (esperada) o no.

La disposición de los datos se realiza en una tabla de dos por dos como la siguiente:

Ubicación respecto de la mediana combinada	Grupo		Total
	1	2	
Por encima			
Por debajo			
Total			

Bajo la hipótesis nula, esperaríamos que la cantidad de casos por encima y por debajo de la M_{dn_c} fuera la misma para los dos grupos. Dicho de otro modo, para aceptar la H_0 deberíamos hallar independencia entre la pertenencia a los grupos y la ubicación de los casos por encima y por debajo de M_{dn_c} . De este modo vemos que el problema puede tratarse como una prueba de independencia: si el puntaje χ^2_{obs} es tal que debe rechazarse la hipótesis de independencia, será —en esta prueba—, equivalente a rechazar la igualdad de las medianas.

Un problema que suele aparecer cuando se hace el recuento de casos por encima y por debajo de la M_{dn_c} es que algunos coincidan con ella, que no estén ni encima ni debajo. Si la cantidad total de casos con que se cuenta es grande, se pueden dejar de lado esos casos y solo contar los que efectivamente difieran (en más o en menos) de la M_{dn_c} . De lo contrario, puede hacerse el recuento de los casos que están por encima de la M_{dn_c} y los que no lo están, es decir que uno de los grupos

cuenta la cantidad de casos que hay por encima de la M_{dn_c} y el otro los que la igualan o están por debajo de ella.

Ejemplo (datos ficticios): se comparan las calificaciones “de concepto” asignadas por docentes de escuelas primarias de dos grupos de alumnos. Dichas calificaciones, presentan categorías: 1. Excelente, 2. Muy bueno, 3. Bueno, 4. Satisfactorio, 5. No satisfactorio, por lo que son de nivel ordinal y no es posible realizar una prueba de diferencia de medias, en su reemplazo recurrimos a la prueba de la mediana. Se seleccionan 40 alumnos de cada docente y se relevan las notas de concepto de cada uno. Calculamos la mediana de los 80 alumnos juntos y obtenemos 3. A continuación contamos cuántos alumnos de la primera docente están por encima y por debajo de 3 y lo mismo para la segunda docente. La distribución queda del siguiente modo:

Ubicación respecto de la mediana combinada	Grupo		Total
	1	2	
Por encima	28	8	36
Por debajo	8	24	32
Total	36	32	68

Aunque originalmente se relevaron 40 alumnos de cada docente, quedaron 36 de la primera y 32 de la segunda, porque cuatro casos de un grupo y ocho del otro coincidieron con la M_{dn_c} y fueron descartados, con lo que el total se redujo a 68 observaciones.

La sola inspección de la tabla sugiere que debe descartarse la igualdad de las medianas de los grupos, ya que hay concentración de casos en las celdas de la diagonal, que es una indicación de la relación que hay entre filas y columnas. El grupo 1 está mayoritariamente por encima de la M_{dn_c} y el grupo 2 por debajo. En efecto, el puntaje $\chi^2_{obs} = 18,94$, con 1 grado de libertad, tiene una probabilidad asociada (valor p) de 0,0000135, que quiere decir que se rechaza la hipótesis de igualdad de medianas.

Cuando esta operación se solicita a InfoStat®, la salida no presenta la tabla de clasificación de casos según su ubicación respecto de la M_{dn_c} , solo nos ofrece lo siguiente:

Prueba de la mediana para dos muestras

Clasific	Variable	n(1)	n(2)	Med	P(X1>Med)	P(X2>Med)	p(2 colas)
docente	concepto	40	40	3,00	0,70	0,20	<0,0001

- Que indica:
- Clasific:** el nombre de la variable que separa los grupos, en este caso, docente.
 - Variable:** la característica que se compara.
 - n(1) y n(2):** la cantidad de casos en cada uno de los grupos.
 - Med:** la mediana combinada
 - P(X1>Med) y P(X2>Med):** son las proporciones de casos de cada grupo que superan a la M_{dn_c} , en este caso el 70% del primer grupo y el 20% del segundo.
 - P(2 colas):** el valor p para prueba bilateral, obtenido a través de la prueba χ^2 . Esta probabilidad no se presenta de manera exacta sino, en este caso, solo señalando

que es menor que una diezmilésima, suficiente evidencia para rechazar H_0 y concluir que la diferencia de las medianas es significativa.

Coefficiente r_s de Spearman

El coeficiente r de Pearson solo puede interpretarse si proviene de variables medidas a nivel intervalar o proporcional, es decir, métricas. Cuando trabajamos con variables ordinales, disponemos de otra medida de la asociación, el coeficiente de correlación por rangos r_s de Spearman, cuyos valores se interpretan como los de r de Pearson. Por trabajar con un nivel de medición no métrico, la prueba sobre este coeficiente es no paramétrica.

La prueba de hipótesis que permite generalizar su valor a una población de referencia, casi no difiere de la de r . Llamaremos ρ_s al coeficiente de Spearman paramétrico y r_s al muestral. El error estándar de este estimador tiene la misma forma que el de Pearson:

$$\sigma_{r_s} = \sqrt{\frac{1 - r_s^2}{n - 2}}$$

Y cuando la muestra tiene al menos 10 observaciones, se distribuye con una distribución t con $n-2$ grados de libertad¹¹⁵. En consecuencia, el estadístico de prueba será:

$$t = \frac{r_s - \rho_s}{\sqrt{\frac{1 - r_s^2}{n - 2}}}$$

Ejemplo (datos ficticios): se interroga a 20 alumnos de primer año de una carrera universitaria sobre las razones de su elección de carrera y a partir de las respuestas se construye un índice que clasifica el interés en 1. Muy fuerte, 2. Fuerte, 3. Débil, 4. Muy débil. Los resultados de este índice se ponen en correspondencia con el orden de mérito alcanzado en el ingreso a la carrera universitaria (1. Primero, 2. Segundo, etc.). En el análisis de la relación entre estas dos variables ordinales obtenemos un coeficiente de correlación de Spearman de 0,82, que indica, en la muestra, una relación positiva e intensa entre el interés y el orden de mérito en el ingreso. Preguntamos si este resultado, obtenido sobre 20 casos, nos autoriza a afirmar que existe una asociación entre las dos variables más allá de la muestra observada. Formularemos las hipótesis correspondientes a una prueba bilateral, porque queremos probar si el coeficiente es significativamente diferente de cero.

$$\begin{aligned} H_0: \rho_s &= 0 \\ H_1: \rho_s &\neq 0 \end{aligned}$$

Fijamos el nivel de significación en el 5% y hallamos en una distribución t con 18 grados de libertad ($n - 2 = 20 - 2 = 18$) los valores críticos correspondientes son $\pm 2,10$. El estadístico de prueba es:

¹¹⁵Kendall (1948) citado por Siegel (1956)

$$t = \frac{r_s - \rho_s}{\sqrt{\frac{1-r_s^2}{n-2}}} = \frac{0,82}{\sqrt{\frac{1-0,82^2}{20-2}}} = \frac{0,82}{0,135} = 6,08$$

Este valor se ubica en la región de rechazo de H_0 , con lo que la decisión es la de rechazar H_0 y concluir que “hay evidencia para creer que la correlación a nivel poblacional no es nula”.

Cuando se pide a InfoStat® (en forma de lista, formato compacto), la salida es:

Coeficientes de correlación
Correlación de Spearman

Variable(1)	Variable(2)	n	Spearman	p-valor
Interés	orden de mérito	20	0,81842	0,00036

El pequeño valor p es señal de lo escasamente probable que resulta que este resultado provenga del azar, es decir, es evidencia para creer que en la población, la asociación efectivamente existe.

Alternativas no paramétricas a las pruebas t

Muestras independientes

La prueba U de Mann-Whitney es la versión no paramétrica de la prueba t de Student, es decir, sirve para comparar la tendencia central entre dos muestras independientes. Se usa cuando no se cumplen los supuestos de la prueba t y, sobre todo cuando las variables son de nivel ordinal. La hipótesis nula es que las muestras provienen de poblaciones iguales.

Si se dispone de dos muestras de tamaños n_1 y n_2 , para realizar la prueba se ordenan las observaciones de las dos muestras juntas, de menor a mayor, y se les asignan rangos desde 1 hasta $n_1 + n_2$. Si la tendencia central de ambas poblaciones es la misma los rangos deberían distribuirse aleatoriamente entre las dos muestras y el rango medio de las observaciones de una muestra debería ser casi el mismo que el de la otra. El estadístico de prueba U de Mann-Whitney se construye a partir de la suma de rangos de una de las muestras, R_i , elegida arbitrariamente.

Si se trata de dos grupos, llamados experimental y control cuyos sujetos son evaluados antes y después de una intervención, la primera parte del video *Mann-Whitney Wilcoxon* muestra la comparación entre los puntajes de los dos grupos antes del experimento y después de él. La salida tiene la forma:

Prueba de Wilcoxon para muestras independientes

Clasific	Variable	Grupo1	Grupo2	n(1)	n(2)	Media(1)	Media(2)	DE(1)	DE(2)	W	p(2colas)
grupos	antes	control	experimental	32	36	1,63	3,64	1,68	1,69	769,50	<0,0001
grupos	después	control	experimental	32	36	1,63	3,25	1,62	1,63	813,00	0,0003

El resultado muestra que los grupos difieren significativamente, tanto antes del experimento ($p < 0.0001$) como después de él ($p = 0.0003$).

Los nombres de los comandos de Infostat® son ambiguos, para solicitar la prueba hay que elegir "Wilcoxon (Mann-Whitney U)", pero en la salida, la llama "Prueba Wilcoxon para muestras independientes", no hay acuerdo universal sobre el nombre de esta prueba.

Muestras relacionadas

La prueba de los rangos con signo de Wilcoxon es una prueba no paramétrica para comparar el rango medio de dos muestras relacionadas. Es una alternativa a la prueba t de Student para muestras relacionadas, que se usa en los casos en que no se sostiene la normalidad de la distribución y, especialmente cuando las variables son de nivel ordinal.

La hipótesis nula dice que las muestras provienen de poblaciones con la misma distribución de probabilidad. La prueba tiene en cuenta las diferencias entre las puntuaciones de los elementos de cada par asociado, y considera tanto el signo, como la magnitud de la diferencia.

Con los mismos datos del ejemplo anterior, ahora interesa comparar los puntajes antes y después del experimento, para cada uno de los grupos. El "antes" y "después" son dos medidas hechas sobre el mismo sujeto, por lo que se trata como mediciones apareadas y, dado el bajo nivel de medición de los puntajes, debe usarse esta prueba no paramétrica. La segunda parte del video *Mann-Whitney Wilcoxon*, muestra los comandos. El resultado de la prueba, particionada para cada uno de los dos grupos es:

Prueba de Wilcoxon (muestras apareadas)

P-valor estimado por muestreo de todas las permutaciones posibles (n = 5000)

grupos	Obs(1)	Obs(2)	N	Suma(R+)	E(R+)	Var(R+)	media(dif)	Z	p(2 colas)
control	antes	después	32	227,50	264,00	2781,75	0,00	-0,69	0,6912
experimental	antes	después	36	432,00	333,00	3863,25	0,39	1,59	0,0542

Se observa que los cambios del grupo control no son significativos ($p = 0.6912$) mientras que los del grupo experimental lo son a un nivel de significación del 10%, no del 5% ($p = 0.0543$). Como este segundo resultado está en el límite de la significación al 5%, debe informarse la magnitud del cambio (0.39) a fin de decidir si se trata de una variación apreciable desde el punto de vista práctico, más allá de su significación estadística.

Nuevamente, debe tenerse cuidado en el modo en que Infostat® denomina la prueba. En el comando se llama "Wilcoxon", en la salida dice "Prueba de Wilcoxon (muestras apareadas)".

Apéndice: Tamaño del efecto

Significación estadística y significación práctica

El procedimiento de prueba de hipótesis concluye con la aseveración acerca del rechazo o no de la hipótesis nula. Esto se hace observando qué tan probable es hallar los resultados muestrales bajo el supuesto de H_0 verdadera. El valor p es una medida de esa probabilidad, por eso es que cuando es pequeño la decisión es rechazar H_0 y decimos que es resultado (la diferencia, el coeficiente, o lo que sea que se haya puesto a prueba) es significativo, o significativamente distinto de cero.

Sin embargo, que una prueba haya dado significativa no implica directamente que el resultado tenga interés práctico. Como se vio en el cálculo de la potencia, un tamaño de muestra grande, puede detectar diferencias muy pequeñas que quizá en la práctica tengan poco interés. La palabra significación contribuye a la confusión, porque en el lenguaje cotidiano, una diferencia significativa a menudo quiere decir una diferencia importante. La significación estadística, como hemos visto, es otra cosa y puede suceder que una prueba dé significativa pero la diferencia sea insignificante.

Por eso es necesario introducir otro concepto; el de **tamaño del efecto**. Se trata de una cuantificación de lo importante que es una diferencia o un coeficiente, luego de haber obtenido un resultado significativo en la prueba de hipótesis. Conocer el tamaño del efecto es absolutamente necesario para interpretar los resultados de una investigación. La APA (2010) destaca que “las pruebas de hipótesis no son sino el punto de partida y se requiere informar elementos adicionales tales como tamaños del efecto, intervalos de confianza y descripciones extensivas” (p. 33, traducción del autor).

Las medidas de tamaño del efecto expresan de manera estandarizada cuán diferente de cero es una diferencia o un coeficiente. Que estén estandarizadas permite dos cosas: evaluarlas en su magnitud, dados ciertos criterios; y comparar efectos entre experimentos diseñados de manera diferente, por ejemplo con distintos tamaños de muestra, lo cual permite el meta-análisis¹¹⁶. Para decidir cuándo un efecto es grande mediano o pequeño, existen criterios, casi todos propuestos por Jacob Cohen (1962), quien es autor también de la mayoría de las medidas de tamaño del efecto.

Medidas de tamaño del efecto

Hay una gran diversidad de medidas del tamaño del efecto, Kirk (2003) las estima en más de setenta, y suelen clasificarse (Ellis, 2010) en dos familias: las medidas de diferencias entre grupos y las medidas de asociación. Para esta presentación, elegiremos algunas medidas de uso difundido y sugerimos Ellis (2010), así como Cumming (2012) para una descripción más detallada. Las siguientes son las medidas que más se usan para evaluar el tamaño del efecto, según cuál sea la prueba que se haya realizado.

¹¹⁶ Meta-análisis es una revisión sistemática que usa procedimientos estadísticos para comparar los resultados obtenidos en diferentes estudios sobre un determinado tema.

Prueba t para diferencia de medias

Conocido como *d de Cohen*, se define como:

$$\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s_{comb}}$$

Y mide la distancia entre las medias observadas, expresada en términos de la desviación estándar combinada de los dos grupos. Cohen (1962) sugiere que valores de *d* de 0.20, 0.50, y 0.80 indican tamaños de efecto: pequeño, mediano y grande respectivamente. Medidas alternativas al *d* de Cohen son *delta de Glass* y *g de Hedge*, que difieren en el modo de calcular el denominador de la expresión anterior, pero conceptualmente consisten también en una estandarización de la diferencia observada.

Análisis de la varianza

La medida se llama *f de Cohen* y se define así:

$$f = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k p_i * (\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})^2}{s_{res}^2}}$$

En la que las p_i de la fórmula representan la proporción de casos en cada grupo que se compara. Los valores sugeridos por Cohen son 0.10, 0.25, y 0.40 para efectos de tamaño pequeño, mediano y grande respectivamente. Otras medidas usadas en ANOVA son η^2 (eta cuadrado) y ε^2 (épsilon cuadrado)

Correlaciones

El coeficiente de correlación es una medida estandarizada y se usa como medida del tamaño del efecto, es decir, de la magnitud de la asociación. Cohen considera que un efecto grande corresponde a $r = 0.50$, mediano a $r = 0.30$ y pequeño $r = 0.10$.

Regresión lineal

La medida estandarizada para evaluar la calidad de un modelo lineal es:

$$f^2 = \frac{R^2}{1 - R^2}$$

Es una medida de tamaño del efecto alternativa al el coeficiente general de correlación R^2 . Cohen fija en 0.02, 0.15 y 0.35 los criterios de pequeño, mediano y gran efecto.

Pruebas χ^2

Se utiliza la medida definida como:

$$w = \sqrt{\sum_{i=1}^m \frac{(f_i^e - f_i^{e1})^2}{f_i^e}}$$

En la que f_i^e y f_i^{e1} son las frecuencias relativas esperadas en la celda *i* bajo H_0 y H_1 respectivamente.

Análisis de la potencia

El cálculo del tamaño del efecto permite entonces comparar resultados de diferentes diseños experimentales y evaluar si un efecto es grande o pequeño. Este es el análisis a posteriori, luego de haber realizado las pruebas y haber hallado resultados estadísticamente significativos. Cuando se trató la potencia de la prueba, se indicó que ésta crece a medida que la diferencia entre el valor hipotético y el verdadero valor del parámetro se agranda, es decir que si el valor real difiere mucho del valor hipotético (tamaño del efecto grande), la probabilidad de rechazar la hipótesis nula es también grande (potencia alta).

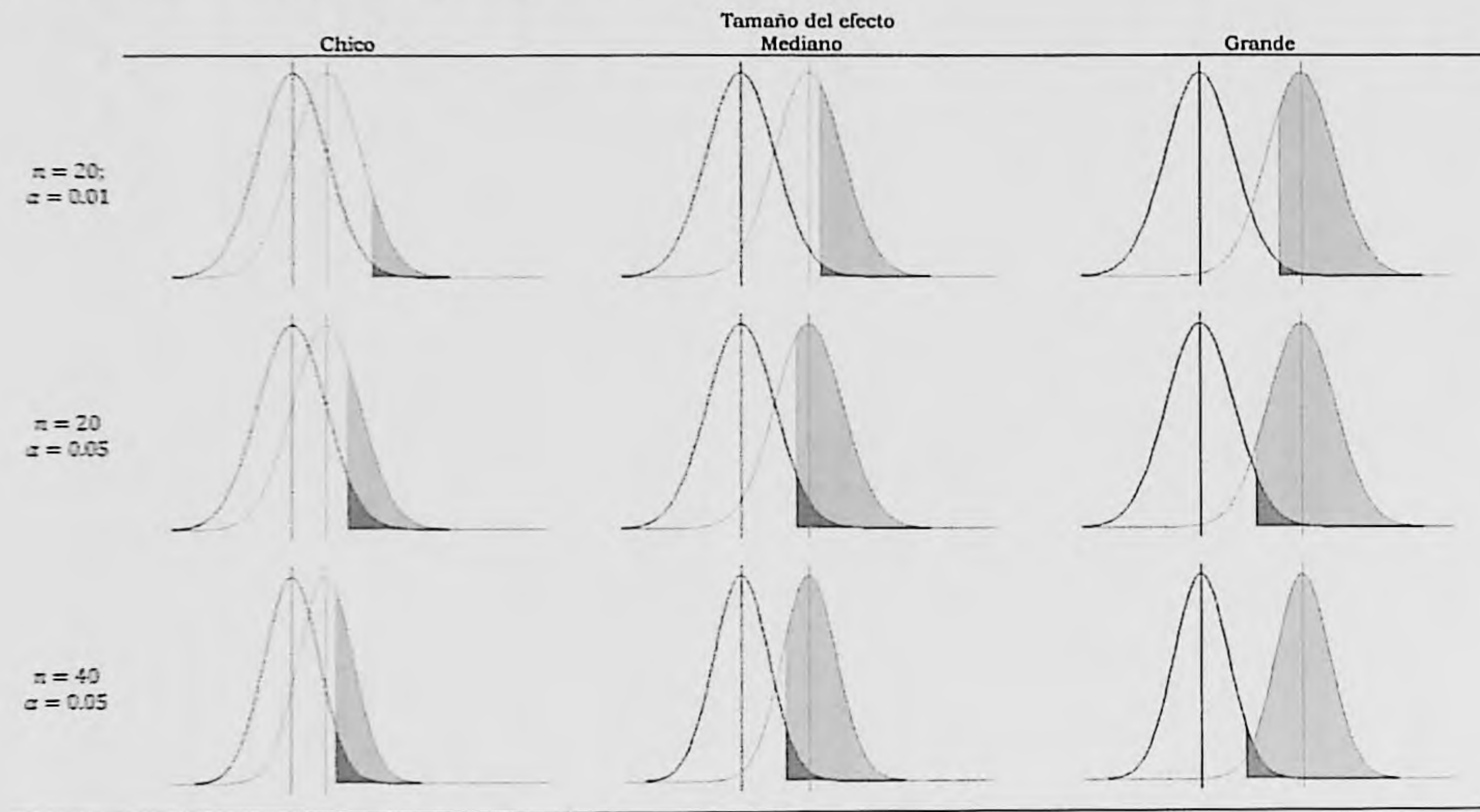
También participa de esta relación el tamaño de la muestra, ya que si la muestra es de mayor tamaño, las varianzas de los estimadores se reducen (consistencia) y el área que corresponde a la potencia aumenta. Es decir que muestras grandes dan lugar a mayor probabilidad de rechazar hipótesis nulas falsas, dicho de otra manera, las muestras grandes tienen más probabilidad de detectar diferencias, aunque éstas sean pequeñas. Esto conduce a que muestras muy grandes pueden dar resultados significativos aunque las diferencias sean ínfimas, por eso es muy necesario informar el tamaño del efecto para que se pueda tener una interpretación correcta de los resultados.

Aún queda un componente más en esta relación: la probabilidad de cometer error de tipo I, es decir la significación de la prueba. Si esta es muy pequeña, fijada así para reducir el riesgo de rechazar una hipótesis nula que sea verdadera, entonces también decrece la potencia, es decir, se vuelve más probable aceptar una hipótesis nula que es falsa y así pasar por alto un resultado que podría haber sido detectado.

Son entonces cuatro los elementos que interactúan: potencia, significación, tamaño del efecto y tamaño de la muestra. Si se establece a priori i) cuál es el tamaño del efecto que se quiere detectar (grande, mediano o pequeño), ii) qué riesgo de rechazar una hipótesis nula que es verdadera se está dispuesto a correr (significación) y iii) qué probabilidad de detectar diferencias se pretende (potencia); entonces el tamaño de la muestra queda fijado. Análogamente, si se tiene un número de casos dado y se fija la potencia y la significación, se puede calcular el tamaño del efecto que la prueba será capaz de detectar. Así, con tres de los elementos mencionados, queda determinado el cuarto. Las previsiones sobre la relación entre estos cuatro elementos se conocen como **análisis de la potencia** y es una parte importante del diseño de una investigación, porque sirve para calcular a priori el tamaño de muestra requerido para detectar un determinado tamaño de efecto con un nivel de significación dado. Si el tamaño de muestra está fijado (por presupuesto o tiempo), el análisis de la potencia permite saber qué probabilidad hay de detectar un determinado tamaño del efecto. También es posible establecer cuál es la potencia que deseamos para nuestro estudio o, al revés, qué probabilidad de cometer Error de Tipo II (no rechazar una H_0 que es falsa) estamos dispuestos a asumir.

Los gráficos de la página siguiente ilustran, como se hizo en el capítulo 11 la relación entre estos elementos. Las áreas sombreadas más claro corresponden a la potencia, las oscuras al nivel de significación, y la distancia entre los centros de las campanas representa el tamaño del efecto.

Relación efecto, muestra, potencia y significación



Las relaciones entre el tamaño de muestra, la potencia, el tamaño del efecto y el nivel de significación dependen de cuál sea el tipo de estudio planteado y cuál la medida de tamaño del efecto elegida. Eso hace que las operaciones para calcular uno de ellos conociendo los otros tres, sean complejas. En el capítulo 11 se construyeron las curvas de potencia para diferentes valores de la hipótesis alternativa (es decir del verdadero valor del parámetro) y diferentes tamaños de muestra. Sin embargo, esos cálculos dependen de los valores concretos de los parámetros (en particular, de las diferencias entre el valor paramétrico que sostiene H_0 y el que sostienen las diferentes alternativas H_k); ahora, con el tamaño del efecto estandarizado, solo hace falta saber qué prueba se realiza para obtener la curva de potencia.

Si bien existen calculadoras on line¹¹⁷, es recomendable, por su flexibilidad, usar el paquete *pwr* (Champely, 2017) en R. Este conjunto de rutinas genera, para cada prueba estadística, uno de los cuatro valores a partir de los otros tres. Por ejemplo, una prueba t unilateral derecha, para comparar dos grupos a un nivel de significación del 5%, con una potencia de 80% requiere, para detectar un efecto grande ($d=0.85$), 18 casos. El comando en R tiene esta forma:

```
pwr.t.test(power = .80,d=0.85,sig.level=.05,alternative="greater")
```

Y la salida:

```
Two-sample t test power calculation

      n = 17.83127
      d = 0.85
sig.level = 0.05
  power = 0.8
alternative = greater
```

NOTE: n is number in *each* group

Que aclara que 18 es el número de casos en cada grupo. Si el riesgo de creer que los grupos son iguales cuando en realidad difieren, es grande, se debe reducir la probabilidad de aceptar una H_0 que es falsa, que es la probabilidad de Error de Tipo II, entonces se necesita mayor potencia. Este sería el caso de recomendar una intervención que sería muy beneficiosa y deben extremarse los recaudos para asegurar no descartarla (aceptando H_0) por error. Al aumentar la potencia al 95%:

```
pwr.t.test(power = .95,d=0.85,sig.level=.05,alternative="greater")
```

Se obtiene:

¹¹⁷ Por ejemplo <http://www.socscistatistics.com/effectsize/Default3.aspx> o también <https://www.uccs.edu/~lbecker/>.

Two-sample t test power calculation

```
n = 30.65961
d = 0.85
sig.level = 0.05
power = 0.95
alternative = greater
```

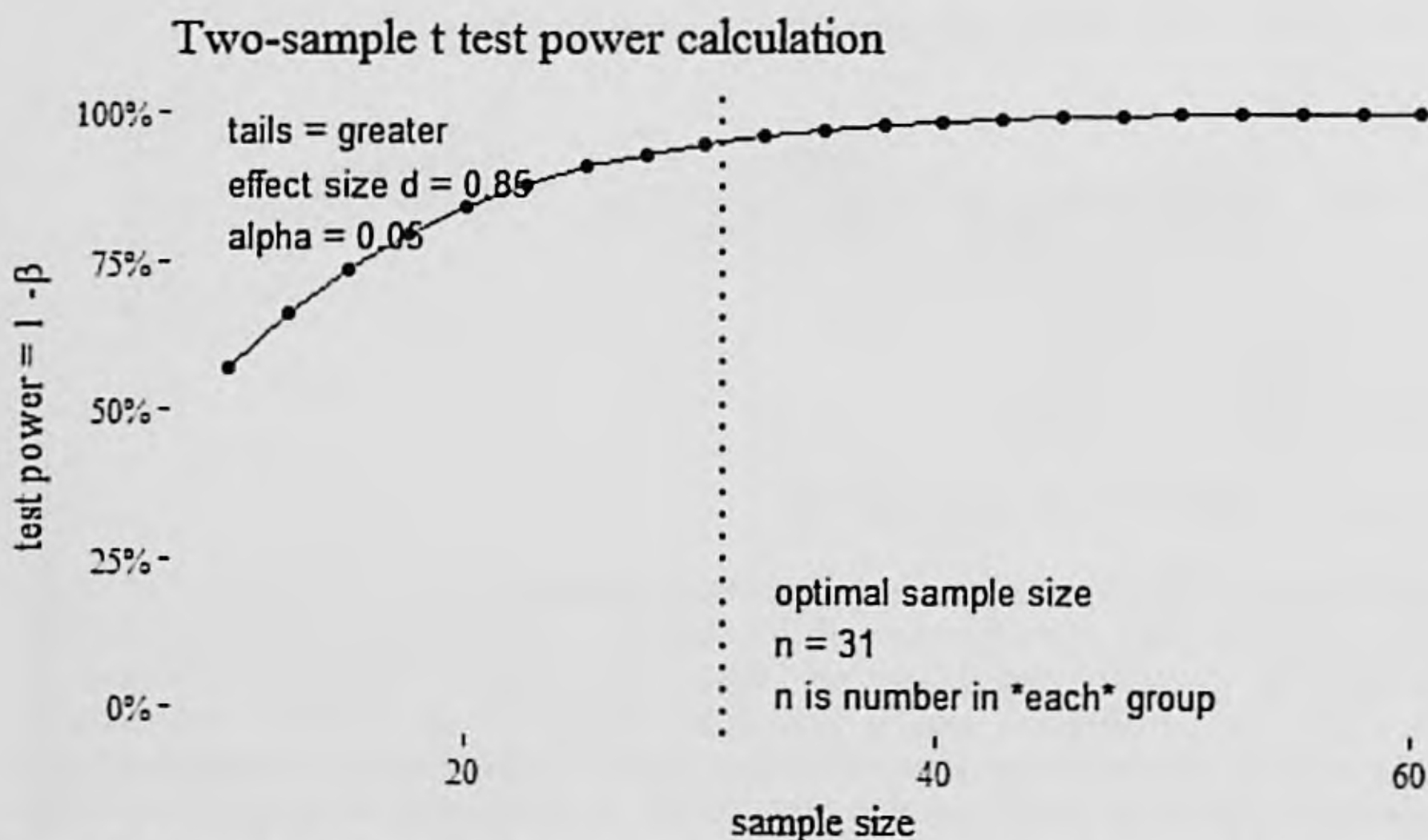
NOTE: n is number in **each** group

Es decir, 31 casos en cada grupo.

Este paquete permite también graficar la potencia como función del tamaño de muestra y así explorar diferentes posibilidades. El comando:

```
plot(pwr.t.test(power
= .95,d=0.85,sig.level=.05,alternative="greater"))+theme_tufte()
```

Produce este gráfico:



El valor 31 para el tamaño de muestra se considera óptimo porque a partir de ahí la curva crece más lentamente y las ganancias de potencia son pequeñas, lo que no se justifica aumentar el número de casos.

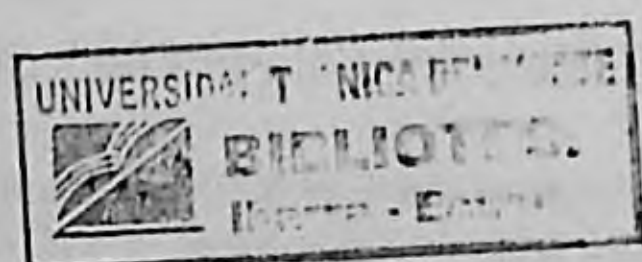
El video *tamaño del efecto, muestra potencia y significación* describe el uso del paquete *pwr* en el entorno RStudio.

Referencias bibliográficas

- Alvarado, H. & Batanero, C. (2007). Dificultades de comprensión de la aproximación normal a la distribución binomial. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 67, pp. 1-7.
- American Psychological Association. (2010). *Publication manual of the APA* (sexta edición). Washington, DC: APA.
- Balzarini, M.G., González, L., Tablada, M., Casanoves, F., Di Rienzo, J.A., & Robledo, C.W. (2008). *Manual del Usuario*, Córdoba: Brujas.
- Bayley, N. (2006). *Bayley Scales of Infant and Toddler Development*– Third Edition. San Antonio, TX: Harcourt Assessment
- Cepeda-Cuervo, E., Aguilar, W., Cervantes, V., Corrales, M., Díaz, I. & Rodríguez, D. (2008). Intervalos de confianza e intervalos de credibilidad para una proporción. *Revista Colombiana de Estadística* 31, 2, pp. 211-228.
- Champely, S. (2017). pwr: Basic Functions for Power Analysis. R package version 1.2-1. <https://CRAN.R-project.org/package=pwr>
- Cohen J. (1994). The Earth is Round ($p < .05$). *American Psychologist*, vol 49, N. 12, 997-1003
- Cohen, J. (1962). The statistical power of abnormal-social psychological research: A review *Journal of Abnormal and Social Psychology*, 65(3): 145-153.
- Cohen, J. (1988). *Statistical power analysis for the behavioral sciences*. Hillsdale, NJ: Erlbaum
- Cumming, G. (2012). *Understanding The New Statistics: Effect Sizes, Confidence Intervals, and Meta-Analysis*. New York: Routledge
- Di Rienzo, J.A., Casanoves, F., Balzarini, M.G., Gonzalez, L., Tablada, M. & Robledo, C.W. *InfoStat versión 2010*. Grupo InfoStat, FCA, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina. URL <http://www.infostat.com.ar>
- Díaz Batanero, C. (2007). "Viabilidad de la Enseñanza de la Inferencia Bayesiana en el Análisis de Datos en Psicología". Tesis Doctoral Facultad de Psicología. Universidad de Granada. Disponible en <http://hera.ugr.es/tesisugr/16582664.pdf> accedido el 20/01/2011.
- Dziula, C., & Reyna, C. (2005). *Tolerancia rápida a los efectos del etanol en ratas periadolescentes: efectos diferenciales sobre patrones térmicos y de conducta exploratoria* (Tesis de grado no publicada). Facultad de Psicología. Universidad Nacional de Córdoba, Argentina.
- Ekstrom, J. (2011). The phi coefficient, the tetrachoric correlation coefficient, and the Pearson-Yule debate (UCLA Department of Statistics). Disponible en <https://escholarship.org/uc/item/7qp4604r>
- Ellis, P. (2010). *The Essential Guide to Effect Sizes: Statistical Power, Meta-Analysis, and the Interpretation of Research Results*. Cambridge University Press.

- Everitt, S. & Wykes, T. (2001). *Diccionario de estadística para psicólogos*. Barcelona: Ariel
- Fellows, I. (2012). Deducer: A Data Analysis GUI for R. *Journal of Statistical Software*, 49(8), 1-15. URL <http://www.jstatsoft.org/v49/i08/>.
- Field, A., Miles, J. & Field, Z. (2012). *Discovering Statistics Using R* Sage Publications Ltd
- Fox, J. & Bouchet-Valat, M. (2018). Rcmdr: R Commander. R package version 2.4-2.
- Fox, J. (2017). *Using the R Commander: A Point-and-Click Interface for R*. Boca Raton FL: Chapman and Hall/CRC Press.
- Galton, F. (1875). Statistics by intercomparison, with remarks on the law of frequency of error. *Philosophical Magazine*. 4th series. 49: 33 - 46.
- Garret, H. (1983). *Estadística en Psicología y Educación*. Barcelona: Paidós.
- Goodman, L. (1961). Snowball Sampling *Annals of Mathematical Statistics*, V. 32, N. 1 148-170.
- Guerrero R., González, C. & Medina, E. (1986). *Epidemiología*. Addison-Wesley Iberoamericana.
- Heckathorn, D. (1997). Respondent-Driven Sampling: A New Approach to the Study of Hidden Populations. *Social Problems*. V. 44 N. 2
- Kendall M. G. (1948): *Rank correlation methods*. Londres: Griffin
- Kirk, R. E. (2003) The Importance of Effect Magnitude, en *Handbook of Research Methods in Experimental Psychology* (ed S. F. Davis). Oxford: Blackwell Publishing Ltd.
- Ledesma, R., Macbeth, G., & Valero-Mora, P. (2011). Software for Computing the Tetrachoric Correlation Coefficient. *Revista Latinoamericana de Psicología*, 43(1), 181-189. Consultado en 17 de enero de 2018, en http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0120-05342011000100015&lng=en&tlng=en.
- Lounsbury, J.; Park, S.; Sundstrom, E.; Williamson, J. & Pemberton, E. (2004). Personality, Career Satisfaction and Life Satisfaction: Test of a Directional Model. *Journal of Career Assessment*, 12, 395 – 406
- Marzuk, P., Tierney, H., Tardiff, K., Gross, E., Morgan, E., Hsu, M. & Mann, J. (1988). "Increased Risk of Suicide in Persons With AIDS." *The Journal of the American Medical Association*. 259(9):1333-1337.
- McGill, R., Tukey, J. & Larsen, W. (1978). "Variations of Box Plots". *The American Statistician* 32 (1): 12-16
- Medrano, L.; Mirantes, R. & Marchetti, P. (2009). "Evaluación del Impacto de un Programa de Entrenamiento en Aprendizaje Autorregulado y Habilidades Sociales Académicas en Ingresantes Universitarios". *Revista Argentina de Ciencias del Comportamiento* 1 (2), 116-117.

- Newcombe, R. & Merino, C. (2006). Intervalos de confianza para las estimaciones de proporciones y las diferencias entre ellas. *Interdisciplinaria* 23, 141–154.
- Neyman, J., & Pearson, E. (1933). On the Problem of the Most Efficient Tests of Statistical Hypotheses. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 231, 289-337.
- Organización Panamericana de la Salud (2003): *Informe mundial sobre la violencia y la salud*. Oficina Regional para las Américas de la Organización Mundial de la Salud, Washington, D.C.
- R Core Team (2017). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL <https://www.R-project.org/>
- Raven, J. C. (1936). "Mental tests used in genetic studies: The performance of related individuals on tests mainly educative and mainly reproductive". MSc Thesis, University of London.
- Revelle, W. (2017) psych: Procedures for Personality and Psychological Research, Northwestern University, Evanston, Illinois, USA, <https://CRAN.R-project.org/package=psych> Version = 1.7.8.
- Scheaffer, R., Mendenhall, W. & Ott, L. (1997). *Elementos de Muestreo*. México DF:Grupo Editorial Iberoamérica.
- Siegel S. (1956): *Nonparametric Statistics for the Behavioral Sciences* Nueva York: McGraw-Hill,
- Spearman, C. (1904). "General intelligence objectively determined and measured". *American Journal of Psychology*, 15, 201–293.
- Spearman, C. (1923). *The nature of intelligence and the principles of cognition*. London: Macmillan.
- Stevens, S. (1951). "Mathematics, measurement and psychophysics". En S.S. Stevens (Ed.), *Handbook of experimental psychology* (pp. 1–49). New York: Wiley.
- Tankard, J. (1984). *The Statistics Pioneers* Cambridge Massachusetts: Schenkman
- Tukey, J. (1977). *Exploratory Data Analysis*. Reading, MA: Addison-Wesley.
- UNC (2014). *Anuarios Estadísticos. Anuario 2014 en formato abierto*. Disponible en <https://www.unc.edu.ar/node/1282>





BIBLIOTECA UTN



059300

Otros títulos

Encuesta y Estadística
Cecilia Blanco

Estadística y Biometría
AA.VV.

*Cómo iniciar a los jóvenes en la
investigación científica*
María Luisa Koberski

Aprender a Investigar
Ezequiel Ander-Egg

Sociología de la educación
Ana María Brigido

Encuestas.
Elementos para su diseño y análisis
Livio Graso

*Estadística para las Ciencias
Agropecuarias*
Julio Di Rienzo y otros

Métodos Estadísticos de Investigación

El presente es un manual de referencia para los procedimientos de más amplia aplicación en investigación cuantitativa en Ciencias Sociales, Humanas y de la Salud. Está estructurado de manera clásica; comienza con técnicas para la descripción de datos y avanza hasta la inferencia donde se trata la estimación por intervalo y la prueba de hipótesis. Los procedimientos se distinguen según su aplicación a datos que tengan origen en variables de diferente nivel de medición, y se dedica un capítulo a pruebas no paramétricas, para el caso en que se cuenta con variables de bajo nivel, pocos casos o no se cumplen los supuestos que sostienen las otras pruebas.

Se trata con detenimiento el problema de la relación entre variables, porque se considera que es el eje de los interrogantes en la investigación que involucra sujetos humanos, sea planteada estrictamente en esos términos o bien como comparación de grupos: diseños experimentales, evaluación de impacto, identificación de factores explicativos de procesos sociales, son todos campos en que la comparación entre grupos o la relación entre variables es la expresión técnica de preguntas teóricas.

Su elaboración tuvo en cuenta i) la edición anterior Estadística para Psicología y Educación (Bologna, 2014), ii) la experiencia en el uso de ese material durante varios años en las cátedras de Estadística en carreras de ciencias sociales de grado y posgrado, y iii) la discusión con profesores de materias que usan estos contenidos. De la edición anterior se retuvieron partes que había sido consideradas valiosas, la experiencia con alumnos ayudó a mejorar la presentación de los temas así como los ejemplos, en búsqueda de más familiaridad con los contenidos. Finalmente, los intercambios con otros docentes llevaron a la inclusión de contenidos que no estaban presentes en el manual anterior, como otros coeficientes de asociación y un capítulo sobre la relación entre potencia, tamaño del efecto, significación y tamaño de muestra.

Las operaciones se realizan con Infostat ® (Di Rienzo et al., 2013) y, para procedimientos más especializados, hay referencias a R (R Team Core, 2015)

Los procedimientos para solicitar las aplicaciones de software se encuentran en videos a los que se accede desde sus códigos QR listados al comienzo del libro.

BIBLIOTECA UTM



059300



ISBN 978-987-760-114-5



9 789877 601145