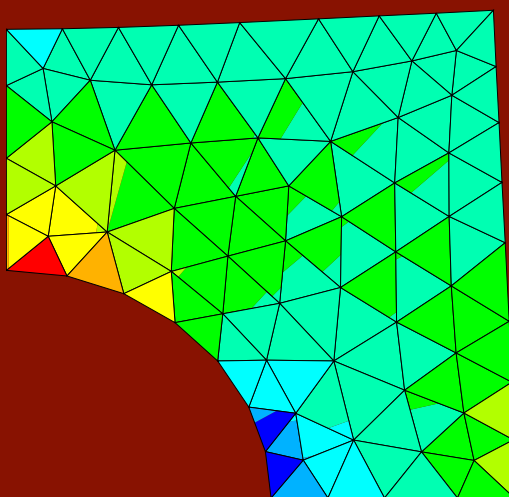


Apuntes para el Análisis de Estructuras

Universidad de Sevilla



Antonio Romero Ordóñez, Pedro Galvín Barrera

Mario Solís Muñiz

Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla



Apuntes para el Análisis de Estructuras

Universidad de Sevilla

Apuntes para el Análisis de Estructuras

Universidad de Sevilla

Antonio Romero Ordóñez, Pedro Galvín Barrera

Mario Solís Muñiz

Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla



© 2020. Antonio Romero Ordóñez, Pedro Galvín Barrera
Mario Solís Muñiz

© Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Camino de los Descubrimientos sn
41092 Sevilla
www.etsi.us.es
Sevilla, 2020

Impreso en España - Printed in Spain
Registro de la propiedad intelectual
ISBN

No está permitida la distribución de este texto, ni el código asociado, a terceras personas, por cualquier medio. El uso de este texto y el código asociado está restringido al Servicio de Publicaciones de la Universidad de Sevilla, así como a los proyectos final de carrera, máster, tesis y documentos similares que se defiendan en la misma.

Diseño de cubierta: Fernando García García.
Diseño de maquetación ($\text{\LaTeX}$): F. Javier Payán Somet © 2014.

Índice

<i>Índice</i>	<i>I</i>
1 Introducción al análisis de estructuras	1
1.1 Contenido	6
2 El Método de los Elementos Finitos	9
2.1 Introducción	9
2.2 El método de los residuos ponderados	14
2.2.1 Formulación matricial	17
2.3 Formulación del MEF	18
2.3.1 Criterios de convergencia	21
2.3.2 Error en la discretización y grado de convergencia	22
2.4 Problemas propuestos	26
3 Elementos Finitos tipo barra	27
3.1 Introducción	27
3.2 Formulación del elemento sometido a esfuerzo axial	28
3.2.1 Formulación matricial	32
3.2.2 Deformaciones unitarias iniciales	33
3.3 Transformación de coordenadas	35
3.4 Discretización con n -elementos	37
3.5 Formulación del elemento sometido a esfuerzos de flexión: Formulación de Euler-Bernoulli	40
3.6 Generalización del elemento	46
3.7 Cálculo de esfuerzos	49
3.7.1 Puntos óptimos para el cálculo de tensiones y deformaciones	51
3.8 Formulación del elemento sometido a esfuerzos de flexión: Formulación de Timoshenko	53
3.8.1 Bloqueo de la solución	60

3.8.2	Integración reducida	63
3.9	Requisitos para la convergencia del MEF	65
3.9.1	Continuidad	65
3.9.2	Derivabilidad	65
3.9.3	Integrabilidad	65
3.9.4	Criterio de la parcela	66
3.9.5	Condición de sólido rígido	68
3.9.6	Otros requisitos deseables para la convergencia	68
3.10	Consideraciones sobre compatibilidad y equilibrio de la solución	69
3.11	Tipos de error en la solución obtenida con el MEF	69
3.12	Programación del MEF para el cálculo de estructuras de barra	70
3.12.1	Estructura del programa	70
3.12.2	Datos de entrada	70
3.12.3	Matrices y vectores elementales	72
3.12.4	Ensamblaje del sistema global de ecuaciones	73
3.12.5	Condiciones de contorno y solución	75
3.12.6	Cálculo de esfuerzos	76
3.13	Problemas	80
3.13.1	Problema 1	80
3.13.2	Problema 2	82
3.13.3	Problema 3	85
3.13.4	Problema 4	88
4	Introducción al análisis no-lineal de estructuras	91
4.1	Introducción	91
4.2	Aproximación incremental de la solución	93
4.2.1	Método Newton-Raphson	96
4.3	Comportamiento inelástico de materiales	98
4.3.1	Modelos de endurecimiento	101
4.3.2	Modelos multiaxiales de plasticidad	102
4.4	Análisis no-lineal de estructuras	112
4.4.1	Plasticidad en barras	112
4.4.2	Rigidización tensional e inestabilidad	113
4.4.3	Grandes deformaciones	114
5	Inestabilidad en estructuras	115
5.1	Introducción	115
5.2	Elementos simples sometidos a compresión	118
5.2.1	Efecto de la excentricidad de la carga	120
5.2.2	Imperfecciones geométricas	122
5.2.3	Estados de flexo-compresión	125
5.2.4	Influencia de las condiciones de apoyo	127
5.2.5	Longitud equivalente de pandeo. La curva Euler	130

5.3	Pandeo global de estructuras	132
5.3.1	Equilibrio elemental: matriz rigidez geométrica	132
5.3.2	Cálculo de la estructura. Factor de pandeo	138
5.4	Formulación del MEF	140
5.5	Problemas propuestos	142
6	Análisis dinámico de sistemas de un grado de libertad	145
6.1	Introducción	145
	¿Qué tienen en común un depósito elevado de agua, un Chupa Chups y un sistema masa-muelle?	145
6.2	Ecuación de equilibrio de un sistema de un grado de libertad	147
6.3	Influencia de las fuerzas estáticas en la respuesta dinámica de una estructura	148
6.4	Respuesta en vibración libre	149
6.4.1	Respuesta en vibración libre no amortiguada	150
6.4.2	Respuesta en vibración libre críticamente amortiguada	151
6.4.3	Respuesta en vibración libre subamortiguada	152
6.5	Respuesta en vibración forzada	155
6.6	Respuesta a cargas armónicas	156
6.6.1	Respuesta a cargas armónicas en sistemas no amortiguados	156
6.6.2	Respuesta a cargas armónicas en sistemas amortiguados	157
6.6.3	Respuesta resonante	159
6.7	Aislamiento de vibraciones	159
6.8	Respuesta sísmica	164
7	Análisis dinámico de múltiples grados de libertad	171
7.1	Introducción	171
7.2	Ecuación de equilibrio de sistemas de múltiples grados de libertad	172
7.3	Formulación del Método de los Elementos Finitos	173
7.3.1	Matriz de masas concentradas	177
7.3.2	Evaluación de la matriz de amortiguamiento	179
	¿Qué sucede si salto de un trampolín?	179
7.4	Respuesta en vibración libre. Análisis modal	180
7.4.1	Condición de ortogonalidad	183
7.4.2	Matriz de amortiguamiento proporcional	187
7.4.3	Actualización de modelos numéricos	190
7.5	Superposición modal	192
7.5.1	Amortiguamiento	194
7.6	Análisis modal espectral	201
7.6.1	Norma de Construcción Sismorresistente: Parte general y edificación (NSCE-02)	204
7.7	Análisis transitorio	211
7.8	Análisis armónico	216

El típico ejemplo de rotor desequilibrado	216
7.8.1 Función de respuesta en frecuencia	220
7.8.2 Relación tiempo-frecuencia	220
7.9 Problemas propuestos	228
8 Teoría de placas	229
8.1 Introducción	229
8.2 Campo de desplazamientos	230
8.3 Tensor de deformaciones	231
8.4 Tensor de tensiones	232
8.5 Esfuerzos	235
8.6 Ecuación de equilibrio	237
8.7 Teoría de placa delgada o de Kirchhoff	240
8.8 Condiciones de contorno	244
8.9 Validez de la teoría de placas	246
8.10 Problema de tensión plana	246
8.11 Elementos Finitos tipo placa	248
8.11.1 Formulación del elemento placa: Teoría de Kirchhoff	249
8.11.2 Formulación del elemento placa: Teoría de Reissner-Mindlin	255
9 Teoría de láminas	271
9.1 Introducción	271
9.2 Teoría general de láminas	272
9.3 Teoría de la membrana: láminas de revolución	274
9.3.1 Ecuaciones de Equilibrio	275
9.3.2 Problema axisimétrico	281
9.3.3 Validez teoría de la membrana	284
9.4 Problemas propuestos	284
Apéndice A Matrices de rigidez elementales	289
A.1 Elemento articulado	289
A.1.1 Coordenadas locales	289
En 2 coordenadas locales	289
En 4 coordenadas locales	289
A.1.2 Coordenadas globales	290
A.2 Elemento plano con nudos rígidos	290
A.2.1 Coordenadas locales	290
A.2.2 Coordenadas globales	291
Apéndice B Matrices de masa congruente	293
B.1 Elemento articulado	293
B.1.1 En 2 coordenadas locales	293
B.1.2 En 4 coordenadas locales	293

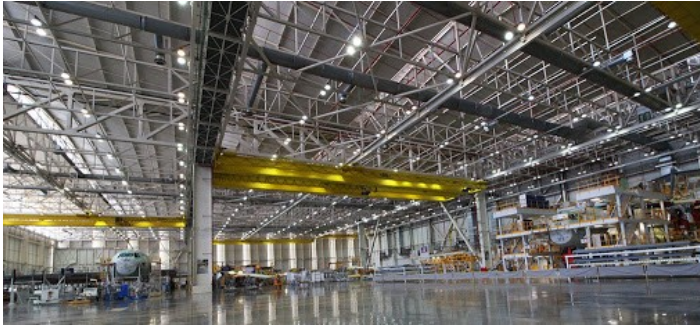
Apéndice C Matriz de rigidez geométrica	295
C.1 Elemento articulado	295
C.1.1 Coordenadas locales	295
En 4 coordenadas locales	295
C.1.2 Coordenadas globales	296
C.2 Elemento plano nudos rígidos	296
C.2.1 Coordenadas locales	296
C.2.2 Coordenadas globales	297
<i>Índice de Figuras</i>	299
<i>Índice de Tablas</i>	305
<i>Índice de Códigos</i>	307
<i>Bibliografía</i>	311
<i>Índice alfabético</i>	313
<i>Glosario</i>	313

1 Introducción al análisis de estructuras

La Real Academia Española recoge cuatro entradas para el término *estructura*. La primera acepción define una estructura como *una disposición o modo de estar relacionadas las distintas partes de un conjunto*. En este sentido, en una estructura cada parte o elemento que desarrolla una función específica e interacciona con otros elementos que componen la estructura, posibilitando que ésta cumpla con una función para la que está diseñada. En segundo lugar, se considera una estructura a la *distribución y orden de las partes importantes de un edificio*. Puede tratarse de la distribución de las plantas de un edificio y, también, de la distribución de las vigas y pilares que sirven de soporte a la construcción. En la tercera entrada del término *estructura* se hace referencia a la *distribución y orden con que está compuesta una obra de ingenio, como un poema, una historia, etc.* Y, por último, se define una estructura *como armadura, generalmente de acero u hormigón armado, que, fija al suelo, sirve de sustentación a un edificio*. Algunas de estas definiciones permiten comprender, en mayor o menor medida, el concepto de estructura que se estudiará en este libro. Pueden servir de ejemplo las estructuras mostradas en la Figura 1.1.

Apuntes para el Análisis de Estructuras es un libro de texto para la enseñanza y el estudio del análisis de estructuras en ingeniería en los ámbitos industrial, civil y aeroespacial, entre otros. Los alumnos de ingeniería estudian esta disciplina con un grado de profundidad que está determinado por el itinerario curricular seguido. En general, el objetivo de este tipo de enseñanza se puede definir como el cálculo de los efectos producidos por una determinada configuración de acciones externas que actúa sobre una estructura, que son necesarios para realizar, posteriormente, las comprobaciones que permiten obtener un diseño seguro de acuerdo a unos estándares tecnológicos.

El análisis de una estructura comienza con la formulación un modelo matemático que permite idealizar tanto la geometría de la estructura, como las condiciones de apoyo y las acciones que actúan sobre ésta, obteniéndose de esta forma un conjunto de ecuaciones que permite obtener la respuesta de la estructura. Este modelo debe reproducir adecuadamente el comportamiento estructural de acuerdo a la rigidez de los elementos que la forman



(a)



(b)



(c)

Figura 1.1 (a) Hangar de la planta de montaje del avión de transporte militar A400M (Sevilla). (b) Planta de energía termosolar Gemasolar (Fuentes de Andalucía). (c) Terminal de cruceros del puerto de Sevilla.

(barras, placas, láminas, etc.), de acuerdo al comportamiento del material (elástico, elástico-plástico, isótropo, ortótropo, anisótropo, etc.), y a las uniones entre elementos, a los efectos de segundo orden y a los vínculos con el terreno o con otros sistema estructurales. El modelo de una estructura se formula a partir de las ecuaciones de equilibrio que permiten relacionar las acciones externas con los esfuerzos internos. En un análisis dinámico se

considerarán las características de masa y amortiguamiento de la estructura, las fuerzas de inercia y, también, la masa del resto de elementos no estructurales como los cerramientos, pavimentos, tabiquería, etc. La validez del modelo formulado estará condicionada por la capacidad de reproducir la respuesta real de la estructura.

Por ejemplo, en la Figura 1.2 se muestra la representación esquemática de la cercha de una cubierta solicitada por la acción del viento. En el modelo de esta estructura se considera que las barras están conectadas entre sí mediante uniones articuladas, y que la transferencia de la carga se hace de forma puntual en los nudos de la estructura. Además, se asume que la rigidez de los pilares es suficiente para que el desplazamiento horizontal y vertical de los apoyos sean nulos. Estas consideraciones implican que todas las barras de la estructura estarán sometidas a unos estados de tracción o compresión simple. De esta forma, se formula un modelo de la estructura cuya validez está limitada por las hipótesis realizadas.

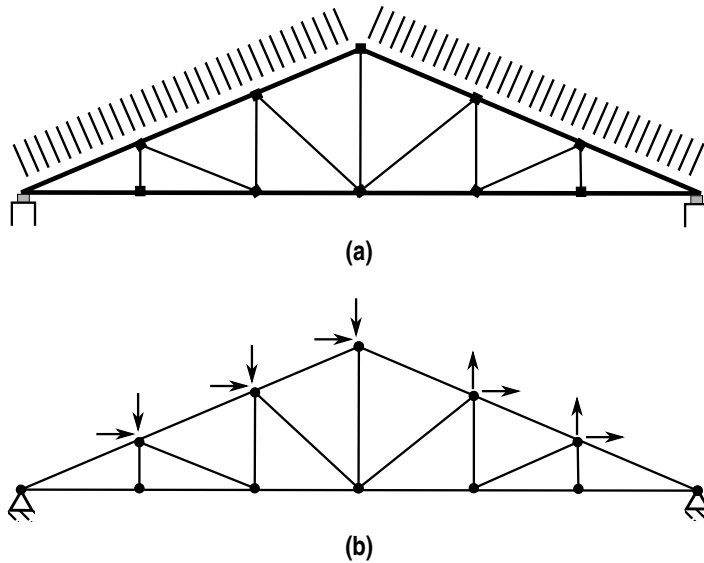


Figura 1.2 (a) Representación esquemática de una estructura y (b) modelo estructural asociado.

Los métodos de análisis global de una estructura se pueden clasificar en: *i*) análisis lineal, basado en la hipótesis de comportamiento elástico y lineal del material y de pequeños desplazamientos; *ii*) análisis no-lineal, teniendo en cuenta una ley no-lineal de comportamiento del material; y *iii*) análisis con no-linealidades geométricas, en el que la condición de equilibrio se impone sobre la deformada de la estructura. El comportamiento no-lineal de una estructura invalidará el principio de superposición.

Los elementos estructurales se clasifican de acuerdo a sus dimensiones características en: *i*) elementos unidimensionales, cuando una de las dimensiones es mucho mayor que las otras dos; *ii*) bidimensionales, si una de sus dimensiones es más pequeñas que las otras dos; o *iii*) tridimensionales, cuando ninguna de las dimensiones difiere significativamente del

resto. De esta forma, se formulan elementos para modelizar el comportamiento de vigas, placas, láminas y sólidos. Por tanto, para describir adecuadamente el comportamiento de la estructura será necesario conocer el tipo de elemento estructural más adecuado.

Cuando la deformación del terreno modifica sustancialmente el comportamiento de la estructura será necesario incorporar en el modelo los efectos de la interacción entre el suelo y la estructura. Para incorporar de forma simplificada en el modelo la rigidez del terreno se puede recurrir a sistemas de muelles y amortiguadores que representen el vínculo entre la cimentación de la estructura y el terreno, pero en otros casos, cuando no sea adecuado hacer esta simplificación, deberá realizarse un modelo más complejo de la estructura y de la zona del terreno adyacente.

Todos estos aspectos permitirán formular un modelo matemático que represente adecuadamente el comportamiento de la estructura. En general, estos modelos son complejos y su resolución no es sencilla, y sólo en algunos casos es posible obtener una solución analítica del problema. Sin embargo, sí es posible obtener soluciones aproximadas utilizando métodos numéricos. Actualmente, existe un número elevado de métodos numéricos, entre los que destacan los métodos de elementos finitos, de diferencias finitas y de elementos de contorno. El Método de los Elementos Finitos (MEF) se usa ampliamente en el análisis de estructuras, y será objeto de estudio en estos apuntes.

El Método de los Elementos Finitos se basa en la discretización de la estructura, lo que posibilita la resolución de problemas complejos que de otro modo son inabordables, a partir de problemas más sencillos que una vez resueltos permiten aproximar la solución buscada. La subdivisión de un problema en componentes o elementos cuyo comportamiento es más fácil de comprender y, posteriormente, la reconstrucción del sistema original a partir de estos elementos, es la idea subyacente del MEF. El concepto de discretización se aplica tanto la geometría de la estructura como al comportamiento de los elementos estructurales. En el análisis estructural se define, en primer lugar, una relación entre las fuerzas y los desplazamientos de cada elemento de la estructura para, posteriormente, ensamblar el modelo discreto imponiendo las condiciones de equilibrio de fuerzas y la compatibilidad de desplazamientos entre los elementos.

La solución obtenida mediante el modelo discreto es una aproximación de la solución real del problema. El grado de exactitud depende, en primer lugar, de la discretización de la estructura. Por ejemplo, la aproximación de la geometría de un arco puede no ser adecuada si no se representa con exactitud la curvatura de la estructura. Por otra parte, la discretización del campo de desplazamientos en una parte de la estructura donde se producen gradientes de tensiones elevados deberá ser suficiente para calcular con precisión el nivel máximo de tensiones. Por tanto, la validez de la solución obtenida depende de las aproximaciones realizadas para formular el modelo discreto de la estructura. Así mismo, también pueden aparecer errores en la resolución de las ecuaciones del modelo discreto.

En la Figura 1.3 se muestra un modelo tridimensional de elementos finitos para el análisis dinámico del puente de la Barqueta ¹ (Sevilla). El análisis se realizó con el programa comercial ANSYS. El puente de la Barqueta se construyó para la Exposición Internacional de 1992. Fue una estructura innovadora, diseñada por J.J. Arenas y M. Pantaleón, compuesta

¹ P. Galvín, J. Domínguez / Journal of Constructional Steel Research 63 (2007) 1024–1035

de un arco atirantado de acero, cuyos extremos forman un pórtico triangular, para soportar el tablero que tiene una longitud total de 168 m.

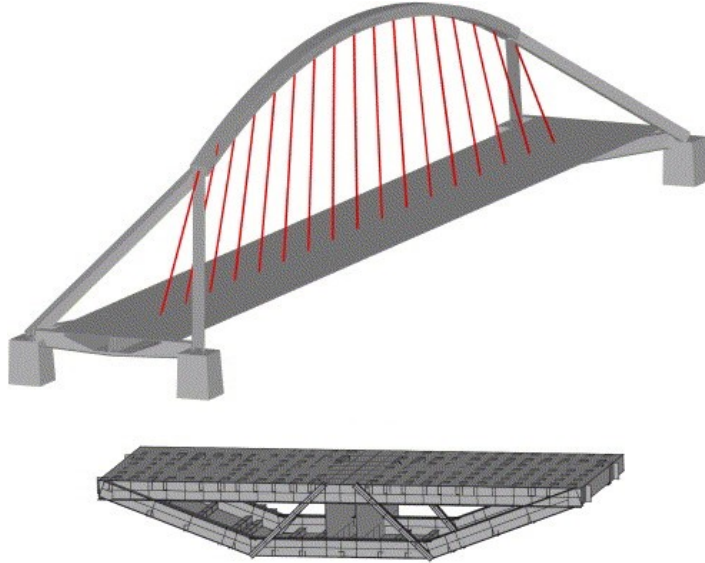


Figura 1.3 Modelo de elementos finitos del puente de Barqueta (Sevilla) y detalle del modelo de la sección transversal del tablero..

Otros aspectos que pueden limitar la validez de la solución del problema estructural son las hipótesis realizadas en la formulación del modelo. La idealización de la estructura puede conllevar algunas simplificaciones de la geometría, de las acciones, de los apoyos, así como del comportamiento de los elementos estructurales y de los materiales. A partir de los resultados obtenidos será necesario verificar las hipótesis realizadas en la idealización de la estructura y, si fuera necesario, modificar el modelo matemático de la estructura.

En la Figura 1.4 se ilustra la resolución de un problema estructural considerando todos los aspectos anteriormente comentados. A partir de un problema estructural (un depósito elevado, un hangar, una pasarela, etc.), se formula un modelo de la estructura definiendo el comportamiento de los elementos de acuerdo a sus condiciones cinemáticas (tirantes, vigas, placas, láminas, etc.), las leyes constitutivas de los materiales, las condiciones de apoyo y las acciones. La resolución de este modelo se aborda mediante la discretización de la geometría y del campo de desplazamientos y, con la solución obtenida, se verifica si el grado de aproximación es suficiente. El análisis de la estructura continuará con un proceso de retro-alimentación hasta obtener una solución de compromiso.

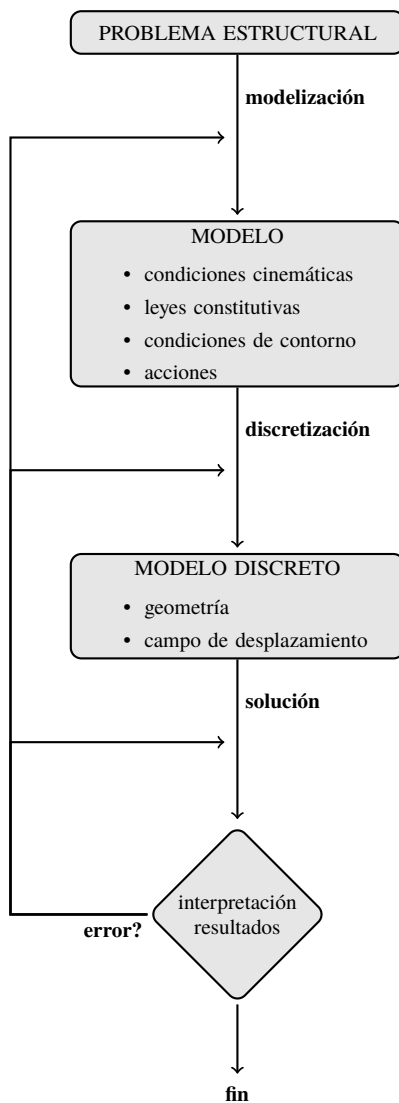


Figura 1.4 Flujo de trabajo en la resolución de un problema.

1.1 Contenido

El contenido de estos apuntes aborda todos estos aspectos con un alcance suficiente para la enseñanza del análisis de estructura en ingenierías. Los autores de este libro imparten docencia en asignaturas de los grados en ingeniería de Tecnologías Industriales, Aeroespacial y Civil, y también en los másteres universitarios en ingeniería Industrial, Aeronáutica y de Caminos, Canales y Puertos. Estas titulaciones se imparten en la Escuela

Técnica Superior de Ingeniería de la Universidad de Sevilla. El contenido de los apuntes se estructura en los siguientes capítulos:

Capítulo 2: El Método de los Elementos Finitos En este capítulo se estudia la formulación del MEF tomando como punto de partida el análisis del problema elástico mediante el método de los residuos ponderados. De esta forma se deduce el Teorema de los Trabajos Virtuales y se estudian casos sencillos de barras con cargas axiales.

Capítulo 3: Elementos Finitos tipo barra En primer lugar se mostrará el Método de los Elementos Finitos (MEF) para el análisis estático en estructuras de barras, estudiando los métodos para su análisis y profundizando en la descripción de los comportamientos resistentes.

Capítulo 4: Introducción al análisis no-lineal de estructuras El análisis no-lineal de estructuras abarca algunos problemas ingenieriles de interés. Por ejemplo, el fallo repentino de estructuras, la evolución de estados de daño, el comportamiento de cables y torres de gran envergadura, entre otros, que necesitan de estudios que consideren no-linealidades de diferente naturaleza. La importancia del análisis no-lineal ha aumentado en los últimos años debido a la necesidad de optimizar los sistemas estructurales, el uso de nuevos materiales, y el cumplimiento de los estados límites últimos.

Capítulo 5: Inestabilidad en estructuras El análisis lineal de una estructura se fundamenta en la hipótesis de que los desplazamientos y los giros producidos por un determinado estados de fuerzas son pequeños. Esta hipótesis es admisible en régimen lineal, donde la geometría de los elementos no varía de forma sustancial durante la acción de las cargas. En estos casos, las ecuaciones de equilibrio que definen la solución del problema se plantean en la situación indeformada. Sin embargo, si la configuración de las acciones o la tipología de la estructura invalidan la hipótesis de pequeños desplazamientos, entonces se dice que la estructura presenta una no linealidad geométrica.

Capítulo 6: Análisis dinámico de sistemas de un grado de libertad

Capítulo 7: Análisis dinámico de sistemas de múltiples grados de libertad

En estos capítulos se estudia la respuesta de estructuras sometidas a cualquier tipo de condiciones que varían a lo largo del tiempo. La variación de las cargas con el tiempo puede ser periódica (sigue la misma variación durante un número determinado de ciclos de carga) o no periódica (por ejemplo, una carga impulsiva). En estos casos, el estudio dinámico de una estructura se diferenciará del caso estático ya que todas las variables del problema (desplazamientos, esfuerzos, tensiones, etc.) son funciones del tiempo. Además, y más importante, el estudio dinámico requiere la consideración de las fuerzas de inercia en la ecuación de equilibrio de fuerzas.

Capítulo 8: Teoría de placas Las placas son elementos resistentes bidimensionales de gran uso en problemas de ingeniería. Se estudiará, fundamentalmente, su comportamiento estático en las hipótesis de placa delgada y gruesa, formulando algunos métodos clásicos y el planteamiento desde la perspectiva del MEF.

Capítulo 9: Teoría de láminas En este capítulo, en primer lugar, se abordará el estudio de los esfuerzos y de las tensiones que aparecen en un lámina según la teoría general. Posteriormente, se obtendrán las ecuaciones de equilibrio en el caso particular de láminas de revolución de acuerdo la teoría de la membrana.

Estos capítulos desarrollarán los contenidos teóricos y prácticos en el análisis de una estructura, y se ilustrarán con algunos ejemplos y problemas propuestos. Además, se proporcionan aplicaciones prácticas resueltas con los programas informáticos ANSYS y MATLAB, y se abordan otros aspectos prácticos en el diseño de estructuras de acuerdo a la Instrucción de Acero Estructural (EAE) y la Norma de Construcción Sismorresistente (NSCE-02).

2 El Método de los Elementos Finitos

2.1 Introducción

El Método de los Elementos Finitos es un método numérico empleado en la resolución de un problema de contorno definido por una ecuación diferencial y unas condiciones de contorno, además de una condiciones iniciales si las variables del problema dependen del tiempo. El concepto de problema de contorno es muy general, encontrándose en numerosas disciplinas en ingeniería, como la mecánica de sólidos, la mecánica de fluidos, termodinámica, entre otras. En estos apuntes el problema de contorno se corresponde con el análisis de una estructura solicitada por unas acciones externas, y unos vínculos que restringen el desplazamiento de algunos puntos del sistema.

Antes de abordar las bases del método es conveniente tratar algunas ideas iniciales que permitan formular el comportamiento de la estructura. La ecuación de equilibrio de una estructura en régimen elástico y lineal está definida en el volumen (dominio) Ω de la propia estructura por la siguiente expresión:

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{x}) + X_i(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.1)$$

donde $\sigma_{ij,j}(\mathbf{x})$ es el tensor de tensiones en un punto $\mathbf{x}$ de la estructura y $X_i(\mathbf{x})$ representa las fuerzas de volumen (por ejemplo, el peso propio). La expresión anterior se puede modificar teniendo en cuenta que el tensor de deformaciones se expresa a partir de los desplazamientos $u_i(\mathbf{x})$ de la estructura como:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.2)$$

De esta forma, las tensiones están relacionadas con las deformaciones por la ley de comportamiento:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} = \frac{C_{ijkl}}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \quad (2.3)$$

en la que el tensor C_{ijkl} contiene las constantes elásticas que describen el comportamiento del material de la estructura. Así, la ecuación de equilibrio definida por (2.1) se modifica como:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{C_{ijkl}}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \right] + X_i(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.4)$$

La ecuación de equilibrio expresada mediante la Ecuación (2.11) define una relación entre la variación desplazamientos y las acciones que solicitan la estructura. Este tipo de relación será recurrente en la formulación de un modelo estructural como se verá a lo largo de estas páginas.

La expresión anterior se completa con las condiciones de contorno. Se considera que sobre el contorno de la estructura $\partial\Omega$ actúan unas fuerzas $f_i(\mathbf{x})$ en una parte denotada por $\partial\Omega_f$, y unos desplazamientos impuestos $\bar{u}_i(\mathbf{x})$ en el resto del contorno definido como $\partial\Omega_u$. Se debe cumplir que $\partial\Omega = \partial\Omega_f \cup \partial\Omega_u$ y $\partial\Omega_f \cap \partial\Omega_u = \emptyset$, es decir, en cualquier punto del contorno de la estructura está definido o bien la fuerza que actúa o el desplazamiento en esa posición, siendo la otra variable una incógnita del problema. Estas condiciones se escriben como:

$$\sigma_{ij} n_j = f_i \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_f \quad (2.5)$$

$$u_i = \bar{u}_i \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_u \quad (2.6)$$

Es común encontrar la primera condición de contorno expresada a partir de la ley de comportamiento como:

$$\frac{C_{ijkl}}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) n_j = f_i \quad (2.7)$$

Y, por tanto, el problema estructural queda completamente definido por:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{C_{ijkl}}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \right] + X_i(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.8)$$

$$\frac{C_{ijkl}}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) n_j = f_i \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_f \quad (2.9)$$

$$u_i = \bar{u}_i \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_u \quad (2.10)$$

Un ejemplo sencillo que permite ilustrar la resolución de un problema estructural es el estudio de una barra sometida a un estado tracción (Figura 2.1). La barra tiene una longitud L , el área de la sección transversal es A , y el módulo elástico del material es E . La barra

está empotrada en el origen y actúa una fuerza F en el extremo libre. El problema, en ausencia de fuerzas de volumen X_i , queda definido por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad x \in (0, L) \quad (2.11)$$

$$EA \frac{\partial u}{\partial x} = F \quad x = L \quad (2.12)$$

$$u = 0 \quad x = 0 \quad (2.13)$$

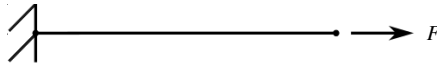


Figura 2.1 Modelización de una barra sometida a un estado de tracción.

La solución del problema estructural se obtiene integrando la ecuación de equilibrio (2.11) e imponiendo las condiciones de contorno. De esta forma, los desplazamiento de la barra serán de la forma $u(x) = ax + b$, donde el valor de las constantes de integración a y b se deduce de imponer las condiciones $u(0) = b = 0$ y $u'(L) = a = F/EA$. Por tanto, el desplazamiento axial obtenido en cualquier punto de la barra es $u(x) = Fx/EA$. Esta solución cumple las condiciones de contorno en el punto $x = 0$ y proporciona un valor máximo en el extremo libre de la barra $u(L) = FL/EA$.

A continuación, para ilustrar el enfoque del Método de los Elementos Finitos se resuelve el ejemplo anterior dividiendo la barra original en dos elementos de longitud $L/2$, unidos rígidamente entre sí como se muestra en la Figura 2.2.(a). En este caso, se definen los desplazamientos axiales u_1 , u_2 y u_3 del extremo empotrado, del punto medio y del extremo libre, respectivamente. El MEF se basa en el estudio individual de cada elemento para posteriormente reproducir el comportamiento de la estructura imponiendo unas determinadas condiciones en los puntos de unión entre elementos.

En la Figura 2.2.(b) se muestran los dos elementos utilizados para la discretización de la estructura. El primer elemento está definido por los desplazamientos (grados de libertad) u_1 y u_2 , y por las fuerzas nodales F_1 y F_{12} . Estas fuerzas se corresponden con la reacción que aparece en el empotramiento para impedir el desplazamiento de dicho punto, y con la fuerza de acción/reacción del punto de unión entre ambos elementos. Igualmente, el movimiento del elemento e_2 queda determinado por los grados de libertad u_2 y u_3 , y las fuerzas nodales F_{21} y F_3 representan la fuerza de interacción que aparece entre los elementos y la acción externa F a la que está sometida la barra.

La Ecuación (2.12) permite definir la relación entre los desplazamientos y las fuerzas nodales del elemento e_1 :

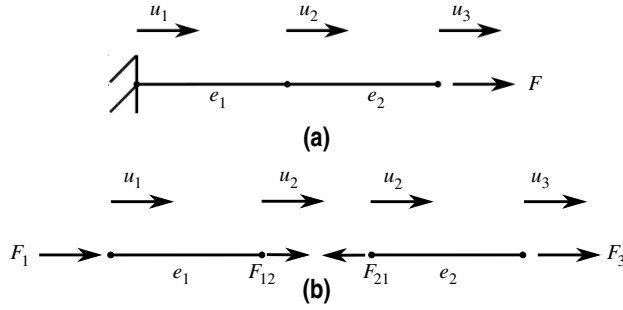


Figura 2.2 Modelización de una barra con dos elementos.

$$EA \frac{\partial u}{\partial x} = F_1 \quad x = 0 \quad (2.14)$$

$$EA \frac{\partial u}{\partial x} = F_{12} \quad x = L/2 \quad (2.15)$$

A partir de la ecuación de equilibrio (2.11) se deduce que los desplazamientos en la barra son constantes, y que la variación de éstos es $\partial u / \partial x = \Delta u / \Delta x$. Por tanto, aplicando el equilibrio de fuerzas en el elemento dada por la expresión $F_1 + F_{12} = 0$ se obtiene que:

$$-F_1 = F_{12} = EA \frac{\partial u(L/2)}{\partial x} = EA \frac{\Delta u}{\Delta x} = EA \frac{u_2 - u_1}{L/2} \quad (2.16)$$

Esta expresión se escribe en forma matricial de la siguiente forma:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_{12} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L/2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

Del mismo modo, siguiendo un procedimiento similar para el elemento e_2 se llega a la siguiente relación:

$$\begin{Bmatrix} F_{21} \\ F_3 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L/2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

Ambas expresiones se corresponden con la ecuación de equilibrio para cada elemento aislado, que relaciona las fuerzas y los desplazamientos nodales mediante una matriz denominada *matriz de rigidez elemental*. Los términos F_{12} y F_{21} representan las fuerzas interacción que hay en el punto de unión entre ambos elementos. Por el principio de acción y reacción ambas fuerzas deben ser iguales en magnitud y de sentido contrario $F_{12} = -F_{21}$ o, equivalentemente, imponiendo el equilibrio de fuerzas en dicho punto se obtiene que $F_{12} + F_{21} = 0$, es decir, que:

$$0 = \frac{EA}{L/2} (-u_1 + 2u_2 - u_3) \quad (2.19)$$

Finalmente, la ecuación de equilibrio de la barra se obtiene combinando las Ecuaciones (2.17) y (2.18), e imponiendo la condición anterior:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L/2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

Esta expresión define un sistema de ecuaciones $\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{u}$ que permite calcular los desplazamientos de la barra mediante inversión de la *matriz de rigidez global* $\mathbf{K}$ de la estructura. Sin embargo, puede comprobarse que la matriz de rigidez es singular, es decir, no es invertible. Para resolver el problema es necesario aplicar las condiciones de contorno $F_3 = F$ y $u_1 = 0$. Entonces, el sistema es resoluble y obteniéndose que:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \\ F \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L/2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (2.21)$$

En este sistema aparecen dos tipos de incógnitas: *i*) la fuerza F_1 y *ii*) los desplazamientos u_2 y u_3 . Es importante observar que en cualquier punto de la estructura, si se conoce la fuerza o el desplazamiento por condición de contorno, entonces la incógnita es el desplazamiento o la fuerza de dicho punto. La expresión anterior se reescribe desacoplando la primera ecuación del resto ecuaciones como:

$$F_1 = -\frac{EA}{L/2}u_2 \quad (2.22)$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ F \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L/2} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

En general, en la resolución de un problema mediante el MEF se calculan en primer lugar los desplazamientos nodales y, posteriormente, se obtienen las fuerzas de reacción. De esta forma, los desplazamiento de la barra se despejan de la Ecuación (2.23) para obtener que:

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{FL}{2EA} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

Por último, la fuerza de reacción en el extremo empotrado se calcula sustituyendo en la Ecuación (2.22) la solución obtenida, llegándose a que $F_1 = -F$ como era de esperar. El desplazamiento máximo $u_3 = FL/EA$ coincide con la solución analítica del problema que se ha calculado anteriormente.

El procedimiento seguido para la resolución del problema puede generalizarse mediante el MEF para resolver problemas más complejos. A continuación se estudia la solución del problema mediante el método de los residuos ponderados como paso previo a la formulación del MEF.

2.2 El método de los residuos ponderados

La formulación del MEF se basa en la generalización del método de los residuos ponderados. En la sección anterior se ha formulado el problema estructural como:

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{x}) + X_i(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.25)$$

$$\sigma_{ij}n_j = f_i \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_f \quad (2.26)$$

$$u_i = \bar{u}_i \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_u \quad (2.27)$$

Como se ha comentado anteriormente, la resolución de este problema es compleja y sólo puede abordarse de forma directa (analítica) en pocos casos. El método de los residuos ponderados se basa en obtener una solución aproximada u_i^h de los desplazamientos de la estructura, de forma que la formulación del problema pasa a ser la siguiente:

$$\sigma_{ij,j}^h + X_i \neq 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.28)$$

$$\sigma_{ij}^h n_j - f_i \neq 0 \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_f \quad (2.29)$$

$$u_i^h = \bar{u}_i \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_u \quad (2.30)$$

donde σ_{ij}^h es el tensor de tensiones calculado a partir de la aproximación de los desplazamientos. Los términos de la izquierda de las desigualdades obtenidas representan los *residuos* de la solución, que no son nulos debido a la aproximación realizada. El grado de aproximación será mejor a medida que los residuos sean menores.

El método de los residuos ponderados consiste en multiplicar estos residuos por una función de prueba (o ponderación) denotada por δu_i^h , y cancelar el resultado obtenido en el sentido de la integral de la Ecuación (2.28):

$$\int_{\Omega} \delta u_i^h (\sigma_{ij,j}^h(\mathbf{x}) + X_i(\mathbf{x})) dV = 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.31)$$

$$\int_{\partial\Omega} \delta u_i^h (\sigma_{ij}^h n_j - f_i) dS = 0 \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_f \quad (2.32)$$

$$\delta u_i^h = 0 \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_u \quad (2.33)$$

La función de prueba puede adquirir un valor arbitrario con la única condición de que sea compatible con las condiciones de contorno del problema original, aunque por simplicidad se elige un valor nulo en la parte del contorno $\partial\Omega_u$ donde se conoce el valor de los desplazamientos.

La primera ecuación se reescribe separando los términos de la integral como:

$$\int_{\Omega} \delta u_i^h \sigma_{ij,j}^h dV + \int_{\Omega} \delta u_i^h X_i dV = 0 \quad (2.34)$$

Teniendo en cuenta la siguiente relación,

$$\frac{\partial(\delta u_i^h \sigma_{ij}^h)}{\partial x_j} = \frac{\partial \delta u_i^h}{\partial x_j} \sigma_{ij}^h + \delta u_i^h \frac{\partial \sigma_{ij}^h}{\partial x_j} \quad (2.35)$$

se modifica como:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial(\delta u_i^h \sigma_{ij}^h)}{\partial x_j} dV - \int_{\Omega} \frac{\partial \delta u_i^h}{\partial x_j} \sigma_{ij}^h dV + \int_{\Omega} \delta u_i^h X_i dV = 0 \quad (2.36)$$

El teorema de la divergencia (Gauss-Ostrograski)¹ permite reescribir la primera integral del siguiente modo:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial(\delta u_i^h \sigma_{ij}^h)}{\partial x_j} dV = \int_{\partial\Omega} (\delta u_i^h \sigma_{ij}^h) n_j dS \quad (2.37)$$

La segunda integral se simplifica teniendo en cuenta la simetría del tensor de tensiones ($\sigma_{ij}^h = \sigma_{ji}^h$), e identificando que:

$$\frac{\partial \delta u_i^h}{\partial x_j} \sigma_{ij}^h = \frac{\partial \delta u_j^h}{\partial x_i} \sigma_{ji}^h \quad (2.38)$$

Por tanto:

$$\frac{\partial \delta u_i^h}{\partial x_j} \sigma_{ij}^h = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i^h}{\partial x_j} \sigma_{ij}^h + \frac{\partial \delta u_j^h}{\partial x_i} \sigma_{ji}^h \right) = (\delta \varepsilon_{ij}^h + \delta w_{ij}^h) \sigma_{ij}^h \quad (2.39)$$

donde δw_{ij}^h es el tensor de rotación. El tensor de rotación es un tensor antisimétrico definido por las componentes δw_{23}^h , δw_{31}^h y δw_{12}^h , siendo los términos de la diagonal nulos. Se puede comprobar que el producto de un tensor antisimétrico por un tensor simétrico es nulo, obteniéndose que:

$$\frac{\partial \delta u_i^h}{\partial x_j} \sigma_{ij}^h = \delta \varepsilon_{ij}^h \sigma_{ij}^h \quad (2.40)$$

Entonces, teniendo en cuenta estas expresiones, la ecuación integral se escribe como:

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij}^h \sigma_{ij}^h dV - \int_{\partial\Omega} (\delta u_i^h \sigma_{ij}^h) n_j dS - \int_{\Omega} \delta u_i^h X_i dV = 0 \quad (2.41)$$

¹ El teorema de la divergencia establece que en un dominio Ω , con un contorno $\partial\Omega$ orientable por la normal exterior $\mathbf{n}(\mathbf{x})$, sobre el que está definido un campo vectorial $\mathbf{g}(\mathbf{x})$, se verifica que $\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) dV = \int_{\partial\Omega} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS$.

La integral de contorno que aparece en la ecuación anterior se modifica de acuerdo a las condiciones de contorno definidas por las Ecuaciones (2.31) y (2.33) como:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} (\delta u_i^h \sigma_{ij}^h) n_j dS &= \int_{\partial\Omega_f} (\delta u_i^h \sigma_{ij}^h) n_j dS + \int_{\partial\Omega_u} (\delta u_i^h \sigma_{ij}^h) n_j dS \\ &= \int_{\partial\Omega_f} \delta u_i^h f_i dS \end{aligned} \quad (2.42)$$

Finalmente, se obtiene que:

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij}^h \sigma_{ij}^h dV = \int_{\partial\Omega_f} \delta u_i^h f_i dS + \int_{\Omega} \delta u_i^h X_i dV \quad (2.43)$$

La ecuación obtenida representa la expresión del Teorema de los Trabajos Virtuales (TTV), que establece que el trabajo interno realizado por las tensiones σ_{ij}^h sobre las deformaciones $\delta \varepsilon_{ij}^h$ es igual al trabajo externo de las acciones f_i y X_i sobre los desplazamientos δu_i^h , si el estado de tensión σ_{ij} está en equilibrio con las acciones externas f_i y X_i , y el campo de desplazamientos δu_i^h es compatible con las condiciones de contorno del problema.

La matriz de rigidez elemental de la barra a tracción estudiada en la sección anterior puede deducirse directamente a partir del TTV. Por ejemplo, la Ecuación (2.43) particularizada para el elemento e_1 de la Figura 2.2 es:

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon^h \sigma^h dV = \delta u_1^h F_1 + \delta u_2^h F_2 \quad (2.44)$$

donde F_1 y F_2 son las fuerzas aplicadas en los extremos, la deformación de barra es $\varepsilon^h = (u_2^h - u_1^h)/L_e$, y la tensión se calcula mediante la ley de comportamiento como $\sigma^h = E \varepsilon^h$, siendo L_e la longitud del elemento. La integral de volumen que aparece en la ecuación anterior se resuelve integrando por separado en la sección transversal de la barra y en la dirección longitudinal, resultando en:

$$\int_0^{L_e} \left(\frac{\delta u_2^h - \delta u_1^h}{L_e} \right) EA \left(\frac{u_2^h - u_1^h}{L_e} \right) dx = \delta u_1^h F_1 + \delta u_2^h F_2 \quad (2.45)$$

Integrando en esta ecuación se obtiene que:

$$\frac{EA}{L_e} (u_1^h - u_2^h) \delta u_1^h + \frac{EA}{L_e} (u_2^h - u_1^h) \delta u_2^h = \delta u_1^h F_1 + \delta u_2^h F_2 \quad (2.46)$$

Esta relación debe cumplirse para cualquier valor de los desplazamientos virtuales δu_1^h y δu_2^h , lo cual implica que los términos que multiplican cada desplazamiento virtual deben ser iguales, es decir:

$$\frac{EA}{L_e} (u_1^h - u_2^h) = F_1 \quad (2.47)$$

$$\frac{EA}{L_e} (u_2^h - u_1^h) = F_2 \quad (2.48)$$

Las expresiones obtenidas definen la ecuación de equilibrio de la barra sometida a un estado axial de fuerzas, que escritas de forma matricial coinciden con las calculadas anteriormente (Ecuación (2.17)):

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^h \\ u_2^h \end{Bmatrix} \quad (2.49)$$

2.2.1 Formulación matricial

La expresión del TTV se puede escribir en forma matricial de acuerdo a la descomposición del vector de desplazamientos y de las acciones externas. Por ejemplo, en un problema de tensión plana el vector de desplazamientos en un punto del dominio están definido por la componente horizontal y vertical:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} \quad (2.50)$$

Del mismo modo, las fuerzas externas están dadas por $\mathbf{f} = \{f_x(x,y), f_y(x,y)\}^T$ y $\mathbf{X} = \{X_x(x,y), X_y(x,y)\}^T$.

Asimismo, el tensor de deformaciones en un estado de tensión plana está definido por:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial / \partial x & 0 \\ 0 & \partial / \partial y \\ \partial / \partial y & \partial / \partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \mathbf{L} \mathbf{u} \quad (2.51)$$

donde $\mathbf{L}$ es un operador lineal que define la derivada de los desplazamientos para calcular las deformaciones.

También, asumiendo una ley de comportamiento elástica y lineal del material, el estado tensional en un punto está dado por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C} \mathbf{L} \mathbf{u} \quad (2.52)$$

De nuevo, particularizando para un estado de tensión plana, el tensor de tensiones es $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}$. La matriz $\mathbf{C}$ para un material isótropo en tensión plana es:

$$\mathbf{C} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu)/2 \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

donde E y ν representan en módulo de elasticidad y el coeficiente de Poisson, respectivamente.

Sustituyendo estas relaciones en la expresión del TTV se obtiene que:

$$\int_{\Omega} (\delta \mathbf{u}^h)^T \mathbf{L}^T \mathbf{C} \mathbf{L} \mathbf{u}^h dV - \int_{\partial \Omega_f} (\delta \mathbf{u}^h)^T \mathbf{f} dS - \int_{\Omega} (\delta \mathbf{u}^h)^T \mathbf{X} dV = 0 \quad (2.54)$$

donde las variables del problema son los desplazamientos de la estructura y las fuerzas que actúan sobre ésta.

Se puede demostrar que la solución exacta del problema también debe satisfacer la ecuación anterior:

$$\int_{\Omega} (\delta \mathbf{u}^h)^T \mathbf{L}^T \mathbf{C} \mathbf{L} \mathbf{u} dV - \int_{\partial \Omega_f} (\delta \mathbf{u}^h)^T \mathbf{f} dS - \int_{\Omega} (\delta \mathbf{u}^h)^T \mathbf{X} dV = 0 \quad (2.55)$$

Restando ambas ecuaciones se encuentra la siguiente relación:

$$\int_{\Omega} (\delta \mathbf{u}^h)^T \mathbf{L}^T \mathbf{C} \mathbf{L} (\mathbf{u}^h - \mathbf{u}) dV = 0 \quad (2.56)$$

es decir, que la solución $\mathbf{u}^h = \mathbf{u}$ obtenida mediante el método de los residuos ponderados es la mejor aproximación del problema.

2.3 Formulación del MEF

La formulación del Método de los Elementos Finitos se basa en la discretización del dominio que ocupa la estructura utilizando elementos. La discretización permite aproximar tanto la geometría como el campo de desplazamientos utilizando funciones de interpolación que se denominan *funciones de forma*. Por tanto, el grado de aproximación de la solución calculada mediante el MEF está condicionado por la discretización realizada. El proceso de aproximación del comportamiento de un modelo continuo a partir de un número de elementos finitos, que se comportan de una forma similar, es el concepto básico del método de los elementos finitos. En esta sección se ilustran las bases del método que, posteriormente, se desarrollarán en los siguientes capítulos de estos apuntes.

En general, el método se puede estructurar en los siguientes pasos:

1. El dominio de interés (la estructura) se divide mediante una serie de líneas imaginarias o superficies en un número finito de elementos.
2. Los elementos se asumen que están interconectados entre sí en unos puntos nodales situado en su contorno. Los desplazamientos de estos puntos serán las incógnitas del problema.
3. Se define un campo de desplazamientos en cada elemento interpolando los valores nodales definidos anteriormente.
4. El campo de desplazamientos definido tiene asociado un estado de deformaciones en el elemento. Así mismo, es posible obtener el estado de tensiones acorde con la ley constitutiva del material.

5. Se determina un sistema de fuerzas concentradas en los nodos del elemento que equilibran las tensiones en el contorno y las fuerzas distribuidas en el elemento, obteniéndose una relación con los desplazamientos nodales.

La formulación del modelo discreto conlleva una serie de aproximaciones que condicionará la validez de los resultados obtenidos como se ha comentado anteriormente. A continuación se expresan estas ideas matemáticamente.

En la Figura 2.3 se muestra la discretización de un problema bidimensional de tensión plana empleando elementos de forma triangular. Un elemento e se define a partir de los nodos i, j, m , unidos mediante líneas rectas. El desplazamiento $\mathbf{u}$ de un punto del elemento se aproxima a partir de los valores nodales mediante las funciones de forma N_k :

$$\mathbf{u} \approx \hat{\mathbf{u}} = \sum_k N_k \mathbf{u}_k^e = \mathbf{N} \mathbf{u}^e \quad (2.57)$$

En un problema de tensión plana, el vector de desplazamientos en un punto del elemento

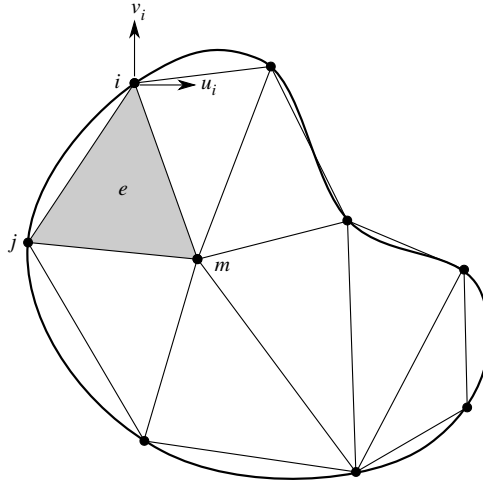


Figura 2.3 Discretización de un problema de tensión plana.

está definido por la componente horizontal y vertical:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} \quad (2.58)$$

y los correspondientes desplazamientos del nodo i del elemento e son:

$$\mathbf{u}_i^e = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad (2.59)$$

Las funciones de N_i , N_j y N_m se deben elegir de forma que el campo de desplazamiento en el elemento esté correctamente definido. Por ejemplo, el desplazamiento calculado

mediante la Ecuación (2.57) en el nodo i del elemento debe coincidir con el desplazamiento nodal $\mathbf{u}_i^e$, es decir:

$$\mathbf{u}(x_i, y_i) \approx \hat{\mathbf{u}}(x_i, y_i) = N_i(x_i, y_i)\mathbf{u}_i^e + N_j(x_i, y_i)\mathbf{u}_j^e + N_m(x_i, y_i)\mathbf{u}_m^e = \mathbf{u}_i^e \quad (2.60)$$

Esta expresión se cumple si $N_i(x_i, y_i) = 1$ y $N_j(x_i, y_i) = N_m(x_i, y_i) = 0$. Análogamente, se puede deducir fácilmente que $N_i(x_j, y_j) = N_i(x_m, y_m) = 0$ particularizando la expresión anterior para los nodos j y m . Teniendo en cuenta estas condiciones, la representación de la función de forma $N_i(x, y)$ debe presentar una distribución similar a la de la Figura 2.4. Del mismo modo, se pueden obtener las funciones de forma $N_j(x, y)$ y $N_m(x, y)$ del elemento. Estas funciones de forma representan el campo de desplazamientos en el elemento cuando el desplazamiento de un nodo alcanza un valor unidad y es nulo en el resto de nodos.

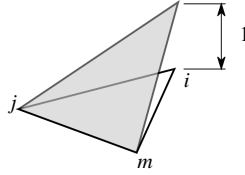


Figura 2.4 Representación de la función de forma N_i .

Una vez conocidos los desplazamientos en cualquier punto del elemento es posible calcular la deformaciones, teniendo en cuenta que la definición del tensor de deformaciones establece una relación con el campo de desplazamientos de la forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} \approx \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{L}\hat{\mathbf{u}} \quad (2.61)$$

donde $\mathbf{L}$ es el operador lineal definido en el apartado anterior que define la derivada de los desplazamientos para calcular las deformaciones. Si en la expresión anterior se introduce la aproximación de los desplazamientos definida por la Ecuación (2.57) se obtiene que:

$$\boldsymbol{\varepsilon} \approx \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{L}\mathbf{N}\mathbf{u}^e = \mathbf{B}\mathbf{u}^e \quad (2.62)$$

Asimismo, se define el estado virtual de desplazamientos en los nodos del elemento mediante $\delta\mathbf{u}^e$, y se aproxima utilizando las mismas funciones de forma:

$$\delta\mathbf{u} = \mathbf{N}\delta\mathbf{u}^e \quad \text{y} \quad \delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\delta\mathbf{u}^e \quad (2.63)$$

Sustituyendo estas expresiones en la Ecuación (2.55) del Teorema de los Trabajos Virtuales, particularizada para el elemento e se llega a la siguiente expresión:

$$\delta\mathbf{u}^{eT} \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \right] \mathbf{u}^e = \delta\mathbf{u}^{eT} \left\{ \int_{\partial\Omega_f^e} \mathbf{N}^T \mathbf{f} dS \right\} + \delta\mathbf{u}^{eT} \left\{ \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{X} dV \right\} \quad (2.64)$$

Como esta expresión debe ser válida para cualquier desplazamiento virtual se tiene que:

$$\left[\int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \right] \mathbf{u}^e = \left\{ \int_{\partial\Omega_f^e} \mathbf{N}^T \mathbf{f} dS \right\} + \left\{ \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{X} dV \right\} \quad (2.65)$$

Esta expresión es válida para cualquier relación tensión-deformación, siendo su notación matricial de la forma:

$$\mathbf{K}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{F}^e \quad (2.66)$$

donde la matriz de rigidez del elemento $\mathbf{K}^e$ se calcula como:

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega \quad (2.67)$$

y el vector equivalente de fuerzas es la suma de las fuerzas de volumen y las fuerzas que actúan en el contorno:

$$\mathbf{F}^e = \int_{\partial\Omega_f^e} \mathbf{N}^T \mathbf{f} dS + \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{X} dV \quad (2.68)$$

La ecuación de equilibrio del modelo discreto se obtendrá ensamblando apropiadamente tanto las matrices de rigidez elemental como los vectores de fuerza de los elementos imponiendo las condiciones de equilibrio de fuerzas y compatibilidad de desplazamientos, obteniéndose un sistema de ecuaciones cuya solución son los desplazamientos nodales del modelo de elemento finitos:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K} \mathbf{u} \quad (2.69)$$

La solución de esta ecuación proporciona los desplazamientos en todos los nodos de la estructura y, a partir de este resultado, se calculan las tensiones en cada elemento de acuerdo a las Ecuaciones (2.62) y (2.52):

$$\boldsymbol{\sigma}^e = \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{u}^e \quad (2.70)$$

2.3.1 Criterios de convergencia

Las funciones de forma usadas para la aproximación del campo de desplazamientos en el elemento condicionan la exactitud de los resultados obtenidos mediante el MEF. Para asegurar la convergencia de los resultados a la solución del problema deben cumplirse una serie de requisitos en la formulación de los elementos finitos.

Los resultados obtenidos deben aproximarse tanto como se desee a la solución buscada. La primera condición que debe cumplir las funciones de forma empleadas para aproximar los desplazamientos de un elemento es que no deben permitir la deformación del elemento cuando los desplazamiento nodales definen un movimiento de sólido rígido.

El segundo criterio se deriva de que a medida que el tamaño del elemento es menor el estado de deformación debe tender a un valor constante en el elemento. De esta forma, si en un problema existe un estado de deformación constante el modelo de elementos finitos

debe reproducirlo exactamente. Este criterio engloba al anterior ya que un desplazamiento de sólido rígido produce un estado de deformación nula sobre el elemento.

Por último, el tercer criterio de convergencia establece que las funciones de forma deben elegirse de forma que las deformaciones entre elementos contiguos sean finitas, aunque exista una discontinuidad de los resultados calculados. Este criterio implica que la aproximación de los desplazamientos en un elemento debe ser derivable hasta un grado definido por la naturaleza del problema. Por ejemplo, en un estado de tensión plana los desplazamientos deben ser continuos entre los elementos. Sin embargo, en placas y láminas las deformaciones están definidas por la segunda derivada de los desplazamientos, debiendo ser la primera derivada de los desplazamientos continua.

Estos conceptos se estudiarán con mayor profundidad en los siguientes capítulos.

2.3.2 Error en la discretización y grado de convergencia

En las secciones anteriores se ha asumido que la aproximación de los desplazamientos definida por la Ecuación (2.57) debe tender a la solución exacta del problema a medida que se reduce el tamaño del elemento h . En algunos casos concretos es posible obtener la solución exacta del problema mediante el MEF con un número finito de subdivisiones si las funciones de forma del elemento interpolara exactamente la solución buscada. Por ejemplo, si la solución del problema está definida por un polinomio cuadrático y las funciones de forma del elemento incluyen todos los polinomios de ese orden, entonces los resultados calculados coincidirán con la solución exacta. Se puede probar que, para un tamaño de elemento h , el error al aproximar la solución es menor a medida que el orden p de las funciones de forma es mayor, obteniéndose una cota $\mathcal{O}(h^{p+1})$ para dicho error.

Ejemplo 2.3.1 En este ejemplo se estudia las tensiones de una laja con un agujero de radio a en un estado de tensión plana. En la Figura 2.5 se muestra una representación esquemática del problema estudiado, donde σ_∞ hace referencia a la componente horizontal de la tensión lejos del agujero. La solución del problema elástico en coordenadas polares es conocida si las dimensiones de la laja no están acotadas:

$$\sigma_r = \frac{\sigma_\infty}{2} \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right] + \frac{\sigma_\infty}{2} \left[1 + 3 \left(\frac{a}{r} \right)^4 - 4 \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right] \cos(2\theta) \quad (2.71)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_\infty}{2} \left[1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right] - \frac{\sigma_\infty}{2} \left[1 + 3 \left(\frac{a}{r} \right)^4 \right] \cos(2\theta) \quad (2.72)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\sigma_\infty}{2} \left[1 - 3 \left(\frac{a}{r} \right)^4 + 2 \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right] \sin(2\theta) \quad (2.73)$$

donde r y θ definen la posición de un punto de la laja en un sistema de coordenadas polares con origen en el centro del agujero.

La solución del problema en los puntos del contorno del agujero ($r = a$) se obtiene particularizando las expresiones anteriores:

$$\sigma_r = 0 \quad (2.74)$$

$$\sigma_\theta = \sigma_\infty [1 - 2\cos(2\theta)] \quad (2.75)$$

$$\tau_{r\theta} = 0 \quad (2.76)$$

obteniéndose que, tanto las componentes radiales como las tangenciales del estado de tensión son nulas. La tensión máxima $\sigma_\theta = 3\sigma_\infty$ se alcanza en $\theta = \pm\pi/2$ como se muestra en la Figura 2.6.

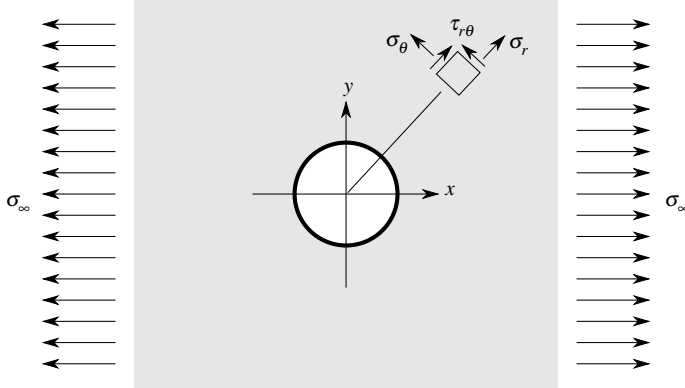


Figura 2.5 Definición del problema de un laja con un agujero.

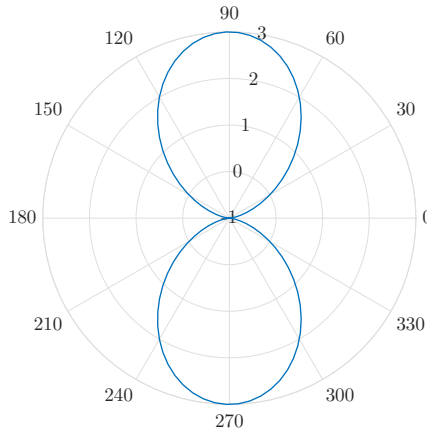


Figura 2.6 Representación polar de la componente σ_θ del estado tensional en el contorno del agujero (adimensionalizado a σ_∞).

La modelización de este problema mediante el MEF requiere acotar las dimensiones de la laja. La exactitud de los resultados del análisis estarán condicionados por el truncamiento del dominio considerado. Además, la discretización del problema debe ser adecuada para representar tanto la geometría del agujero como el estado tensional alrededor del

concentrador de tensiones. La geometría y las acciones de este problema presentan un simetría doble respecto a los ejes x y y , por lo que sólo será necesario considerar una cuarta parte del modelo si se imponen las condiciones de simetría adecuadas. En la Figura 2.7 se muestra la discretización del problema para un laja cuadrada de dimensiones 10×10 m y espesor 0.25 m, siendo el radio del agujero $a = 5$ m. Las propiedades del material son $E = 30$ MPa y $\nu = 0.29$. La laja está traccionada por una carga uniformemente repartida de valor $\sigma_{\infty} = 1$ N/m². El Código 2.1 recoge el listado de comandos del programa comercial ANSYS para resolver este problema.

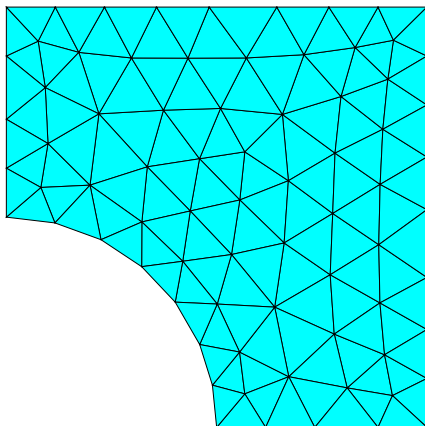


Figura 2.7 Discretización del problema de la laja con un agujero.

En la biblioteca de elementos de este programa se encuentran los elementos PLANE182 y PLANE183 para modelizar problemas de elasticidad plana. El elemento 182 está definido por cuatro nodos (elemento cuadrilátero) o tres nodos (elemento triangular), con dos grados de libertad en cada nodo definidos por las traslaciones según las direcciones de los ejes x y y . El elemento 183 tiene ocho o seis nodos de forma análoga al elemento PLANE182, siendo sus funciones de forma cuadráticas. El incremento del orden de este elemento permite obtener una mayor precisión en los resultados para la misma discretización.

Los resultados obtenidos utilizando el elemento PLANE182 (Figura 2.8.(a)) aproximan la distribución de tensiones de forma muy discreta, debido tanto a la definición de la malla como al grado de las funciones de forma del elemento. Los resultados mejoran considerablemente cuando se emplea el elemento de orden cuadrático (Figura 2.8.(b)), siendo en este caso la distribución de tensiones continua en el dominio. En ambos casos, el valor de la tensión difiere bastante de la solución analítica del problema debido a la extensión finita de la laja.

Código 2.1 Listado de comandos de ANSYS para resolver calcular el estado tensional de una laja con un agujero.

```
/PREP7
```

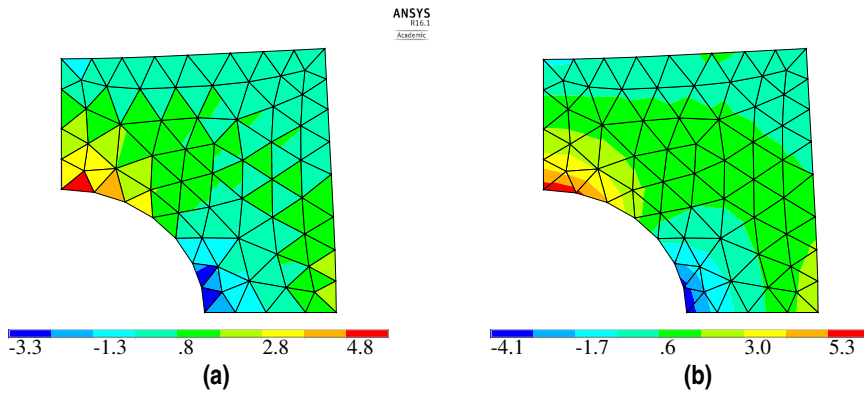


Figura 2.8 Representación de la componente circunferencial del estado de tensiones en una laja utilizando el elemento (a) PLANE182 y (c) PLANE183.

```

ET,1,PLANE182,,,3 ! definición del elemento
R,1,,.25 ! espesor de la laja
MP,EX,1,30E6 ! módulo de elasticidad
MP,PRXY,1,0.29 ! coeficiente de Poisson

! geometría
RECTNG,0,10,0,10 ! define un rectángulo de las dimensiones de la laja
PCIRC,5,,0,360 ! define un círculo de radio 5
ASBA,1,2 ! subtrae el círculo del rectángulo

! discretización
SMRTSIZ,5 ! tamaño del elemento
MSHAPE,1,2D ! mallado con elementos triangulares
AMESH,ALL ! malla todas las áreas
SAVE
FINISH

! solución
/SOLU
NSEL,S,LOC,X,0 ! selecciona nodos en x=0
DSYM,SYMM,X ! simetría eje x
NSEL,S,LOC,Y,0 ! selecciona nodos en y=0
DSYM,SYMM,Y ! simetría eje y
NSEL,S,LOC,X,10 ! selecciona nodos en x=10
SF,ALL,PRES,-1 ! define presión de valor -1
ALLSEL
SOLVE

! postproceso
/POST1
RSYS,1 ! sistema de coordenadas polares
PLESOL,S,Y ! representación tensión circunferencial
FINISH

```

2.4 Problemas propuestos

- 2.1 Modificar el Código 2.1 para calcular el valor de la componente σ_θ en una laja con un agujero elíptico de dimensiones $2a \times 2b$ en un estado de tensión plana². En la Figura 2.9 se muestra la representación esquemática del problema, donde σ_∞ hace referencia a la componente horizontal de la tensión lejos del agujero. La solución del problema elástico en coordenadas polares en un punto $\theta = \pm\pi/2$ del contorno del agujero es $\sigma_\theta = \sigma_\infty(1 + 2a/b)$. Repetir el estudio para tres geometrías diferentes definidas por: $a = b$, $a = 2b$ y $a = 4b$.

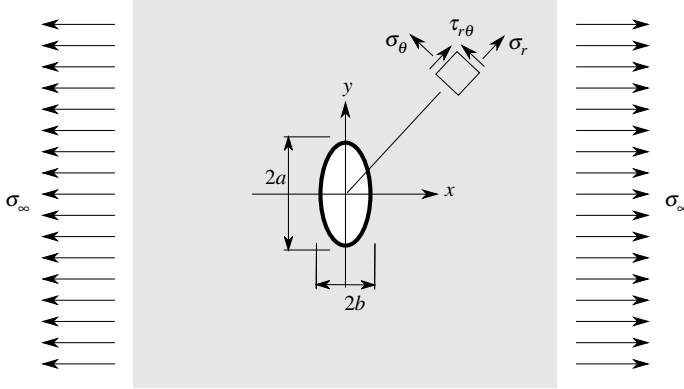


Figura 2.9 Definición del problema de un laja con un agujero.

² El comando ARSCALE genera un área escalada a partir de otra previamente definida. Usar este comando para generar la elipse.

3 Elementos Finitos tipo barra

3.1 Introducción

Las estructuras deben ser capaces de soportar las fuerzas a las que están sometidas sin perder la capacidad de cumplir la función para la que fueron construidas. Lo anterior requiere que, entre otras condiciones, las tensiones que soportan las barras sean menores que las que conllevan su rotura y, también, que los desplazamientos que aparecen en las barras sean menores a aquellos que dejarían la estructura fuera de uso. Para verificar que se cumplen las condiciones anteriores, se recurre a las ecuaciones de equilibrio, compatibilidad y comportamiento, que se deben satisfacer en cualquier punto de la estructura.

Las estructuras a las que se refiere este capítulo están formadas por un conjunto de *barras*, que soportan una serie de cargas y que cumplen ciertas condiciones de contorno en desplazamiento (Figura 3.1). Las fuerzas que se aplican sobre la estructura pueden ser o bien puntuales, o bien repartidas a lo largo de las barras. Los extremos de las barras se denominarán *nudos*.

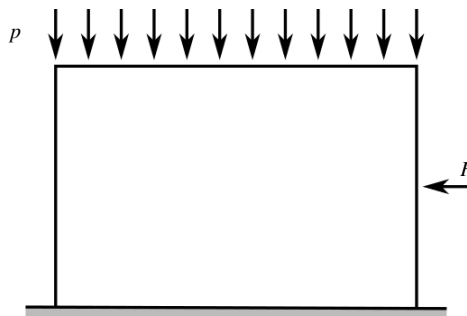


Figura 3.1 Pórtico sometido a fuerzas puntuales y cargas repartidas.

El Método de los Elementos Finitos (MEF) es un método numérico que, como se ha expuesto en el capítulo anterior, permite resolver de manera aproximada las ecuaciones

diferenciales que gobiernan un determinado problema. La técnica consiste en dividir (*discretizar*) el medio que se está estudiando en pequeñas partes denominadas *elementos* (Figura 3.2). A los extremos de los elementos se les denomina *nodos*. La aproximación del método se basa en imponer el cumplimiento de las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad sólo en los nodos de los elementos, reduciéndose de este modo la complejidad del problema. En cualquier punto del elemento que no sea un nodo, la solución del problema se obtiene a partir de los resultados obtenidos en los nodos que pertenecen al elemento de interés, interpolando con unas funciones que se denominan *funciones de forma*.

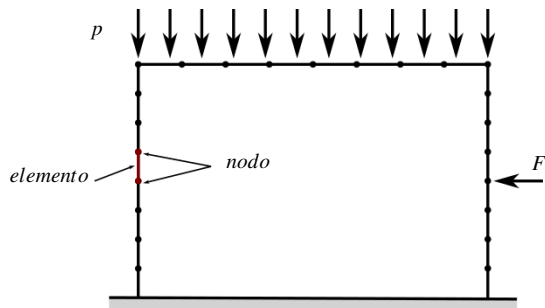


Figura 3.2 Discretización del pórtico en elementos finitos.

En este capítulo se estudian diferentes elementos finitos tipo barra (Figura 3.3). Cada uno de estos elementos tienen un número de grados de libertad en los nodos que permiten el estudio de problemas donde sólo se desarrollan esfuerzos axiales, problemas de flexión y situaciones de carga donde aparecen ambos tipos de esfuerzos.

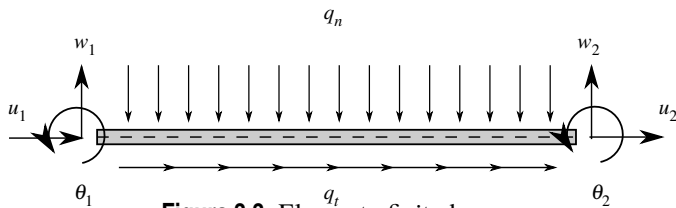


Figura 3.3 Elemento finito barra.

3.2 Formulación del elemento sometido a esfuerzo axial

El primero de los elementos finitos tipo barra que se estudia en este capítulo es un elemento finito que permite estudiar estructuras sometidas únicamente a esfuerzo axial, es decir, a tracciones y compresiones uniformes en la sección transversal. Este elemento se muestra en la Figura 3.4. El elemento tiene dos nodos denominados 1 y 2 (de manera general serán i y j) y en cada uno de los nodos hay un grado de libertad en la dirección longitudinal del eje del elemento. El sentido positivo de estos desplazamientos es el indicado al ir desde el nodo 1 al nodo 2. El sistema de coordenadas formado por estos grados de libertad se denomina *sistema de coordenadas elemental*. El elemento puede estar sometido a fuerzas

puntuales aplicadas en los nodos F_i , y a fuerzas puntuales o repartidas q aplicadas en el interior del elemento. En cualquier caso, las fuerzas deben tener la dirección del eje de la barra para que sólo se originen esfuerzos axiales.

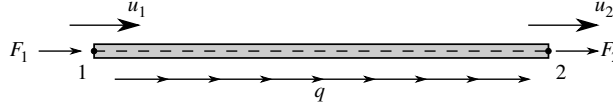


Figura 3.4 Elemento finito barra sometido a esfuerzo axial.

La formulación del MEF se basa en el Principio de los Trabajos Virtuales (PTV) aplicado a cada elemento. Esta igualdad energética indica que el trabajo efectuado por un medio en equilibrio, sometido a una serie de fuerzas puntuales F y repartidas q , y tensiones σ , durante un desplazamiento diferencial cualquiera δu (campo de desplazamientos virtuales), que origina unas deformaciones $\delta \varepsilon$, es nulo. Del mismo modo, se puede expresar como una igualdad del trabajo interno realizado por las tensiones sobre las deformaciones virtuales, y el trabajo externo dado por el producto de las fuerzas aplicadas en el elemento y los desplazamientos virtuales donde éstas actúan (Ecuación (3.1)). El símbolo δ indica que el desplazamiento virtual aplicado en el elemento es infinitesimal, de modo el comportamiento de la barra se encuentra en todo momento en régimen lineal. Dado que el desplazamiento virtual es infinitesimal, también serán infinitesimales las deformaciones y tensiones que genere.

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon \sigma dV = \int_{\partial \Omega} \delta u q dS + \delta u_1 F_1 + \delta u_2 F_2 \quad (3.1)$$

La Ecuación (3.1) se puede desarrollar haciendo uso de la ecuación de compatibilidad y de la ley de comportamiento:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} \quad (3.2)$$

$$\sigma = E \varepsilon = E \frac{du}{dx} \quad (3.3)$$

De este modo, introduciendo las Ecuaciones (3.2) y (3.3) en la Ecuación (3.1), y considerando que $dV = A dx$, donde A es la sección transversal del elemento, se obtiene que:

$$\int_0^L \delta \varepsilon E \frac{du}{dx} A dx = \int_0^L \delta u q dx + \delta u_1 F_1 + \delta u_2 F_2 \quad (3.4)$$

donde, la integral de volumen se reduce a una integral de línea sobre la longitud del elemento y, con carácter general, tanto las propiedades del material, la sección transversal y la carga q aplicada pueden depender de la coordenada x del elemento. La única incógnita de esta ecuación es el desplazamiento $u(x)$ a lo largo del elemento. La solución mediante el MEF de la ecuación anterior consiste en encontrar un campo de desplazamientos que satisfaga las condiciones de contorno del problema.

Una forma de buscar esta solución se basa en la aproximación del desplazamiento $u(x)$ en cualquier punto del elemento como una interpolación polinómica de los valores nodales

u_1 y u_2 . Para un elemento de dos nodos como el mostrado en la Figura 3.4 se define el siguiente polinomio interpolador de primer grado:

$$u(x) = a_0 + a_1 x \quad (3.5)$$

donde las constantes a_0 y a_1 se calculan imponiendo las siguientes condiciones en los extremos del elemento:

$$u(0) = u_1 = a_0 \quad (3.6)$$

$$u(L) = u_2 = a_0 + a_1 L \quad (3.7)$$

resultando en:

$$a_0 = u_1 \quad (3.8)$$

$$a_1 = \frac{u_2 - u_1}{L} \quad (3.9)$$

Sustituyendo estas expresiones en la aproximación del campo de desplazamientos dado por la Ecuación (3.5) se llega a:

$$\begin{aligned} u(x) &= u_1 + \left(\frac{u_2 - u_1}{L} \right) x \\ &= \left(1 - \frac{x}{L} \right) u_1 + \left(\frac{x}{L} \right) u_2 \\ &= N_1(x) u_1 + N_2(x) u_2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Las funciones $N_1(x)$ y $N_2(x)$ empleadas para aproximar los desplazamientos se denominan *funciones de forma*:

$$N_1(x) = 1 - \frac{x}{L} \quad N_2(x) = \frac{x}{L} \quad (3.11)$$

Las funciones de forma deben cumplir una serie de requisitos en la formulación del método de los elementos finitos que se indicarán posteriormente. Las funciones utilizadas para aproximar los desplazamientos de un elemento sometido a un estado de esfuerzo axial son funciones lineales (ver Figura 3.5).

La aproximación del campo de desplazamiento en el elemento permite ahora obtener la deformación axial mediante derivación de las funciones de forma:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \frac{dN_1}{dx} u_1 + \frac{dN_2}{dx} u_2 = \frac{u_2 - u_1}{L} \quad (3.12)$$

$$(3.13)$$

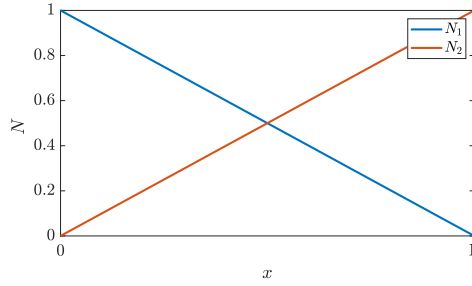


Figura 3.5 Funciones de forma lineales del elemento finito de dos nodos.

Introduciendo esta expresión en la Ecuación (3.4), y utilizando la misma aproximación del elemento para los desplazamientos virtuales, se obtiene:

$$\int_0^L \left(\frac{\delta u_2 - \delta u_1}{L} \right) EA \left(\frac{u_2 - u_1}{L} \right) dx = \int_0^L \left[\left(1 - \frac{x}{L} \right) \delta u_1 + \left(\frac{x}{L} \right) \delta u_2 \right] q dx + \delta u_1 F_1 + \delta u_2 F_2 \quad (3.14)$$

Esta expresión se puede reescribir de la siguiente forma sacando factor común los desplazamientos virtuales de los nodos del elemento:

$$\delta u_1 \left\{ \int_0^L \frac{EA}{L^2} (u_1 - u_2) dx \right\} + \delta u_2 \left\{ \int_0^L \frac{EA}{L^2} (u_2 - u_1) dx \right\} = \delta u_1 \left\{ F_1 + \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L} \right) q dx \right\} + \delta u_2 \left\{ F_2 + \int_0^L \left(\frac{x}{L} \right) q dx \right\} \quad (3.15)$$

Teniendo en cuenta que la Ecuación (3.15) se debe satisfacer para cualquier valor del campo de desplazamientos virtuales y , en particular, debe cumplirse para δu_1 y δu_2 , se obtienen las siguientes expresiones:

$$\int_0^L \frac{EA}{L^2} (u_1 - u_2) dx = F_1 + \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L} \right) q dx \quad (3.16)$$

$$\int_0^L \frac{EA}{L^2} (u_2 - u_1) dx = F_2 + \int_0^L \left(\frac{x}{L} \right) q dx \quad (3.17)$$

Estas integrales se resuelven fácilmente si se suponen constantes en el elemento el módulo de elasticidad del material y la sección transversal de la barra:

$$\frac{EA}{L} (u_1 - u_2) = F_1 + Q_1 \quad (3.18)$$

$$\frac{EA}{L} (u_2 - u_1) = F_2 + Q_2 \quad (3.19)$$

Ambas expresiones se pueden escribir de forma compacta como:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

y en forma matricial como:

$$\mathbf{K}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{F}^e + \mathbf{Q}^e \quad (3.21)$$

donde la matriz $\mathbf{K}^e$ es la *matriz de rigidez elemental*, el vector $\mathbf{u}^e$ contiene los desplazamientos de los nodos, el vector $\mathbf{F}^e$ contiene las fuerzas puntuales aplicadas en los nodos y el vector $\mathbf{Q}^e$ recoge la influencia en los nodos de las cargas que están aplicadas a lo largo del elemento.

3.2.1 Formulaci3n matricial

La formulaci3n del MEF se puede escribir de manera general en forma de matrices. El desplazamiento en cualquier punto del elemento $\mathbf{u}^e$ se puede expresar a partir de los desplazamientos nodales como:

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{u}^e \quad (3.22)$$

$$(3.23)$$

donde el vector $\mathbf{u}^e$ contiene los desplazamientos nodales y $\mathbf{N}$ es la matriz con las funciones de forma.

La deformaci3n ε en cualquier punto del elemento se obtiene de la siguiente expresi3n:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{du}{dx} = \frac{dN_1}{dx} u_1 + \frac{dN_2}{dx} u_2 = \\ &= \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} & \frac{dN_2}{dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \\ &= L \mathbf{N} \mathbf{u}^e = \mathbf{B} \mathbf{u}^e \end{aligned} \quad (3.24)$$

donde $L = d/dx$ es un operador de derivaci3n y $\mathbf{B}$ es la *matriz de deformaci3n* que contiene las derivadas de las funciones de forma. As3 mismo, la tensi3n en un punto del elemento se obtiene como $\sigma = E \varepsilon = E \mathbf{B} \mathbf{u}^e$.

Para introducir estas expresiones en el Principio de los Trabajos Virtuales hay que tener en cuenta que $\delta \varepsilon \sigma = \delta \mathbf{u}^{eT} \mathbf{B}^T E \mathbf{B} \mathbf{u}^e$, y que el trabajo externo asociado a las fuerzas nodales se expresa como $\delta u_1 F_1 + \delta u_2 F_2 = \delta \mathbf{u}^{eT} \mathbf{F}^e$. Teniendo en cuenta estas expresiones, la ecuaci3n del PTV se puede reescribir como:

$$\int_0^L \delta \mathbf{u}^{eT} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{u}^e dx = \int_0^L \delta \mathbf{u}^{eT} \mathbf{N}^T q dx + \delta \mathbf{u}^{eT} \mathbf{F}^e \quad (3.25)$$

donde $\mathbf{C}$ es la matriz de comportamiento, que para este problema resulta $\mathbf{C} = EA$. Dado que el TTV se debe cumplir para cualquier campo de desplazamientos virtual, se obtiene:

$$\left[\int_0^L \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dx \right] \mathbf{u}^e = \int_0^L \mathbf{N}^T q dx + \mathbf{F} \quad (3.26)$$

y definiendo la matriz de rigidez elemental como:

$$\mathbf{K}^e = \int_0^L \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dx \quad (3.27)$$

y el vector de influencia de las cargas aplicadas en el interior del elemento:

$$\mathbf{Q}^e = \int_0^L \mathbf{N}^T q dx \quad (3.28)$$

se obtiene un sistema de dos ecuaciones de la forma $\mathbf{K}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{F}^e + \mathbf{Q}^e$.

Los términos de la matriz de rigidez elemental $\mathbf{K}^e$ y del vector fuerzas equivalente $\mathbf{Q}^e$ se obtienen fácilmente realizando las siguientes integrales, teniendo en cuenta que las funciones de forma y la matriz de comportamiento son conocidas:

$$K_{ij}^e = \int_0^L B_i E A B_j dx \quad (3.29)$$

$$Q_i^e = \int_0^L N_i q dx \quad (3.30)$$

3.2.2 Deformaciones unitarias iniciales

En la práctica existen situaciones donde aparecen unas deformaciones iniciales que no están relacionadas directamente con las cargas que actúan sobre una estructura. La naturaleza de estas deformaciones es diversa, incluyendo defectos de forma, faltas de ajuste, efectos térmicos y alargamientos impuestos. Algunas de estas situaciones tienen su origen en acciones externas, como la variación de la temperatura ambiente a lo largo de la vida de la estructura, y otras se producen intencionadamente, como los alargamientos impuestos en algunas barras de la estructura. En esta sección, se analizan algunos de estos fenómenos.

En primer lugar, se considera una barra sometida a una configuración uniaxial de fuerzas, que produce un estado de tensión dado por $\sigma = E\varepsilon$. Las deformaciones unitarias ε se pueden obtener a partir de la solución del campo de desplazamiento en el elemento tal y como se ha estudiado en el apartado anterior. Ahora, si se considera una deformación unitaria inicial ε_0 , la tensión en el elemento está dada por la siguiente expresión:

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_0) \quad (3.31)$$

La ecuación de equilibrio del elemento se obtiene introduciendo esta expresión de la tensión en el Principio de los Trabajos Virtuales (Ecuación (3.1)):

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon E (\varepsilon - \varepsilon_0) dV = \int_{\partial\Omega} \delta u q dS + \delta u_1 F_1 + \delta u_2 F_2 \quad (3.32)$$

El primer término de la expresión anterior se puede descomponer en:

$$\int_{\Omega} \delta \epsilon E (\epsilon - \epsilon_0) dV = \int_{\Omega} \delta \epsilon E \epsilon dV - \int_{\Omega} \delta \epsilon E \epsilon_0 dV \quad (3.33)$$

De esta forma, la ecuación de equilibrio del elemento desarrollada en el apartado anterior se modifica únicamente por la segunda integral que aparecen en el término de la izquierda de la Ecuación (3.33). Esta integral se reescribe introduciendo la aproximación del campo de desplazamientos del elemento de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta \epsilon E \epsilon_0 dV &= \int_0^L \left(\frac{dN_1}{dx} \delta u_1 + \frac{dN_2}{dx} \delta u_2 \right) EA \epsilon_0 dx \\ &= \int_0^L (\delta u_2 - \delta u_1) \frac{EA}{L} \epsilon_0 dx \\ &= EA \epsilon_0 (\delta u_2 - \delta u_1) \end{aligned} \quad (3.34)$$

Sustituyendo esta expresión en el Principio de los Trabajos Virtuales y, teniendo en cuenta que la igualdad de trabajos se cumple para cualquier campo de desplazamientos virtual compatible, se obtiene el siguiente vector de fuerzas equivalente:

$$\mathbf{Q}_0^e = EA \epsilon_0 \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.35)$$

donde, se ha asumido que la deformación inicial es uniforme en el elemento. En el caso contrario, la integral anterior se resuelve introduciendo una deformación inicial de la forma $\epsilon_0 = \epsilon_0(x)$.

Finalmente, la ecuación de equilibrio del elemento resulta:

$$\mathbf{K}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{F}^e + \mathbf{Q}^e + \mathbf{Q}_0^e \quad (3.36)$$

En esta ecuación, el significado de los términos que aparecen es el mismo que en la sección anterior y, adicionalmente, aparece en el término independiente el vector de fuerzas equivalente $\mathbf{Q}_0^e$ asociado a las deformaciones unitarias iniciales del elemento.

El origen de estas deformaciones puede ser diverso, como se ha comentado al inicio de este apartado. Por ejemplo, un alargamiento impuesto ΔL produce una deformación inicial $\epsilon_0 = \Delta L/L$. Así mismo, una variación de la temperatura ΔT provoca una deformación $\epsilon_0 = \alpha \Delta T$, que depende del coeficiente de dilatación térmica α del material¹. Una variación positiva de la temperatura origina una dilatación del elemento, que está representada por una fuerza negativa en el nodo i y una fuerza positiva en el nodo j de acuerdo a la definición del vector de fuerzas equivalente $\mathbf{Q}_0^e$. Un decremento térmico producirá una contracción del elemento y las fuerzas serán de sentido contrario.

¹ El coeficiente de dilatación térmica del acero es $\alpha = 1.2 \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$. El aluminio tiene un coeficiente $\alpha = 2.3 \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$.

3.3 Transformación de coordenadas

Hasta ahora, se ha formulado la ecuación de equilibrio de un elemento mediante la matriz de rigidez y los vectores de desplazamientos y fuerzas nodales. La ecuación de equilibrio de la estructura se puede obtener imponiendo las condiciones de equilibrio de fuerzas y compatibilidad de desplazamientos en los nodos compartidos entre varios elementos. De esta forma, se obtendrá un sistema de ecuaciones análogo a los vistos en las secciones anteriores. Para realizar estas operaciones es necesario utilizar varios sistemas de coordenadas.

En primer lugar, se define un *sistema de coordenadas general* (en color azul en la Figura 3.6), que se usa para definir la posición geométrica de la estructura. Este sistema de coordenadas permite la definición de los nodos y de los elementos en el espacio de trabajo. Normalmente se usa sistema de coordenadas cartesiano, aunque también es posible usar en algunas situaciones más específicas un sistema de referencia cilíndrico o esférico.

Como se ha indicado previamente, también se define un *sistema de coordenadas elemental* en cada uno de los nodos del elemento (en color negro en la Figura 3.6), que se suele denotar como $\square'$. Dicho sistema tiene tantas coordenadas como grados de libertad sean necesarios para obtener la solución del problema estudiado. La formulación elemental del MEF se desarrolla en el sistema de coordenadas elemental y, por lo tanto, la solución elemental del problema (esfuerzos) se refiere a este sistema de coordenadas.

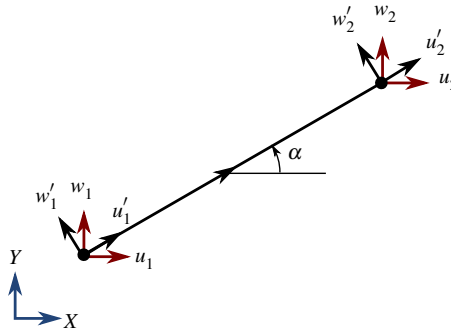


Figura 3.6 Sistemas de coordenadas: general, global y elemental.

Por último, en cada uno de los nodos, se define un *sistema de coordenadas global* cuyos ejes son paralelos entre sí (en color rojo en la Figura 3.6). Este sistema de coordenadas permite de manera sencilla aplicar las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad entre los elementos en los que se discretiza la estructura. La solución nodal del MEF se obtiene según el sistema de coordenadas global.

Si α es el ángulo formado por el sistema de coordenadas elemental y el sistema de coordenadas global, la siguiente transformación permite pasar de un sistema a otro:

$$\begin{Bmatrix} A'_x \\ A'_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \end{Bmatrix} \quad (3.37)$$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{L}_D^T \mathbf{A} \quad (3.38)$$

Teniendo en cuenta que $\mathbf{L}_D^{-1} = \mathbf{L}_D^T$:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}_D \mathbf{A}' \quad (3.39)$$

La transformación anterior permite relacionar los desplazamientos y las fuerzas nodales en los sistemas de coordenadas global y elemental. Esta transformación puede extenderse para considerar el giro en un nodo del elemento teniendo en cuenta que es invariante respecto a la rotación del sistema de referencia, es decir, que su valor es el mismo en ambos sistemas. De esta forma, la matriz de transformación será la siguiente:

$$\mathbf{L}_D^T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

La matriz de rigidez del elemento se puede obtener en coordenadas globales a partir de la Ecuación (3.21) dada en coordenadas elementales (se introduce la nomenclatura $\square'$):

$$\mathbf{K}^{el} \mathbf{u}^{el} = \mathbf{F}^{el} + \mathbf{Q}^{el} \quad (3.41)$$

$$\mathbf{K}^{elT} \mathbf{L}^T \mathbf{u}^e = \mathbf{L}^T (\mathbf{F}^e + \mathbf{Q}^e) \quad (3.42)$$

$$\mathbf{L} \mathbf{K}^{elT} \mathbf{L}^T \mathbf{u}^e = \mathbf{F}^e + \mathbf{Q}^e \quad (3.43)$$

$$\mathbf{K}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{F}^e + \mathbf{Q} \quad (3.44)$$

donde $\mathbf{K}^e = \mathbf{L} \mathbf{K}^{elT} \mathbf{L}^T$ es la matriz de rigidez elemental expresada en coordenadas globales, y $\mathbf{L}$ es la matriz de transformación de coordenadas del elemento:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_D & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_D \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Esta matriz se construye como una matriz por bloques a partir de la matriz de transformación $\mathbf{L}_D$, y permite transformar las variables nodales expresadas en el sistema de coordenadas elemental al sistema global.

La matriz de rigidez del elemento finito tipo barra formulado en el apartado anterior se expresa en el sistema de coordenadas global introduciendo unas filas y columnas de ceros para considerar una variable nodal ficticia asociada al movimiento transversal de la barra. De esta forma, los desplazamientos de los nodos del elemento están definidos por la componente longitudinal, u_1 y u_2 , y por la componente transversal, w_1 y w_2 . La ecuación de equilibrio del elemento se reescribe como:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_1 \\ w'_1 \\ u'_2 \\ w'_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F'_1 \\ 0 \\ F'_2 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q'_1 \\ 0 \\ Q'_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.46)$$

Se puede comprobar que la ecuación de equilibrio del elemento escrita de esta forma

es equivalente a la Ecuación (3.20), ya que la segunda y cuarta ecuación son idénticamente nulas. Sin embargo, esta expresión de la ecuación de equilibrio permite aplicar la transformación de coordenadas obteniéndose la siguiente matriz de rigidez global del elemento:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^e &= \mathbf{L} \mathbf{K}^{e'} \mathbf{L}^T \\ &= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha & -\cos^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha \\ \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha & -\sin^2 \alpha \\ -\cos^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha & \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha \\ -\cos \alpha \sin \alpha & -\sin^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.47)$$

3.4 Discretización con n -elementos

Una estructura se puede discretizar en cualquier número de elementos finitos. A medida que el número de elementos aumenta, si la formulación es convergente, la solución numérica obtenida se aproxima más a la exacta, pero también aumenta el tiempo de cómputo del procedimiento matemático. La solución de una estructura discretizada en varios se obtiene sin más que imponer en los nodos entre elementos las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad.

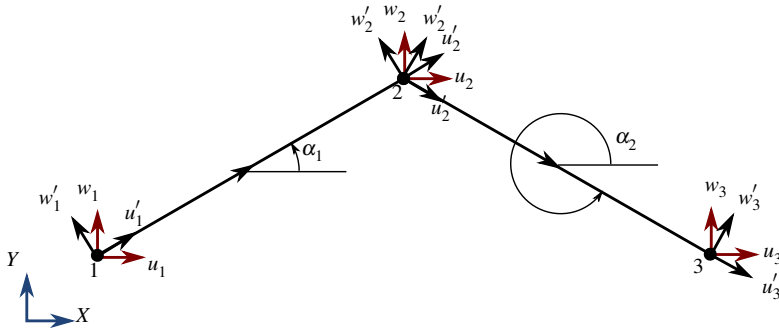


Figura 3.7 Equilibrio y compatibilidad en un nodo común a dos elementos.

La estructura de la Figura 3.7 está formada por dos elementos. El elemento $e1$ va desde el nodo 1 al 2, mientras que la conectividad del elemento $e2$ se define desde el nodo 2 al 3. El nodo 2 es común a ambos elementos y en este punto hay una serie de fuerzas externas aplicadas. En cada uno de los elementos se satisface la ecuación de equilibrio en coordenadas globales:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1^{e1} \\ \mathbf{F}_2^{e1} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_1^{e1} \\ \mathbf{Q}_2^{e1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{e1} & \mathbf{K}_{12}^{e1} \\ \mathbf{K}_{21}^{e1} & \mathbf{K}_{22}^{e1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1^{e1} \\ \mathbf{u}_2^{e1} \end{Bmatrix} \quad (3.48)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F}_2^{e2} \\ \mathbf{F}_3^{e2} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_2^{e2} \\ \mathbf{Q}_3^{e2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{22}^{e2} & \mathbf{K}_{23}^{e2} \\ \mathbf{K}_{23}^{e2} & \mathbf{K}_{33}^{e2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_2^{e2} \\ \mathbf{u}_3^{e2} \end{Bmatrix} \quad (3.49)$$

Imponiendo la condición de equilibrio de fuerzas en el nodo 2 se obtiene:

$$\mathbf{F}_2^{e1} + \mathbf{Q}_2^{e1} + \mathbf{F}_2^{e2} + \mathbf{Q}_2^{e2} = \mathbf{F}_2 + \mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{21}^{e1} & \mathbf{K}_{22}^{e1} & \mathbf{K}_{22}^{e2} & \mathbf{K}_{23}^{e2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1^{e1} \\ \mathbf{u}_2^{e1} \\ \mathbf{u}_2^{e2} \\ \mathbf{u}_3^{e2} \end{Bmatrix} \quad (3.50)$$

y, teniendo en cuenta la compatibilidad de desplazamientos:

$$\mathbf{u}_2^{e1} = \mathbf{u}_2^{e2} = \mathbf{u}_2 \quad (3.51)$$

se obtiene la ecuación de equilibrio de la estructura:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{F}_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{Q}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{e1} & \mathbf{K}_{12}^{e1} & 0 \\ \mathbf{K}_{21}^{e1} & \mathbf{K}_{22}^{e1} + \mathbf{K}_{22}^{e2} & \mathbf{K}_{23}^{e2} \\ 0 & \mathbf{K}_{32}^{e2} & \mathbf{K}_{33}^{e2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{Bmatrix} \quad (3.52)$$

Esta expresión relaciona las fuerzas aplicadas en los nodos con los desplazamientos. La resolución de este sistema requiere aplicar las condiciones de contorno del problema.

Ejemplo 3.4.1 La barra en voladizo de la Figura 3.8 está sometida a una carga P en su extremo libre y a una carga q repartida uniformemente. Se desea obtener la distribución de esfuerzos axiales.

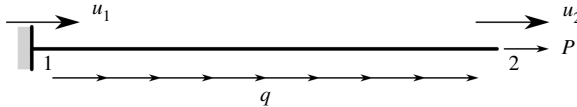


Figura 3.8 Voladizo sometido a cargas longitudinales.

Solución. En este ejemplo la barra se discretiza con un elemento finito como el que se ha formulado en las secciones anteriores de este capítulo. La ecuación de equilibrio de la estructura se corresponde, en este caso sencillo, con la Ecuación (3.21). Para particularizar esta expresión es necesario calcular el vector de fuerzas nodales equivalente integrando la carga repartida en el elemento, que resulta en:

$$q_1 = \int_0^L N_1 q dx = \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right) q dx = \frac{qL}{2}$$

$$q_2 = \int_0^L N_2 q dx = \int_0^L \frac{x}{L} q dx = \frac{qL}{2}$$

Este resultado expresa que la resultante de la carga q aplicada en la longitud del elemento L se reparte por igual entre ambos nodos.

Por tanto, la ecuación de equilibrio particularizada con los datos del problema es la siguiente:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ P \end{Bmatrix} + \frac{qL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

donde las incógnitas del problema son el desplazamiento del nodo 2 y la fuerza de reacción en el empotramiento, correspondiente con F_1 . De la segunda ecuación se obtiene que:

$$u_2 = \frac{L}{EA} \left(P + \frac{qL}{2} \right)$$

y, sustituyendo el valor del desplazamiento en la primera ecuación se calcula el valor de la reacción:

$$F_1 = -(P + qL)$$

Una vez se conocen los desplazamientos en todos los nodos del elemento, se puede obtener el campo de desplazamientos en cualquier punto mediante la aproximación dada por la Ecuación (3.10), así como el resto de variables:

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 = \frac{x}{EA} \left(P + \frac{qL}{2} \right) \quad (3.53)$$

$$\varepsilon = \frac{dN_1}{dx} u_1 + \frac{dN_2}{dx} u_2 = \left(\frac{1}{L} \right) u_2 = \frac{1}{EA} \left(P + \frac{qL}{2} \right) \quad (3.54)$$

$$N = \sigma A = EA \varepsilon = P + \frac{qL}{2} \quad (3.55)$$

La solución exacta del problema estudiado en este ejemplo viene dada por las Ecuaciones (3.56-3.58). Esta solución es la suma de las acciones de la fuerza nodal P y de la carga repartida q . La primera componente de la solución es idéntica a la obtenida en el Capítulo 2. La Figura 3.9 muestra la aproximación obtenida con el MEF para el esfuerzo axial discretizando la barra con un solo elemento (línea roja) y la solución exacta (línea azul). Dado que las funciones de forma empleadas en la formulación del elemento son lineales, el axil obtenido es constante a lo largo del elemento. Sin embargo, la distribución exacta del esfuerzo axial a lo largo de la barra es lineal. Por tanto, la solución proporcionada por el MEF presenta un error apreciable en este caso.

Si se resuelve el mismo problema discretizando la barra con dos elementos finitos de longitud $L/2$ se obtiene la solución mostrada por la línea naranja. Como en el caso anterior, debido a que las funciones de forma empleadas son lineales, la distribución de esfuerzos axiales es constante en el interior del elemento, pero el error de la aproximación es menor. El MEF se dice que es convergente cuando, como ocurre en este caso, a medida que

aumenta el número de elementos empleados el error de la solución numérica disminuye.

$$u^* = \frac{x}{EA} \left(P + q \left(L - \frac{x}{2} \right) \right) \quad (3.56)$$

$$\epsilon^* = \frac{1}{EA} (P + q(L - x)) \quad (3.57)$$

$$N^* = P + q(L - x) \quad (3.58)$$

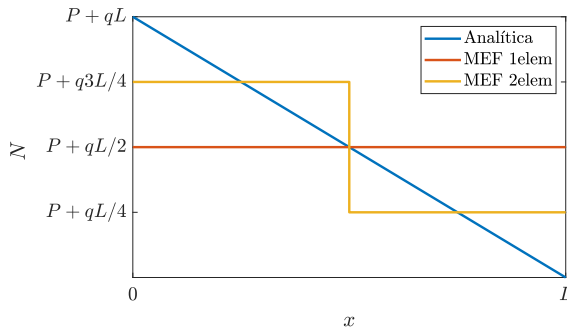


Figura 3.9 Representación del esfuerzo axial a lo largo de la barra.

3.5 Formulación del elemento sometido a esfuerzos de flexión: Formulación de Euler-Bernoulli

En esta sección se estudia la formulación del MEF para resolver el problema de flexión de vigas aplicando la teoría de Euler-Bernoulli (E-B). Con este objetivo, se considera una viga de longitud L y sección transversal dada por el área A y la inercia I . Sobre la viga actúa un conjunto de cargas verticales y momentos contenidos en el plano xz de Figura 3.10. La acción de estas cargas producirá la deformación de la viga representada en la Figura 3.11.

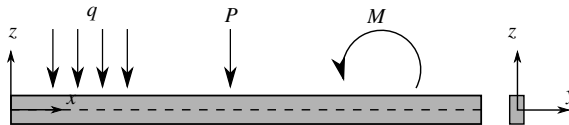


Figura 3.10 Viga sometida una serie de cargas verticales y momentos.

En primer lugar, se establecen las tres hipótesis en las que se basa la teoría clásica de vigas:

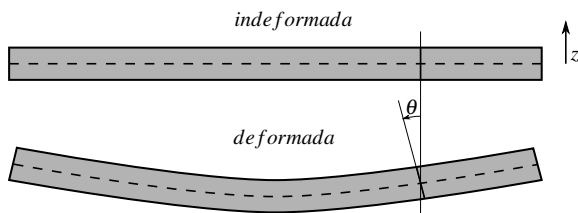


Figura 3.11 Deformación de una viga por flexión.

1. Los desplazamientos verticales (flechas) de todos los puntos de una misma sección transversal son pequeños e iguales a los del eje de la viga en la posición x , es decir, $w(x,y,z) = w(x)$. En la Figura 3.11 se muestra la situación indeformada y deformada de una viga producida por un estado de flexión. Esta hipótesis conlleva que en cualquier sección transversal de la viga no se originan acortamientos o alargamientos debidos a la deformación. Por tanto, el eje central de la viga, representado en línea discontinua, se toma como eje representativo de la viga.
2. El desplazamiento lateral (v , según el eje y en la Figura 3.10) es nulo, ya que todas las cargas están contenidas en el plano xz .
3. Las secciones transversales normales al eje de la viga antes de la deformación, permanecen planas y ortogonales a dicho eje después de la deformación, como se muestra en la Figura 3.12.

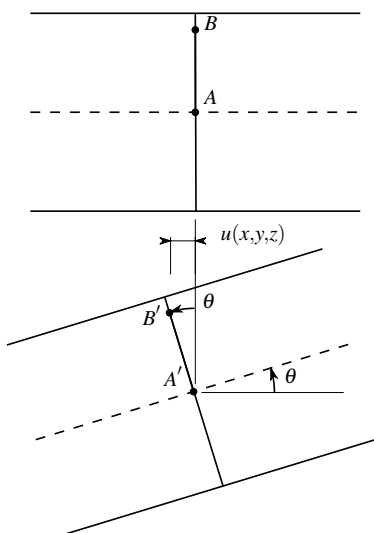


Figura 3.12 Secciones de la viga antes y después de la deformación.

De acuerdo con las hipótesis anteriores, el desplazamiento horizontal del punto B de una determinada sección estará definido por el ángulo girado θ (Figura 3.12). Si la coordenada vertical de dicho punto es z , el desplazamiento horizontal debido al giro de la sección es

$u(x,y,z) = -z \sin(\theta)$. Asumiendo que el ángulo es pequeño, el seno del ángulo girado se puede aproximar como $\sin(\theta) \approx \theta$ y, por tanto, el campo de desplazamientos de un punto cualquiera se puede escribir teniendo en cuenta que $\theta(x) = dw(x)/dx$ como:

$$u(x,y,z) = u(x,z) = -z\theta(x) = -z \frac{dw(x)}{dx} \quad (3.59)$$

$$v(x,y,z) = 0 \quad (3.60)$$

$$w(x,y,z) = w(x) \quad (3.61)$$

$$(3.62)$$

La deformación en un punto de la viga se calcula aplicando la ecuación de compatibilidad, obteniéndose que:

$$\varepsilon_x(x,z) = \frac{du(x,z)}{dx} = -z \frac{d^2w(x)}{dx^2} \quad (3.63)$$

siendo el resto de términos del tensor de deformación nulos.

Del mismo modo, la única componente de la tensión distinta de cero se obtiene mediante la ecuación de comportamiento:

$$\sigma_x(x,z) = E\varepsilon_x(x,z) = E \frac{du(x,z)}{dx} = -zE \frac{d^2w(x)}{dx^2} \quad (3.64)$$

y, finalmente, el momento flector positivo en una sección se define como (Figura 3.13):

$$\begin{aligned} M(x) &= - \int_A z \sigma_x(x,z) dA = \int_A z^2 E \frac{d^2w(x)}{dx^2} dA \\ &= E \frac{d^2w(x)}{dx^2} \int z^2 dA = E \frac{d^2w(x)}{dx^2} I = EI \chi(x) \end{aligned} \quad (3.65)$$

donde la inercia de la sección y la curvatura de la viga se definen respectivamente como:

$$I = \int_A z^2 dA \quad (3.66)$$

$$\chi(x) = \frac{d^2w(x)}{dx^2} \quad (3.67)$$

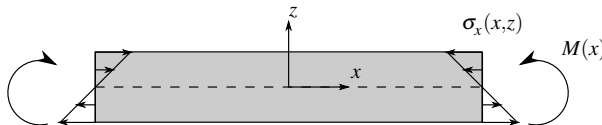


Figura 3.13 Convenio de signos para la tensión σ_x y el momento flector en la sección.

Una vez que se han definido los conceptos anteriores, es posible escribir el Principio de los Trabajos Virtuales para el elemento finito de dos nodos representado en la Figura 3.14:

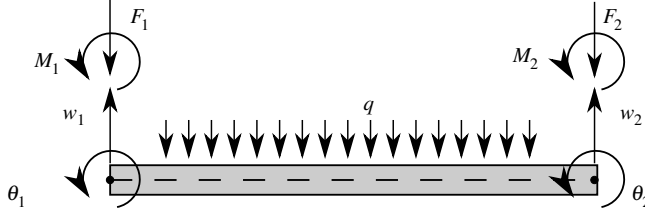


Figura 3.14 Elemento finito viga de E-B de dos nodos.

$$\int_{\Omega} \delta \epsilon_x \sigma_x dV = \int_0^L \delta w q dx + \sum_{i=1}^p \delta w_i F_i + \sum_{i=1}^q \delta \theta_i M_i \quad (3.68)$$

donde q son las fuerzas verticales repartidas, y F y M son las fuerzas verticales y los momentos aplicados en los nodos del elemento. El primer miembro de la Ecuación (3.68), que representa el trabajo interno, se simplifica suponiendo material homogéneo como:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta \epsilon_x \sigma_x dV &= \int_0^L \int_A \left(-z \frac{d^2 \delta w}{dx^2} \right) \left(-z E \frac{d^2 w}{dx^2} \right) dA dx \\ &= \int_0^L \left(\frac{d^2 \delta w}{dx^2} \right) EI \frac{d^2 w}{dx^2} dx \\ &= \int_0^L \delta \chi EI \chi dx \\ &= \int_0^L \delta \chi M dx \end{aligned} \quad (3.69)$$

Por tanto, la expresión del PTV del elemento finito de dos nodos representado en la Figura 3.14 es:

$$\int_0^L \delta \chi M dx = \int_0^L \delta w q dx + \sum_{i=1}^2 \delta w_i F_i + \sum_{i=1}^2 \delta \frac{dw_i}{dx} M_i \quad (3.70)$$

En la Ecuación (3.70) la única incógnita que aparece es la flecha w , cuya derivada debe ser continua para que la integral tenga primitiva (aproximación con una función $\mathbb{C}^1$). La continuidad de las dos primeras derivadas obliga a tomar como variables tanto a la flecha w como el giro $\frac{dw}{dx}$ y, de este modo, se eligen como variables nodales la flecha y su derivada, w_i y $\frac{dw_i}{dx}$.

Estas variables definen una variación cúbica de la flecha:

$$w(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \quad (3.71)$$

Las constantes de interpolación se determinan forzando los valores de la flecha y el giro en los extremos del elemento:

$$w_1 = a_0 \quad (3.72)$$

$$\left. \frac{dw}{dx} \right|_1 = a_1 \quad (3.73)$$

$$w_2 = a_0 + a_1 L + a_2 L^2 + a_3 L^3 \quad (3.74)$$

$$\left. \frac{dw}{dx} \right|_2 = a_1 + 2a_2 L + 3a_3 L^2 \quad (3.75)$$

$$(3.76)$$

De esta forma, la aproximación del campo de desplazamientos en el elemento se expresa como:

$$w(x) = N_1(x)w_1 + \bar{N}_1(x) \left. \frac{dw}{dx} \right|_1 + N_2(x)w_2 + \bar{N}_2(x) \left. \frac{dw}{dx} \right|_2 \quad (3.77)$$

donde las funciones de forma del elemento finito de Euler-Bernoulli son:

$$N_1(x) = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \quad (3.78)$$

$$\bar{N}_1(x) = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (3.79)$$

$$N_2(x) = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \quad (3.80)$$

$$\bar{N}_2(x) = \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L} \quad (3.81)$$

En la Figura 3.15 se presentan las funciones de forma del elemento.

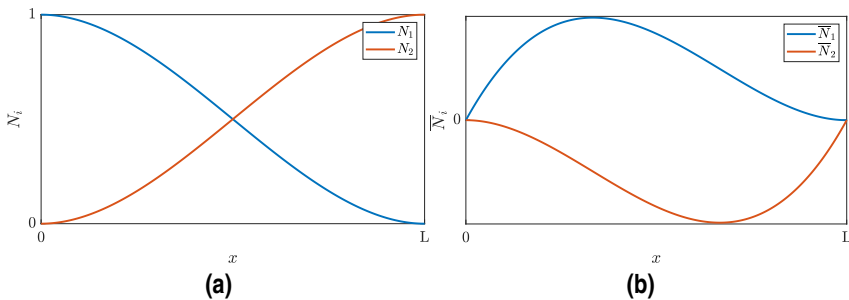


Figura 3.15 Funciones de forma del elemento finito de Euler-Bernoulli de dos nodos: polinomios de Hermite.

La Ecuación (3.77) se expresa en forma matricial del siguiente modo:

$$w(x) = [N_1 \quad \bar{N}_1 \quad N_2 \quad \bar{N}_2] \left\{ \begin{array}{c} w_1 \\ \left. \frac{dw}{dx} \right|_1 \\ w_2 \\ \left. \frac{dw}{dx} \right|_2 \end{array} \right\} = \mathbf{N} \mathbf{u}^e \quad (3.82)$$

donde, $\mathbf{u}^e$ es el vector que contiene las variables nodales.

La Ecuación (3.82) define una aproximación de la flecha en cualquier punto del elemento a partir del valor nodal de la flecha y de su derivada en cada uno de los nodos, mediante las funciones de forma. La aproximación del campo de desplazamientos permite calcular la curvatura en cualquier punto del elemento como:

$$\chi = \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{d^2 \mathbf{N}}{dx^2} \mathbf{u}^e = \mathbf{B}_f \mathbf{u}^e \quad (3.83)$$

donde $\mathbf{B}_f$ es la matriz de deformación por flexión.

Introduciendo las aproximaciones anteriores en la Ecuación (3.70) del PTV resulta:

$$\int_0^L \delta \mathbf{u}^{eT} \mathbf{B}_f^T E I \mathbf{B}_f \mathbf{u}^e dx = \int_0^L \delta \mathbf{u}^{eT} \mathbf{N}^T q dx + \delta \mathbf{u}^{eT} \mathbf{F}^e \quad (3.84)$$

donde $\mathbf{F}$ es un vector que contiene las fuerzas y momentos externos aplicados en los nodos. Dado que la Ecuación (3.84) debe cumplirse para cualquier desplazamiento virtual, se tiene:

$$\left[\int_0^L \mathbf{B}_f^T E I \mathbf{B}_f dx \right] \mathbf{u}^e = \int_0^L \mathbf{N}^T q dx + \mathbf{F}^e \quad (3.85)$$

Si se define la matriz de rigidez del elemento:

$$\mathbf{K}^e = \int_0^L \mathbf{B}_f^T E I \mathbf{B}_f dx \quad (3.86)$$

y el vector de influencia de las cargas aplicadas en el interior del elemento,

$$\mathbf{Q}^e = \int_0^L \mathbf{N}^T q dx \quad (3.87)$$

se obtiene la siguiente ecuación matricial:

$$\mathbf{K}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{Q}^e + \mathbf{F}^e \quad (3.88)$$

La matriz de rigidez elemental se obtiene realizando las correspondientes integraciones a lo largo del elemento:

$$\mathbf{K}^e = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

El vector de influencia $\mathbf{Q}$ de las cargas aplicadas en el interior del elemento se obtiene de forma análoga. Para el caso de una carga uniforme q se obtiene:

$$\mathbf{Q}^e = qL \begin{Bmatrix} 1/2 \\ L/12 \\ 1/2 \\ -L/12 \end{Bmatrix} \quad (3.90)$$

3.6 Generalización del elemento

El elemento de Eurler-Bernoulli desarrollado se puede combinar con la formulación del elemento sometido a esfuerzo axil en la Sección 3.2, y obtener un elemento que representa la combinación de ambos esfuerzos en elementos de estructuras planas. Este elemento se obtiene combinando adecuadamente los términos de las matrices de rigidez elemental de cada uno:

$$\mathbf{K}^{e'} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

y, el vector de desplazamientos nodales será $\mathbf{K}^{e'} = \{u'_1, w'_1, \theta'_1, u'_2, w'_2, \theta'_2\}$. Las componentes del vector de fuerzas tienen un significado análogo.

La operación con este nuevo elemento es similar a lo estudiado en las secciones anteriores. En este sentido, la aplicación de la transformación de coordenadas se realiza teniendo en cuenta que el giro y el momento en los nodos del elemento permanecen invariantes ante este tipo de operación. De esta forma, la matriz de transformación de coordenadas se modifica como:

$$\mathbf{L}_D = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

El programa comercial de elementos finitos ANSYS implementa la formulación de E-B en los elementos BEAM3 (2D) y BEAM4 (3D). Sin embargo, ANSYS incluye algunas variaciones a lo recogido en este documento a la hora de obtener los diagramas de esfuerzos.

Para generalizar la formulación del elementos finitos es conveniente transformar la coordenada espacial $0 \leq x \leq L$ a una coordenada natural $-1 \leq \xi \leq +1$. De este modo, todos los elementos finitos barra tienen una longitud igual a 2 con el punto medio en la coordenada $\xi = 0$ como se muestra en la Figura 3.16. La transformación de coordenadas, para un elemento barra recto de longitud L resulta sencilla:

$$\xi = \frac{2x}{L} - 1 \quad (3.93)$$

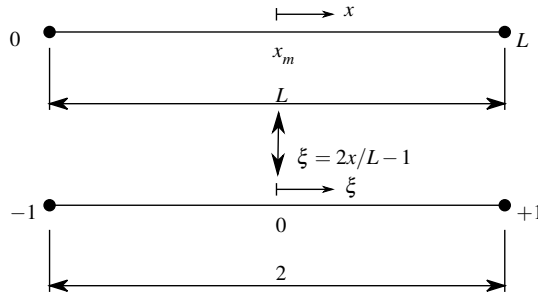


Figura 3.16 Transformación de coordenadas espaciales a coordenadas naturales para el elemento barra.

De esta forma la aproximación del campo de desplazamientos se expresa como una combinación de las funciones de forma en coordenadas naturales. Por ejemplo, en la formulación del elemento finito de E-B, la flecha en un punto ξ del elemento se aproxima como:

$$w(\xi) = N_1(\xi)w_1 + \frac{L}{2}\bar{N}_1(\xi)\left.\frac{dw}{dx}\right|_1 + N_2(\xi)w_2 + \frac{L}{2}\bar{N}_2(\xi)\left.\frac{dw}{dx}\right|_2 \quad (3.94)$$

en la que se definen las nuevas funciones de forma para el elemento barra de flexión en coordenadas naturales (Figura 3.17):

$$N_1(\xi) = \frac{1}{4}(2 - 3\xi + \xi^3) \quad (3.95)$$

$$\bar{N}_1(\xi) = \frac{1}{4}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3) \quad (3.96)$$

$$N_2(\xi) = \frac{1}{4}(2 + 3\xi - \xi^3) \quad (3.97)$$

$$\bar{N}_2(\xi) = \frac{1}{4}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3) \quad (3.98)$$

Análogamente, se puede generalizar el elemento finito sometido a esfuerzo axial calculando

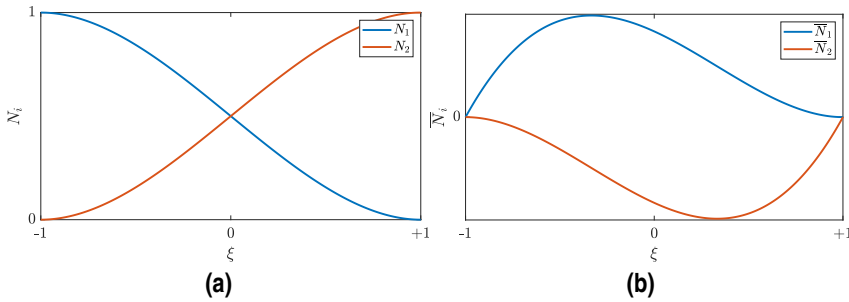


Figura 3.17 Funciones de forma del elemento finito de Euler-Bernoulli de dos nodos: polinomios de Hermite.

el desplazamiento axial mediante funciones de forma definidas en coordenadas naturales.

La generalización del elemento permite evaluar las integrales involucradas en el MEF numéricamente empleando, por ejemplo, una cuadratura de Gauss-Legendre. De esta forma, la integral de una función $f(\xi)$ en el dominio entre -1 y 1 se realiza mediante una simple suma:

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n \omega_i f(\xi_i) = \omega_1 f(\xi_1) + \omega_2 f(\xi_2) + \dots \quad (3.99)$$

donde la función $f(\xi)$ se evalúa en los puntos de Gauss-Legendre ξ_i , cuyos valores se ponderan con los pesos ω_i . En la Tabla 3.1 se muestran los puntos de Gauss-Legendre para distintos ordenes n de la integración numérica. La integración numérica de Gauss-Legendre de orden n integra de manera exacta polinomios de hasta grado $2n - 1$.

Ejemplo 3.6.1 Calcule el término $\mathbf{K}_{11}'$ de la matriz de rigidez del elemento de E-B mediante integración numérica.

Tabla 3.1 Pesos y puntos de Gauss-Legendre para distintos ordenes n de integración.

n	ξ_1	ξ_2	ω_1	ω_2
1	0	-	2	-
2	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	1

Solución.

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{11}^{e'} &= \int_0^L B_{1f}(x)^T EIB_{1f}(x) dx \\
&= \int_{-1}^1 B_{1f}(\xi)^T EIB_{1f}(\xi) \frac{L}{2} d\xi \\
&= \int_{-1}^1 \frac{18EI\xi^2}{L^3} d\xi
\end{aligned}$$

El grado del polinomio del integrando es 2, por lo que utilizando la integración numérica de orden 2, que integra exactamente polinomios de hasta grado 3, se obtendrá la solución exacta de esta integral:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{11}^{e'} &= \sum_{i=1}^2 \omega_i \frac{18EI\xi_i^2}{L^3} \\
&= \frac{18EI}{L^3} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left(\frac{-1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right] = \frac{12EI}{L^3}
\end{aligned}$$

El resultado es idéntico al obtenido realizando la integración de forma analítica.

3.7 Cálculo de esfuerzos

En las secciones anteriores se ha estudiado la formulación de un elemento finito tipo barra que permite analizar el comportamiento de partes estructurales sometidas a una combinación de axil y flexión. Este elemento tiene tres grados de libertad por nodo que representan las traslaciones y el giro, y a partir de éstos es posible calcular el desplazamiento en cualquier punto del elemento mediante interpolación usando las funciones de forma. El grado de aproximación de la solución depende del orden de las funciones de forma.

Una vez que se ha obtenido la solución nodal, es posible calcular los esfuerzos y, también las deformaciones y tensiones, aplicando las leyes de comportamiento estudiadas en el ámbito de la Resistencia de Materiales. Para ello, es necesario expresar la solución nodal en el sistema de coordenadas elemental aplicando la transformación de coordenadas estudiada anteriormente: $\mathbf{u}^{e'} = \mathbf{L}^T \mathbf{u}^e$.

Por ejemplo, el cálculo del esfuerzo axil en un elemento se realiza teniendo en cuenta que $N(x) = \sigma_x(x)A$, y que la tensión longitudinal en el elemento se obtiene mediante la

ley de comportamiento como $\sigma_x(x) = E\epsilon_x(x)$. La solución nodal obtenida mediante el Método de los Elementos Finitos aproxima la componente longitudinal de la deformación derivando la funciones de forma, como se ha estudiado en la formulación del elemento sometido a esfuerzo axil. Entonces, el esfuerzo axil en el elemento es:

$$\begin{aligned} N(x) &= EA\epsilon_x(x) \\ &= EA \frac{d\mathbf{N}}{dx} \mathbf{u}^{el} \\ &= \frac{EA}{L} (u'_2 - u'_1) \end{aligned} \quad (3.100)$$

La simple inspección de la expresión anterior muestra que la solución obtenida para el esfuerzo axil es constante en el elemento. Este resultado está dado por la aproximación lineal usada para los desplazamientos axiales en el elemento, que una vez derivados para calcular las deformaciones pierde un orden de exactitud. Por tanto, será necesario utilizar una discretización más fina en aquellos problemas donde la variación del esfuerzo axil no se pueda representar con una aproximación constante, como se mostró en el Ejemplo 3.4.1.

Así mismo, el cálculo del momento flector y del cortante en una viga proporciona unos resultados similares. El momento flector en una viga bajo las hipótesis de Euler-Bernoulli se define como $M(x) = EI\chi(x)$, donde la curvatura se calcula como la segunda derivada de la flecha. Una vez introducida la aproximación del elemento, se obtiene que:

$$M(x) = EI \left[\left(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} \right) w_1 + \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L} \right) \theta_1 + \left(-\frac{12x}{L^3} + \frac{6}{L^2} \right) w_2 + \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \right) \theta_2 \right] \quad (3.101)$$

donde, los giros nodales se han expresado por θ_1 y θ_2 . En este caso, la aproximación del momento flector es lineal al ser el orden de las funciones de forma cúbico. Por tanto, se tienen un grado de aproximación mayor que en el esfuerzo axil.

Ahora, si se deriva la expresión del momento flector para calcular el esfuerzo cortante se obtiene que:

$$Q = -\frac{dM}{dx} = EI \left[\left(\frac{12}{L^3} \right) w_1 + \left(\frac{6}{L^2} \right) \theta_1 + \left(-\frac{12}{L^3} \right) w_2 + \left(\frac{6}{L^2} \right) \theta_2 \right] \quad (3.102)$$

y, en este caso, se obtiene una aproximación constante en el elemento debida a la pérdida de exactitud al derivar de nuevo.

Estas expresiones permiten calcular los esfuerzos en cada elemento de la estructura una vez que se ha calculado la solución nodal del problema. Sin embargo, es posible usar la ecuación de equilibrio del elemento para calcular los esfuerzos asumiendo que $\mathbf{F}^{el} = \mathbf{K}^{el} \mathbf{u}^{el}$, ya que las expresiones anteriores evaluadas en los extremos del elemento proporcionan resultados idénticos, aunque de signos contrarios en el nudo 1.

Por ejemplo, el momento flector evaluado en los nodos del elemento es:

$$M(0) = EI \left[-\frac{6}{L^2}w_1 - \frac{4}{L}\theta_1 + \frac{6}{L^2}w_2 - \frac{2}{L}\theta_2 \right] = -M_1 \quad (3.103)$$

$$M(L) = EI \left[\frac{6}{L^2}w_1 + \frac{2}{L}\theta_1 - \frac{6}{L^2}w_2 + \frac{4}{L}\theta_2 \right] = M_2 \quad (3.104)$$

donde se pone en evidencia que los esfuerzos en $x = 0$ son de signo contrario a los obtenidos mediante la ecuación de equilibrio de fuerzas elemental. Además, se puede comprobar que los signos de los esfuerzos obtenidos mediante equilibrio elemental tienen significado de equilibrio en la rebanada.

En el caso de que existan cargas internas en el elemento, los esfuerzos calculados no cumplen estrictamente el equilibrio de fuerzas en el elemento, y difiere exactamente en el término $\mathbf{Q}^{el}$ de las fuerzas nodales equivalentes. Para asegurar el equilibrio del elemento es suficiente añadir este término en el cálculo de los esfuerzos, obteniéndose que $\mathbf{F}^{el} = \mathbf{K}^{el}\mathbf{u}^{el} - \mathbf{Q}^{el}$. Esta solución se adopta en la implementación del elemento finito basado en las hipótesis de Euler-Bernoulli en el programa comercial ANSYS.

Es importante considerar que el cálculo del esfuerzo axial en problemas donde hay deformaciones unitarias iniciales no sigue este razonamiento, ya que la tensión longitudinal considera implícitamente a éstas y, por tanto, el esfuerzo axial es:

$$N(x) = EA(\varepsilon - \varepsilon_0) = \frac{EA}{L}(u_2 - u_1) - EA\varepsilon_0 \quad (3.105)$$

es decir, que el esfuerzo axial calculado en esta situación satisface la condición de equilibrio en el elemento $\mathbf{F}^{el} = \mathbf{K}^{el}\mathbf{u}^{el} - \mathbf{Q}_0^{el}$. Por tanto, aunque el cálculo de los esfuerzos en el sentido estricto del MEF se hace evaluando la ecuación de equilibrio $\mathbf{F}^{el} = \mathbf{K}^{el}\mathbf{u}^{el}$, es necesario restar el vector de fuerzas nodales equivalente $\mathbf{Q}_0^{el}$ cuando existen deformaciones unitarias iniciales.

En general, la solución del MEF se puede aproximar a la solución exacta incrementando el número de elementos usado en la discretización de la estructura, ya que los esfuerzos obtenidos convergen a la distribución exacta sin necesidad de incluir el vector de fuerzas nodales equivalente $\mathbf{Q}^{el}$.

3.7.1 Puntos óptimos para el cálculo de tensiones y deformaciones

Esfuerzos, tensiones, deformaciones y otras variables del problema estructural se obtienen a partir de los desplazamientos. Al ser necesario derivar los desplazamientos para obtenerlas, el grado de aproximación de estas variables es siempre menor que el de las desplazamientos. Si la distribución exacta de las tensiones (o cualquier otra variable) es un polinomio de grado n , y la aproximada, obtenida mediante el MEF, es de grado $n - 1$, la evaluación de la variable en estudio en los puntos de integración de Gauss-Legendre de orden n es exacta. Además, si los polinomios que permiten obtener las soluciones exacta y numérica difieren en más de un grado, la evaluación de la variable en los puntos de integración de Gauss-Legendre aproxima mejor la solución exacta que cualquier otra. A continuación se

resuelve un ejemplo que permite concluir cuales son los puntos del elemento en los cuales la evaluación de estas variables es más exacta.

Ejemplo 3.7.1 Obtenga mediante el MEF el diagrama de momentos flectores al que se encuentra sometida una viga en voladizo de longitud L ($x_1 = 0$ y $x_2 = L$) y rigidez EI bajo carga uniforme q . Discretice la viga con un elemento finito (Figura 3.18).

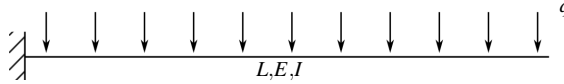


Figura 3.18 Voladizo sometido a una carga uniforme.

Solución. La ecuación de equilibrio elemental $\mathbf{Ka} = \mathbf{Q} + \mathbf{F}$ particularizada para la viga en voladizo que se encuentra empotrada en el nodo 1 y libre en el nodo 2 resulta:

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \left. \frac{dw}{dx} \right|_1 \\ w_2 \\ \left. \frac{dw}{dx} \right|_2 \end{Bmatrix} = -qL \begin{Bmatrix} 1/2 \\ L/12 \\ 1/2 \\ -L/12 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

donde F_1 y M_1 se corresponden con las reacciones en el extremo empotrado, y F_2 y M_2 son nulos ya que no existen fuerzas puntuales actuando en el extremo libre de la viga. Las condiciones de contorno que define el empotramiento son:

$$\begin{aligned} w_1 &= 0 \\ \left. \frac{dw}{dx} \right|_1 &= 0 \end{aligned}$$

El cálculo de los desplazamientos se realiza imponiendo estas condiciones, obteniéndose el sistema de ecuaciones:

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_2 \\ \left. \frac{dw}{dx} \right|_2 \end{Bmatrix} = -qL \begin{Bmatrix} 1/2 \\ -L/12 \end{Bmatrix}$$

La resolución de este sistema permite obtener los variables nodales de las incógnitas:

$$\begin{aligned} w_2 &= \frac{-qL^4}{8EI} \\ \left. \frac{dw}{dx} \right|_2 &= \frac{-qL^3}{6EI} \end{aligned}$$

Una vez que los desplazamientos nodales son conocidos, el valor de las reacciones se obtiene a partir de la ecuación de equilibrio:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} -12 & 6L \\ -6L & 2L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_2 \\ \left. \frac{dw}{dx} \right|_2 \end{Bmatrix} + qL \begin{Bmatrix} 1/2 \\ L/12 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} qL \\ \frac{qL^2}{2} \end{Bmatrix}$$

El momento flector a lo largo de la barra se obtiene a partir de la curvatura de ésta, haciendo uso de la ecuación de comportamiento. Aplicando la Ecuación (3.83) se obtiene:

$$M(\xi) = EI\chi = EIB_f \mathbf{a} = EI \begin{bmatrix} \frac{6\xi}{L^2} & \frac{3\xi-1}{L} & \frac{-6\xi}{L^2} & \frac{3\xi+1}{L} \end{bmatrix} \mathbf{a} = \frac{-6EI\xi}{L^2} \frac{-qL^4}{8EI} + \frac{EI(3\xi+1)}{L} \frac{-qL^3}{6EI} = \frac{qL^2}{12} (3\xi-2)$$

Si se realiza la transformación de coordenadas desde naturales a cartesianas:

$$\xi = 2 \frac{x-L/2}{L}$$

La distribución de momentos flectores a lo largo de la barra se obtiene de la siguiente ecuación:

$$M(x) = \frac{qL}{2} \left(x - \frac{5L}{6} \right)$$

Dado que las funciones de forma empleadas en la formulación del elemento para aproximar los desplazamientos son de grado 3 y se derivan dos veces para obtener la curvatura, la distribución del momento flector a lo largo del elemento es lineal.

La distribución exacta de momentos flectores puede obtenerse mediante equilibrio y viene dada por la siguiente expresión de grado 2:

$$M^*(x) = -\frac{q}{2}(L-x)^2$$

La Figura 3.19 representa la distribución de momentos flectores exacta y numérica. Se observa que ambas distribuciones coinciden en dos puntos correspondientes con los puntos de integración de Gauss-Legendre.

3.8 Formulación del elemento sometido a esfuerzos de flexión: Formulación de Timoshenko

De modo alternativo a la formulación de E-B, se presenta a continuación la teoría de vigas de Timoshenko (T). Se considera una viga de longitud L , sección transversal A e inercia I , sobre la que actúa una serie de cargas verticales y momentos contenidos en el plano xz (Figura 3.10). La teoría de Timoshenko comparte con la teoría de E-B las dos primeras hipótesis. Sin embargo, la tercera hipótesis se establece como (Figura 3.20): las secciones

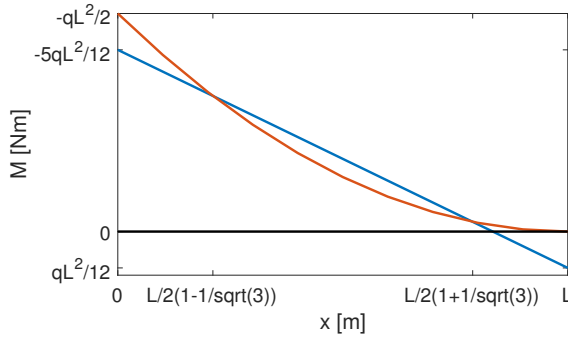


Figura 3.19 Viga en voladizo bajo carga uniforme. Diagrama de momentos exacta y obtenida mediante el MEF.

transversales normales al eje de la viga antes de la deformación, permanecen planas pero no necesariamente normales a dicho eje después de la deformación.

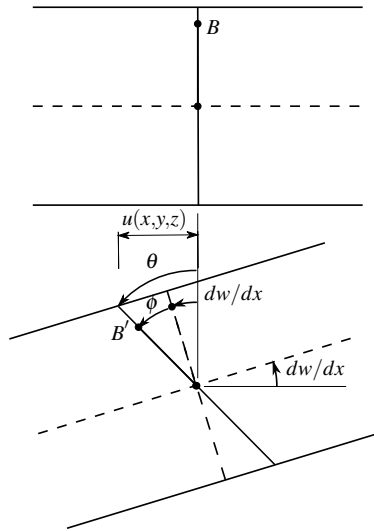


Figura 3.20 Secciones de la viga antes y después de la deformación.

De la Figura 3.20 se obtiene que el giro de la sección se expresa como:

$$\theta(x) = \frac{dw(x)}{dx} + \phi(x) \quad (3.106)$$

donde $dw(x)/dx$ es la pendiente de la deformada del eje de la viga y ϕ un giro adicional.

El campo de desplazamientos de la viga se expresa como sigue:

$$u(x,y,z) = -z\theta(x) \quad (3.107)$$

$$v(x,y,z) = 0 \quad (3.108)$$

$$w(x,y,z) = w(x) \quad (3.109)$$

Por otra parte, las deformaciones no nulas en la formulación de Timoshenko son las siguientes:

$$\varepsilon_x(x,z) = \frac{du(x,z)}{dx} = -z \frac{d\theta(x)}{dx} \quad (3.110)$$

$$\gamma_{xz}(x) = \frac{dw(x)}{dx} + \frac{du(x,z)}{dz} = \frac{dw(x)}{dx} - \theta(x) = -\phi(x) \quad (3.111)$$

De la Ecuación (3.111) se obtiene que el giro adicional ϕ es igual en magnitud a la deformación transversal γ_{xz} , por lo que a la teoría de Timoshenko equivale a considerar el efecto de la deformación por cortante transversal.

Las dos tensiones no nulas se relacionan con las correspondientes deformaciones mediante las ecuaciones de comportamiento:

$$\sigma_x(x,z) = E\varepsilon_x(x,z) = E \frac{du(x,z)}{dx} = -zE \frac{d\theta(x)}{dx} \quad (3.112)$$

$$\tau_{xz}(x) = G\gamma_{xz}(x) = G \left(\frac{dw(x)}{dx} - \theta(x) \right) \quad (3.113)$$

donde G el módulo de cizalladura del material.

El momento flector y el esfuerzo cortante se definen como:

$$M = \int z\sigma_x dA = \int z^2 E \frac{d\theta}{dx} dydz = EI \frac{d\theta}{dx} = EI\chi \quad (3.114)$$

$$Q = \int \tau_{xz} dA = \int G\gamma_{xz} dydz = GA\gamma_{xz} = GA \left(\frac{dw}{dx} - \theta \right) \quad (3.115)$$

La ecuación del PTV resulta:

$$\int (\delta\varepsilon_x \sigma_x + \delta\gamma_{xz} \tau_{xz}) dV = \int_0^L \delta w \mathbf{q} dx + \sum_{i=1}^p \delta w_i F_i + \sum_{i=1}^q \delta \theta_i M_i \quad (3.116)$$

En la formulación de Timoshenko la distribución de tensiones tangenciales τ_{xz} sólo depende de x , por lo que resulta constante en el canto de la viga, lo cual no está de acuerdo con la distribución exacta obtenida en la teoría de vigas (Figura 3.21). Para resolver este problema, dado que en la Ecuación (3.116) sólo está involucrado el trabajo de deformación de la tensión tangencial, se modifica la ley de comportamiento introduciendo el coeficiente de forma de la sección α de modo que el trabajo de deformación de la tensión tangencial constante coincida con el exacto según la teoría de vigas:

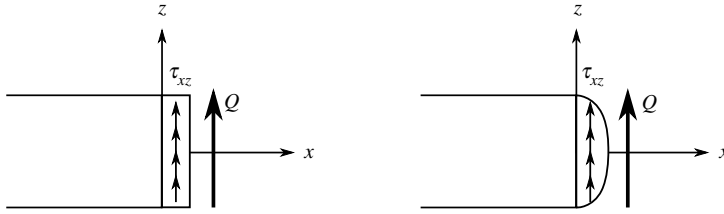


Figura 3.21 Distribuciones de tensiones tangenciales supuesta en la teoría de Timoshenko (izquierda) y exacta (derecha).

$$\tau_{xz} = G\alpha\gamma_{xz} = G\alpha\left(\frac{dw}{dx} - \theta\right) \quad (3.117)$$

$$Q = GA\alpha\gamma_{xz} = GA^*\gamma_{xz} \quad (3.118)$$

Se llama *área reducida* al valor de $A^* = \alpha A$. El coeficiente de forma de la sección α depende de la geometría de la sección transversal. Por ejemplo, para una sección llena rectangular el valor de dicho coeficiente es 6/5, el cual es comúnmente usado en la formulación del elemento viga de Timoshenko.

El primer miembro de la Ecuación (3.116) se puede escribir como:

$$\begin{aligned} & \int (\delta\epsilon_x \sigma_x + \delta\gamma_{xz} \tau_{xz}) dV = \\ & \int \left(\delta \left(-z \frac{d\theta}{dx} \right) \left(-zE \frac{d\theta}{dx} \right) + \delta \left(\frac{dw}{dx} - \theta \right) G\alpha \left(\frac{dw}{dx} - \theta \right) \right) dA dx = \\ & \int (\delta\chi M + \delta\gamma_{xz} Q) dx \end{aligned} \quad (3.119)$$

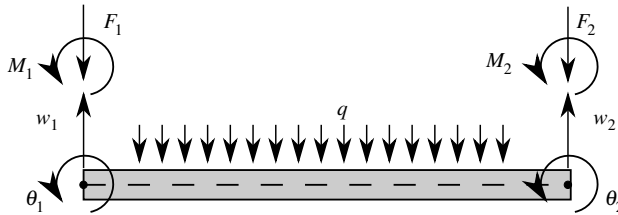


Figura 3.22 Elemento finito viga de Timoshenko de dos nodos.

Se procede a desarrollar la formulación del MEF considerando un elemento de dos nodos de longitud $L = x_2 - x_1$ (Figura 3.22). En la Ecuación (3.116) aparecen como variables tanto la flecha w como el giro de la sección θ . Por lo tanto, ambas deben ser aproximadas

mediante la formulación del MEF (Ecuaciones (3.120-3.121)):

$$w(\xi) = N_1(\xi)w_1 + N_2(\xi)w_2 \quad (3.120)$$

$$\theta(\xi) = N_1(\xi)\theta_1 + N_2(\xi)\theta_2 \quad (3.121)$$

En forma matricial se escribe:

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{N}\mathbf{a} \quad (3.122)$$

Dado que en la Ecuación del PTV sólo aparecen derivadas primera de la flecha w y del giro

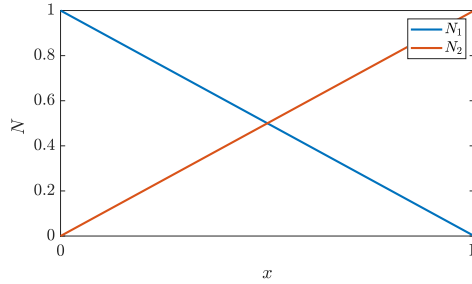


Figura 3.23 Funciones de forma lineales N_1 y N_2 del elemento finito de Timoshenko de dos nodos en coordenadas naturales.

θ , para que las integrales tengan primitiva se requiere aproximaciones con funciones $\mathbb{C}^0$. Como en la Sección 3.2, para aproximar ambas variables se usan polinomios de Lagrange de orden 1. Estos polinomios se expresan en coordenadas naturales como:

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (3.123)$$

$$N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (3.124)$$

siendo

$$\xi = 2 \frac{x - x_m}{x_2 - x_1} = 2 \frac{x - x_m}{L} \quad (3.125)$$

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad (3.126)$$

Como en el caso de la teoría de E-B, la Ecuación (3.125) permite transformar con facilidad las coordenadas espaciales x en coordenadas naturales ξ . Esta transformación, de manera general, no es tan sencilla. Sin embargo, siempre se puede obtener aproximando la geometría de la estructura x por una serie de m puntos $\hat{x}_i$ y unas funciones que se denominan

funciones de interpolación de la geometría ($\hat{N}_i(\xi)$):

$$x = \hat{N}_1(\xi)\hat{x}_1 + \hat{N}_2(\xi)\hat{x}_2 + \dots + \hat{N}_m(\xi)\hat{x}_m = \sum_{i=1}^m \hat{N}_i(\xi)\hat{x}_i \quad (3.127)$$

La Ecuación (3.127) permite aproximar cualquier geometría y proporciona la relación entre coordenadas espaciales y naturales. La aproximación de la geometría real de la estructura debe ser correcta para minimizar el error. Los puntos con los que se aproxima la geometría del elemento $\hat{x}$ no tienen que ser necesariamente coincidentes con los nodos. Del mismo modo, las funciones de interpolación de la geometría $\hat{N}_i$ pueden no coincidir con las funciones de forma N_i que se usan para aproximar las variables nodales (w y θ en la formulación de Timoshenko). Las geometrías más complejas pueden requerir polinomios de alto grado para aproximarlas correctamente.

Si el número de puntos que se usa para aproximar la geometría es mayor que el número de nodos del elemento, se dice que se emplea una *formulación superparamétrica*. Si el número de puntos que se usa para aproximar la geometría coincide con el número de nodos, la formulación se denomina *formulación isoparamétrica*. Finalmente, si el número de puntos que se usa para aproximar la geometría es menor que el número de nodos (geometrías sencillas pero distribuciones de tensiones con importantes gradientes), la formulación se denomina *formulación subparamétrica*. En este documento solamente se trata la formulación isoparamétrica.

El vector de deformaciones de la formulación de Timoshenko se puede escribir en forma matricial como:

$$\begin{Bmatrix} \chi \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{d\theta}{dx} \\ \frac{dw}{dx} - \theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{dN_1}{dx} & 0 & \frac{dN_2}{dx} \\ \frac{dN_1}{dx} & -N_1 & \frac{dN_2}{dx} & -N_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_f \\ \mathbf{B}_c \end{bmatrix} \mathbf{a} \quad (3.128)$$

donde $\mathbf{B}_f$ es la matriz de deformación por flexión y $\mathbf{B}_c$ es la matriz de deformación por cortante. Introduciendo la Ecuación (3.128) en la Ecuación (3.116) particularizada para un elemento de dos nodos se obtiene:

$$\int_0^L (\delta \mathbf{a}^T \mathbf{B}_f^T E I \mathbf{B}_f \mathbf{a} + \delta \mathbf{a}^T \mathbf{B}_c^T G A^* \mathbf{B}_c \mathbf{a}) dx = \int_0^L \delta \mathbf{a}^T \mathbf{N}^T \mathbf{q} dx + \delta \mathbf{a}^T \mathbf{F} \quad (3.129)$$

Dado que la Ecuación (3.129) se debe cumplir para cualquier desplazamiento virtual:

$$\left[\int_{-1}^1 (\mathbf{B}_f^T E I \mathbf{B}_f) \frac{dx}{d\xi} d\xi + \int_{-1}^1 (\mathbf{B}_c^T G A^* \mathbf{B}_c) \frac{dx}{d\xi} d\xi \right] \mathbf{a} = \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \mathbf{q} \frac{dx}{d\xi} d\xi + \mathbf{F} \quad (3.130)$$

Si se definen la matrices de rigidez por flexión y por cortante del elemento, $\mathbf{K}_f$ y $\mathbf{K}_c$:

$$\mathbf{K}_f = \int_{-1}^1 (\mathbf{B}_f^T E I \mathbf{B}_f) \frac{dx}{d\xi} d\xi \quad (3.131)$$

$$\mathbf{K}_c = \int_{-1}^1 (\mathbf{B}_c^T G A^* \mathbf{B}_c) \frac{dx}{d\xi} d\xi \quad (3.132)$$

y el vector de influencia de las cargas aplicadas en el interior del elemento:

$$\mathbf{Q} = \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \mathbf{q} \frac{dx}{d\xi} d\xi \quad (3.133)$$

se obtiene la siguiente ecuación matricial:

$$[\mathbf{K}_f + \mathbf{K}_c] \mathbf{a} = \mathbf{Q} + \mathbf{F} \quad (3.134)$$

Las matrices de rigidez elementales se obtienen realizando las correspondientes integraciones a lo largo del diferencial $d\xi$, teniendo en cuenta la transformación:

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{L}{2} \quad (3.135)$$

Una vez se conocen las funciones de forma, la curvatura en un punto del elemento χ se obtiene a partir de la matriz de deformación por flexión $\mathbf{B}_f$ y las variables nodales $\mathbf{a}$:

$$\chi = \mathbf{B}_f \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{dN_1}{dx} & 0 & \frac{dN_2}{dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} & 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \mathbf{a} \quad (3.136)$$

De manera análoga se obtiene la deformación tangencial γ_{xz} en función de la matriz de deformación por cortante $\mathbf{B}_c$ y las variables nodales $\mathbf{a}$:

$$\begin{aligned} \gamma_{xz} = \mathbf{B}_c \mathbf{a} &= \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} & -N_1 & \frac{dN_2}{dx} & -N_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & -\frac{(1-\xi)}{2} & \frac{1}{L} & -\frac{(1+\xi)}{2} \end{bmatrix} \mathbf{a} \end{aligned} \quad (3.137)$$

Realizando las correspondientes integrales mediante el método de integración numérica de Gauss-Legendre se obtiene la matriz de rigidez de flexión del elemento $\mathbf{K}_f$. Dado que los términos de los integrandos son constantes, tan solo se necesita un punto de integración

para evaluar la integral exactamente:

$$\mathbf{K}_f = \int_{-1}^1 (\mathbf{B}_f^T EI \mathbf{B}_f) \frac{dx}{d\xi} d\xi = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.138)$$

Los términos de los integrandos que aparecen al obtener la matriz de rigidez por cortante $\mathbf{K}_c$ son hasta de segundo grado por lo que se requiere una integración con dos puntos para obtener la evaluación exacta:

$$\mathbf{K}_c = \int_{-1}^1 (\mathbf{B}_c^T GA^* \mathbf{B}_c) \frac{dx}{d\xi} d\xi = \frac{GA^*}{L} \begin{bmatrix} 1 & L/2 & -1 & L/2 \\ L/2 & L^2/3 & -L/2 & L^2/6 \\ -1 & -L/2 & 1 & -L/2 \\ L/2 & L^2/6 & -L/2 & L^2/3 \end{bmatrix} \quad (3.139)$$

La matriz de rigidez del elemento es igual a $\mathbf{K} = \mathbf{K}_f + \mathbf{K}_c$.

Si se considera que el elemento está sometido a una carga q y a un momento m , ambos con una distribución uniforme, el vector de influencia de las cargas aplicadas en el interior del elemento resulta:

$$\mathbf{Q} = \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \mathbf{q} \frac{dx}{d\xi} d\xi = \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \begin{Bmatrix} q \\ m \end{Bmatrix} \frac{dx}{d\xi} d\xi = \frac{L}{2} \begin{Bmatrix} q \\ m \\ q \\ m \end{Bmatrix} \quad (3.140)$$

3.8.1 Bloqueo de la solución

Con el siguiente ejemplo se estudia un fenómeno relevante que se da en la formulación del elemento viga según la teoría de Timoshenko cuando la integración de la matriz de rigidez por cortante se realiza de manera exacta.

Ejemplo 3.8.1 Obtenga mediante el MEF la flecha en el extremo libre de una viga en voladizo de longitud L ($x_1 = 0$ y $x_2 = L$) sometida a una fuerza puntual de valor P aplicada en x_2 . El material de la viga tiene propiedades E , G y $\nu = 0.25$. La sección llena de la viga es rectangular de ancho b , canto h , área A e inercia I . Discretice la viga con un elemento finito según la formulación de Timoshenko (Figura 3.24).

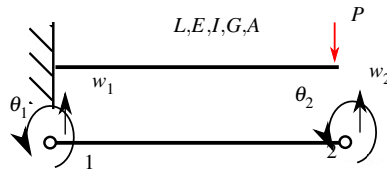


Figura 3.24 Voladizo sometido a una carga puntual en el extremo libre.

Solución. Discretizando con 1 elemento finito de Timoshenko, la ecuación de equilibrio elemental resulta:

$$[\mathbf{K}_f + \mathbf{K}_c] \mathbf{a} = \mathbf{F} \quad (3.141)$$

que se desarrolla como:

$$\begin{bmatrix} GA^*/L & GA^*/2 & -GA^*/L & GA^*/2 \\ GA^*/2 & GLA^*/3 + EI/L & -GA^*/2 & GLA^*/6 - EI/L \\ -GA^*/L & -GA^*/2 & GA^*/L & -GA^*/2 \\ GA^*/2 & GLA^*/6 - EI/L & -GA^*/2 & GLA^*/3 + EI/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

donde F_1 y M_1 son las reacciones en el empotramiento. Imponiendo las condiciones de contorno en desplazamiento:

$$w_1 = 0$$

$$\theta_1 = 0$$

se obtiene la flecha en el extremos libre de la viga en función del parámetro γ :

$$w_2 = \frac{\gamma}{\gamma + 1} \left(\frac{L}{GA^*} + \frac{L^3}{3EI} \right) P \quad (3.142)$$

siendo $\gamma = 12EI/GA^*L^2$. Este parámetro se puede simplificar introduciendo las propiedades geométricas y mecánicas de la viga:

$$\nu = 0.25 \quad (3.143)$$

$$I = \frac{bh^3}{12} \quad (3.144)$$

$$A^* = \alpha bh = \frac{5bh}{6} \quad (3.145)$$

$$\gamma = 3 \left(\frac{h}{L} \right)^2 = \frac{3}{\lambda^2} \quad (3.146)$$

En la Ecuación (3.146) el parámetro γ resulta función únicamente de la esbeltez λ de la viga .

Si, de manera análoga, se resuelve el problema discretizando la viga con un elemento de E-B, la flecha en el extremo libre resulta:

$$w_2^{E-B} = \frac{PL^3}{3EI} \quad (3.147)$$

Se define ψ como la relación entre w_2 (Ecuación (3.142)) y w_2^{E-B} (Ecuación (3.147)):

$$\psi = \frac{w_2}{w_2^{E-B}} = \frac{\frac{\gamma}{\gamma+1} \left(\frac{L}{GA^*} + \frac{L^3}{3EI} \right) P}{\frac{PL^3}{3EI}} = \frac{3(4\lambda^2 + 3)}{4\lambda^2(\lambda^2 + 3)}$$

La Figura 3.25 muestra la variación ψ de la relación entre la flecha en la punta del voladizo obtenida con la formulación de Timoshenko y la que resulta según la teoría de Euler-Bernoulli en función de la esbeltez de la pieza λ (línea azul). Es conocido que en una viga esbelta (valores de λ elevados) el efecto del esfuerzo cortante es despreciable y, por lo tanto, la solución numérica obtenida con la formulación de Timoshenko debería coincidir con la obtenida mediante la formulación de Euler-Bernoulli ($\psi = 1$). Sin embargo, resulta que el factor ψ tiende a cero a medida que la esbeltez λ es mayor. Esto implica que el elemento viga de dos nodos de Timoshenko es incapaz de reproducir la teoría clásica de vigas. El elemento sólo funciona para elementos poco esbeltos y no de modo preciso. A medida que la esbeltez aumenta se produce un fenómeno de sobrerigidez numérica, que llega a *bloquear* la solución, haciendo, incorrectamente, la flecha nula cuando la esbeltez es elevada.

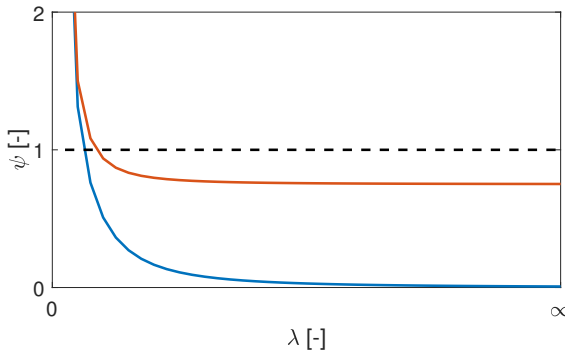


Figura 3.25 Representación del parámetro ψ en función de la esbeltez λ considerando (línea azul) integración exacta e (línea naranja) integración reducida.

El fenómeno de bloqueo de la solución se puede explicar a partir de la Ecuación (3.141). Esa ecuación se puede escribir como:

$$\left[\frac{EI}{L} \bar{\mathbf{K}}_f + \frac{GA^*}{L} \bar{\mathbf{K}}_c \right] \mathbf{a} = \mathbf{F}$$

Multiplicando ambos miembros por $L^3/(3EI)$ se obtiene que:

$$\left[\frac{L^2}{3} \bar{\mathbf{K}}_f + \frac{L^2 GA^*}{3EI} \bar{\mathbf{K}}_c \right] \mathbf{a} = \frac{L^3}{3EI} \mathbf{F}$$

Introduciendo las propiedades del material y las geométricas de la sección:

$$\left[\frac{L^2}{3} \bar{\mathbf{K}}_f + \left(\frac{L}{h} \right)^2 \frac{4G\alpha}{E} \bar{\mathbf{K}}_c \right] \mathbf{a} = \bar{\mathbf{F}}$$

A medida que la esbeltez $\lambda = L/h$ aumenta, el termino asociado a rigidez debida a la deformación por cortante se hace predominante. Si se define el parámetro $\beta = \lambda^2 4G\alpha/E$, resulta:

$$\beta \bar{\mathbf{K}}_c \mathbf{a} = \bar{\mathbf{F}} \quad (3.148)$$

Si λ tiende a un valor infinito, el parámetro β también lo hace, llegándose a la siguiente situación:

$$\bar{\mathbf{K}}_c \mathbf{a} = \frac{1}{\beta} \bar{\mathbf{F}} \rightarrow 0 \quad (3.149)$$

de modo que el sistema de ecuaciones $\bar{\mathbf{K}}_c \mathbf{a} = \mathbf{0}$ provoca que se bloquee la solución, obteniéndose un valor nulo de los desplazamientos nodales.

El sistema de ecuaciones $\mathbf{K}_c \mathbf{a} = \mathbf{0}$ sólo tiene solución distinta de la trivial, si la matriz $\mathbf{K}_c$ es singular, es decir, si el determinante de $\mathbf{K}_c$ es nulo. En el Ejemplo 3.8.1 el determinante de la matriz $\mathbf{K}_c$ que resulta una vez impuestas las condiciones de contorno en desplazamiento es:

$$\det \begin{bmatrix} \frac{GA^*}{2} & -\frac{GA^*}{3} \\ \frac{L}{GA^*} & -\frac{2}{GLA^*} \end{bmatrix} \neq 0$$

produciendo un valor de $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

El bloqueo de la solución también puede explicarse a partir de las aproximaciones de la flecha y del giro. Ambas variables se aproximan con funciones de forma lineales. La deformación tangencial es $\gamma_{xz} = dw/dx - \theta$. Dado que al obtener dw/dx se obtiene una constante, puede no obtenerse un valor de γ_{xz} igual a cero cuando aumenta la esbeltez. Por lo tanto, alguna formulaciones del MEF resuelven este problema aproximando la flecha y el giro con funciones de forma de diferente grado.

3.8.2 Integración reducida

Un procedimiento alternativo que permite resolver el problema del bloqueo de la solución consiste en disminuir la influencia del cortante subintegrando los términos de $\mathbf{K}_c$, utilizando un número de puntos en la integración numérica de Gauss-Legendre menor que el necesario para su integración exacta. A esta técnica se la denomina *integración reducida*. La matriz $\mathbf{K}_c$ dada por la Ecuación (3.139) se ha obtenido con dos puntos de integración. Si se integra

con un solo punto se obtiene la siguiente expresión:

$$\mathbf{K}_c = \int_{-1}^1 (\mathbf{B}_c^T GA^* \mathbf{B}_c) \frac{dx}{d\xi} d\xi = \frac{GA^*}{L} \begin{bmatrix} 1 & L/2 & -1 & L/2 \\ L/2 & L^2/4 & -L/2 & L^2/4 \\ -1 & -L/2 & 1 & -L/2 \\ L/2 & L^2/4 & -L/2 & L^2/4 \end{bmatrix} \quad (3.150)$$

Ejemplo 3.8.2 Se resuelve a continuación el Ejemplo 3.8.1 usando la matriz de rigidez por cortante obtenida mediante integración reducida.

Solución. Discretizando con un elemento finito de Timoshenko con integración reducida, la ecuación de equilibrio de la estructura resulta:

$$\begin{bmatrix} GA^*/L & GA^*/2 & -GA^*/L & GA^*/2 \\ GA^*/2 & GLA^*/4 + EI/L & -GA^*/2 & GLA^*/4 - EI/L \\ -GA^*/L & -GA^*/2 & GA^*/L & -GA^*/2 \\ GA^*/2 & GLA^*/4 - EI/L & -GA^*/2 & GLA^*/4 + EI/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

y aplicando las condiciones de contorno en desplazamiento se obtiene la flecha en el extremo libre del voladizo:

$$w_2 = \left(\frac{L}{GA^*} + \frac{L^3}{4EI} \right) P \quad (3.151)$$

siendo $\gamma = \frac{12EI}{GA^*L^2}$.

A partir del resultado presentado en la Ecuación (3.151), el parámetro ψ (relación entre w_2 y w_2^{E-B} (Ecuación (3.147)) resulta:

$$\psi = \frac{w_2}{w_2^{E-B}} = \frac{\left(\frac{L}{GA^*} + \frac{L^3}{4EI} \right) P}{\frac{PL^3}{3EI}} = \frac{3\lambda^2 + 3}{4\lambda^2}$$

En la Figura 3.25 se muestra la variación del parámetro ψ en función de la esbeltez de la pieza λ para un elemento de Timoshenko formulado con integración reducida (línea naranja). En este caso, cuando λ aumenta, el parámetro ψ tiende al valor 0.75. Esto se debe a que el determinante de la matriz $\mathbf{K}_c$ una vez se imponen las condiciones de contorno en desplazamientos es nulo:

$$\det \begin{bmatrix} GA^*/L & -GA^*/2 \\ GA^*/2 & -GLA^*/4 \end{bmatrix} = 0$$

La integración reducida permite formular un elemento finito según la teoría de Timoshenko válido para vigas de pequeño y gran canto. La formulación resulta convergente

y, a medida que el número de elementos con los que se discretiza la estructura aumenta, la solución numérica se aproxima mejor a la exacta. Si el Ejemplo 3.8.2 se resuelve empleando dos elementos para discretizar la viga en voladizo se obtiene $\psi = 0.938$ (solución exacta 1) para un valor de λ suficientemente grande.

El programa comercial de elementos finitos ANSYS implementa la formulación de Timoshenko en el elemento viga tridimensional BEAM188.

3.9 Requisitos para la convergencia del MEF

Se dice que el MEF es convergente cuando a medida que el número de elementos con los que se discretiza el problema, la solución numérica que proporciona el método se aproxima mejor a la solución exacta. Para que el MEF sea convergente deben darse los siguientes requisitos:

3.9.1 Continuidad

El campo de desplazamientos debe ser continuo en el interior del elemento. Esta condición se satisface al usar funciones de forma polinómicas.

3.9.2 Derivabilidad

La aproximación de los desplazamientos debe ser derivable al menos hasta el orden de las derivadas que aparecen en la expresión del PTV.

3.9.3 Integrabilidad

Las integrales que aparecen en la expresión del PTV deben tener primitiva. Hay que tener en cuenta que la derivada de orden m de una función es integrable, si son continuas sus $m - 1$ primeras derivadas.

Se dice que una función es de clase $\mathbb{C}^n$, si la función y sus n primeras derivadas son continuas. Por lo tanto, para que la derivada de orden m de una función sea integrable la función debe ser de clase $\mathbb{C}^{m-1}$.

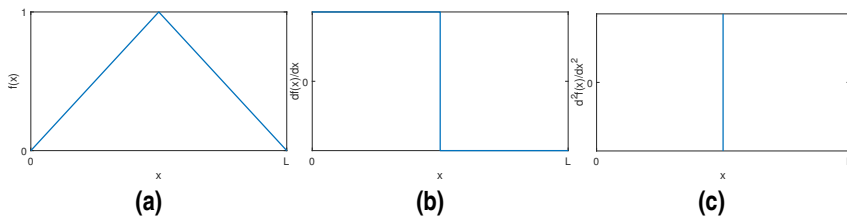


Figura 3.26 (a) Ejemplo de función $\mathbb{C}^0$. (b) Su primera derivada es integrable, pero (c) no la derivada de orden 2.

Las funciones de forma lineales usadas en la formulación del problema axial y del problema de flexión en la formulación de Timoshenko son polinomios de Lagrange de

clase C^0 . Los elementos que se formulan usando polinomios de Lagrange (Ecuación (3.152)) se denominan elementos lagrangianos.

$$N_i(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} = \prod_{j \neq i}^n \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \quad (3.152)$$

Las Figuras 3.27 y 3.28 muestran las funciones de forma de los elementos de Lagrange de 2 y 3 nodos.

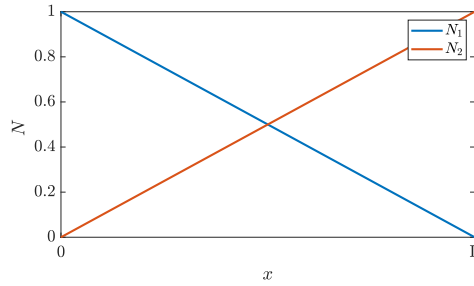


Figura 3.27 Funciones de forma de Lagrange del elemento finito de dos nodos.

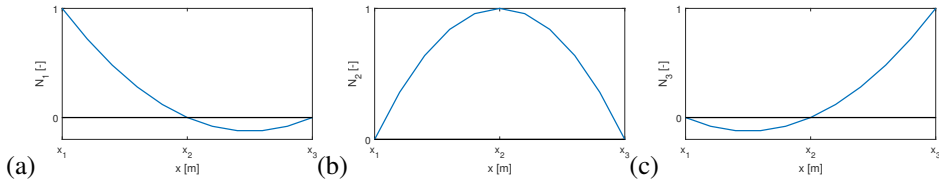


Figura 3.28 Funciones de forma de Lagrange (a) N_1 , (b) N_2 y (c) N_3 del elemento finito de tres nodos.

3.9.4 Criterio de la parcela

El criterio de la parcela consiste en comprobar si una parcela (grupo) de elementos sometidos a un estado tensional reproduce una distribución de deformaciones constantes a medida que el tamaño de los elementos disminuye.

Ejemplo 3.9.1 La estructura de la Figura 3.29 está sometida a un campo de desplazamientos $u(x) = x + L$. Compruebe que el campo de deformaciones que resulta del MEF coincide con el exacto.

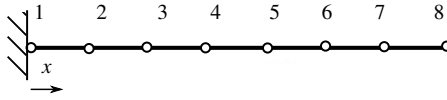


Figura 3.29 Estructura sometida a un campo de desplazamientos impuesto.

Solución. La solución exacta del problema es:

$$u^*(x) = x + L$$

$$\varepsilon^*(x) = \frac{du}{dx} = 1$$

La estructura está discretizada con 8 nodos y 7 elementos. Si se aíslan los elementos 3, 4 y 5, conociendo los desplazamientos impuestos en los nodos 3 y 6:

$$u_3 = 2L + L = 3L$$

$$u_6 = 5L + L = 6L$$

La ecuación del MEF que resulta es la siguiente:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_3 \\ 0 \\ 0 \\ F_6 \end{Bmatrix}$$

donde F_3 y F_6 representan los esfuerzos que aparecen entre los elementos 2 y 3, y 5 y 6, respectivamente. Teniendo en cuenta los desplazamientos conocidos en los nodos 3 y 6 (u_3 y u_6), la solución del sistema de ecuaciones previo es la siguiente:

$$u_4 = 4L$$

$$u_5 = 5L$$

Una vez se conocen los desplazamientos en todos los nodos, las deformaciones en cada elemento se obtienen derivando las funciones de forma de cada elemento:

$$\varepsilon^{el1}(x=0) = \varepsilon_3 = \frac{dN_3}{dx}u_3 + \frac{dN_4}{dx}u_4 = \frac{-1}{L}u_3 + \frac{1}{L}u_4 = 1$$

$$\varepsilon^{el2}(x=0) = \varepsilon_4 = \frac{dN_4}{dx}u_4 + \frac{dN_5}{dx}u_5 = \frac{-1}{L}u_4 + \frac{1}{L}u_5 = 1$$

$$\varepsilon^{el3}(x=0) = \varepsilon_5 = \frac{dN_5}{dx}u_5 + \frac{dN_6}{dx}u_6 = \frac{-1}{L}u_5 + \frac{1}{L}u_6 = 1$$

Se observa que el valor de la deformación obtenido numéricamente coincide con el exacto.

3.9.5 Condición de sólido rígido

Al someter a un conjunto de elementos a un desplazamiento de sólido rígido, deben aparecer deformaciones nulas. Si un elemento de dos nodos se somete a un campo de desplazamientos constante de valor $\bar{u}$ (movimiento de sólido rígido), la ecuación que permite obtener el desplazamiento en cualquier punto del elemento es:

$$u(x) = \bar{u} = N_1(x)u_1 + N_2(x)u_2 = N_1(x)\bar{u} + N_2(x)\bar{u} = (N_1(x) + N_2(x))\bar{u}$$

Teniendo en cuenta que $u(x) = \bar{u}$ para cualquier valor de x , $u(x) = u_1 = u_2 = \bar{u}$, para que se cumpla el criterio de la parcela debe cumplirse que:

$$N_1(x) + N_2(x) = 1 \quad (3.153)$$

La Figura 3.30 muestra que la suma de las funciones de forma en cualquier punto es igual a la unidad, según recoge la Ecuación (3.153).

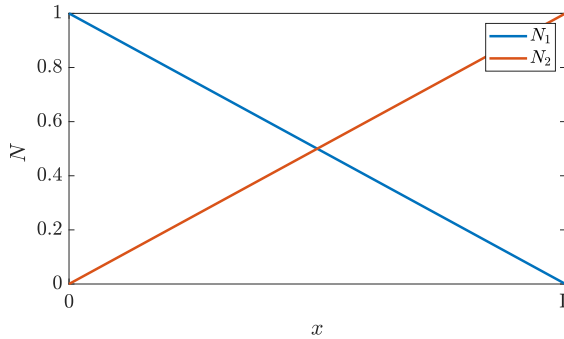


Figura 3.30 Suma de las funciones de forma lineales N_1 y (b) N_2 .

3.9.6 Otros requisitos deseables para la convergencia

- Condición de compatibilidad en los contornos interelementales. Los elementos cuyos campos de desplazamiento son compatibles en los contornos interelementales se denominan *elementos conformes*.
- Condición de polinomio completo: la aproximación del MEF será óptima si los términos de los polinomios que componen las funciones de forma forman un polinomio completo.
- Estabilidad del sistema de ecuaciones
- Invarianza geométrica: la solución debe ser la misma independientemente de su posición en el sistema general de coordenadas.

3.10 Consideraciones sobre compatibilidad y equilibrio de la solución

- La solución es compatible dentro de los elementos
- La solución puede ser o no ser compatible a lo largo de los contornos interelementales. Esta condición de la solución sólo es exigible en el límite de refinamiento de la malla.
- La compatibilidad se satisface siempre en los nodos.
- El equilibrio de fuerzas (y momentos) se satisface siempre en los nodos.
- Normalmente no existe equilibrio de tensiones entre elementos. Las tensiones (variable elemental) en un nodo común a varios elementos pueden tomar valores diferentes. Incluso, en bordes libres, las tensiones obtenidas con el método numérico pueden ser distintas de cero.

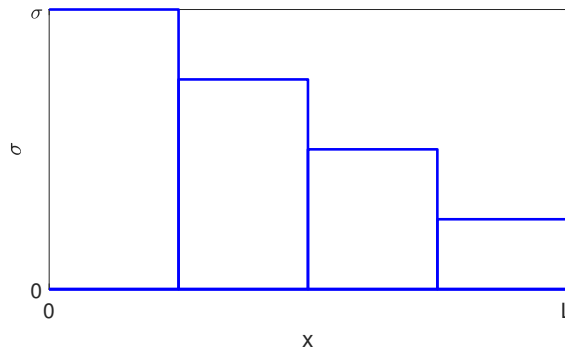


Figura 3.31 Representación de las tensiones en una barra en voladizo discretizada con 4 elementos.

3.11 Tipos de error en la solución obtenida con el MEF

- Error de discretización: es intrínseco al método y se debe al carácter aproximado del método.
- Error en la aproximación de la geometría: los contornos curvos de la geometría real del problema se aproximan mediante polinomios.
- Error en el cálculo de las integrales del elemento: las integrales involucradas en el método se calculan mediante integración numérica.
- Error en la solución del sistema de ecuaciones: el sistema de ecuaciones $\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{Q} + \mathbf{F}$ puede estar mal condicionado. En esos casos, pequeños cambios en la matriz $\mathbf{K}$ o en los vectores $\mathbf{Q}$ o $\mathbf{F}$ pueden dar lugar a grandes variaciones de la solución del problema $\mathbf{a}$. Este error puede deberse al truncamiento (número de dígitos considerado por el sistema) o al redondeo.

- Error asociado a los valores considerados para definir el problema: por ejemplo, al estimar los valores de las propiedades del material (E , ν , etc.).

3.12 Programación del MEF para el cálculo de estructuras de barra

En esta sección se presentan las bases de la programación del MEF para el cálculo de estructuras de barra. Se aborda la implementación práctica de los conceptos estudiados en las secciones anteriores y se introducen aspectos nuevos relacionados con la definición de datos de entrada a un programa de elementos finitos, el montaje de las matrices elementales en el sistema global de ecuaciones, la aplicación de condiciones de contorno, y la resolución del problema con el posterior análisis de los resultados obtenidos. Se hace uso del programa comercial MATLAB para la implementación del código de elementos finitos.

3.12.1 Estructura del programa

Para entender los conceptos fundamentales del MEF es necesario comprender la estructura del programa, que de forma esquemática se puede resumir en los siguientes puntos:

1. Leer los datos de entrada y definir el tamaño de las matrices y vectores del sistema.
2. Calcular la matriz de rigidez elemental y el vector de fuerzas elemental para cada elemento.
3. Ensamblar las matrices y vectores calculados en el sistema global de ecuaciones.
4. Aplicar condiciones de contorno y resolver el sistema de ecuaciones.
5. Calcular las variables secundarias: reacciones, esfuerzos y tensiones.

A continuación se estudiará en detalle cada uno de los puntos descritos.

3.12.2 Datos de entrada

Los datos de entrada necesarios para un programa de análisis de elementos finitos son:

- Número total de nodos en el sistema.
- Número total de elementos en el sistema.
- Coordenadas geométricas de cada nodo.
- Conectividad elemental.
- Propiedades geométricas y materiales.
- Condiciones de contorno: desplazamientos y fuerzas.

Por ejemplo, la viga de la Figura 3.32 tiene longitud total de 8 m, y está compuesta por dos elementos de longitud 4 m de inercias $I_1 = 0.001 \text{ m}^4$ e $I_2 = 0.0015 \text{ m}^4$, respectivamente. La viga tiene los extremos empotrados y está sometida a la acción de una carga uniformemente distribuida de valor $p = 20 \text{ kN/m}$.

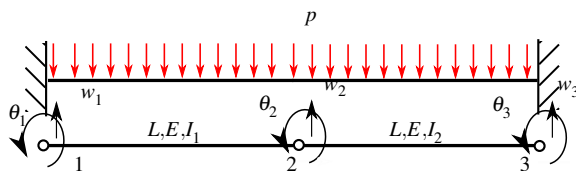


Figura 3.32 Problema 1: viga biempotrada sometida a carga uniforme.

Los datos de entrada del problema están definidos en el Código 3.11. La viga se ha discretizado en dos elementos ($n_{elem}=2$), siendo tres los nodos utilizados ($n_{nodo}=3$). El elemento tipo viga que trabaja a axil y flexión tiene tres grados de libertad en cada nodo ($ngdl=3$), que multiplicado por el número de nodos da el número total de grados de libertad.

Las coordenadas de los nodos están dadas por los pares xy , y se ordenan en la matriz de coordenadas $coord$. Una vez definidos los nodos de la estructura los elementos se obtienen a partir de la conectividad entre nodos (matriz de conectividad $elemento$). Cada elemento tiene asociado unas propiedades geométricas ($area$ e $inercia$) y un material ($young$).

Por último, es necesario indicar cuales son los grados de libertad con condición de contorno en desplazamientos y el valor del desplazamiento impuesto. El vector d contiene los grados de libertad restringidos, y ud el valor del desplazamiento. En este ejemplo, $d=[1 \ 2 \ 3 \ 7 \ 8 \ 9]$ y $ud=[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$. Así mismo, el vector f contiene el resto de grados de libertad que no tienen desplazamientos impuestos. Las fuerzas en los elementos que actúan en las direcciones axial y transversal se definen mediante los vectores Q_x y Q_z , siendo alguna de sus componentes nulas si no existe una fuerza aplicada.

Código 3.1 Listado de comandos de MATLAB: datos de entrada.

```
% datos de entrada
nelem=2; % número de elementos
nnodo=3; % número de nodos
ngdl=3; % grados de libertad por nodo
tgdl=nnodo*ngdl; % grados de libertad total

%% coordenadas nodales (x,y)
coord=[0 0;
4 0;
8 0];

%% conectividad elemental (i,j)
elemento=[1 2;
2 3];

%% propiedad geometricas y materiales
area=[0.01 0.01]; % area
inercia=[0.001 0.0015]; % inercia
young=[2.1e11 2.1e11]; % modulo elastico

%% condicion de contorno desplazamiento
```

d=[1 2 3 7 8 9];	% grados de libertad restringidos
ud=[0 0 0 0 0 0];	% valor del desplazamiento
%% condicion de contorno fuerza	
f=[4 5 6];	% grados de libertad con fuerzas externas
Qx=[0 0];	% carga distribuida uniforme axial
Qz=[20e3 20e3];	% carga distribuida uniforme normal

3.12.3 Matrices y vectores elementales

Las matrices y vectores elementales se calculan para cada elemento usando algunas de las formulaciones desarrolladas en este capítulo. El Código 3.2 implementa el elemento viga de Euler-Bernoulli de dos nodos, incluyendo la capacidad de trabajar a esfuerzos axiales. La matriz de rigidez elemental y el vector de fuerzas se calculan en el sistema de coordenadas natural del elemento y posteriormente se realiza la transformación de coordenadas mediante la matriz de giro implementada en el Código 3.3. Los argumentos de entrada y salida están definidos en el cuerpo de las funciones.

Código 3.2 Listado de comandos de MATLAB: matriz de rigidez y vector de fuerzas elemental.

```
function [Ke,Qe]=matriz_elemental(E,A,I,L,a,Qx,Qz)
% Matriz de rigidez del elemento viga segun la formulacion de
% Euler-Bernoulli.
%
% E: modulo elastico
% A: area de la seccion
% I: inercia de la seccion
% L: longitud del elemento
% a: angulo con el sistema global de referencia
% Qx: carga distribuida uniforme axial
% Qz: carga distribuida uniforme normal

% matriz rigidez elemental
Ke_a=E*A/L*[1 0 0 -1 0 0;
  0 0 0 0 0 0;
  0 0 0 0 0 0;
  -1 0 0 1 0 0;
  0 0 0 0 0 0;
  0 0 0 0 0 0];

Ke_f=E*I/L^3*[0 0 0 0 0 0;
  0 12 6*L 0 -12 6*L;
  0 6*L 4*L^2 0 -6*L 2*L^2;
  0 0 0 0 0 0;
  0 -12 -6*L 0 12 -6*L;
  0 6*L 2*L^2 0 -6*L 4*L^2];

Ke=Ke_a+Ke_f;

% vector fuerza elemental
Qe=[Qx*L/2;
```

```

Qz*L/2;
Qz*L^2/12;
0.5*Qx*L;
Qz*L/2;
-Qz*L^2/12];

% matriz de giro
Ld=matriz_giro(a);

% transformacion coordenadas
Ke=Ld*Ke*Ld';
Qe=Ld*Qe;

```

Código 3.3 Listado de comandos de MATLAB: matriz de giro.

```

function Ld=matriz_giro(a)
% Matriz de giro para un elemento de dos nodos y 6 grados de libertad
%
% a: angulo con el sistema global de referencia

Ld=[cos(a) -sin(a) 0 0 0 0;
    sin(a) cos(a) 0 0 0 0;
    0 0 1 0 0 0;
    0 0 0 cos(a) -sin(a) 0;
    0 0 0 sin(a) cos(a) 0;
    0 0 0 0 0 1];

```

3.12.4 Ensamblaje del sistema global de ecuaciones

Una vez calculada la matriz de rigidez y el vector de fuerzas del elemento hay que ensamblarlos en el sistema de ecuaciones $\mathbf{F} + \mathbf{Q} = \mathbf{K}\mathbf{u}$. Esta operación se realiza fácilmente utilizando una matriz auxiliar denominada *matriz de localización* $\mathbf{A}^e$. Esta matriz define una relación entre los desplazamientos nodales del elemento $\mathbf{a}$ y los desplazamientos de la estructura $\mathbf{u}$ de la siguiente forma:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \dots \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_n \\ \mathbf{u}_m \\ \dots \end{Bmatrix} \quad (3.154)$$

La matriz de localización define una operación booleana que permite identificar los desplazamientos de los nodos de un elemento como:

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^e \mathbf{u} \quad (3.155)$$

El número de filas de esta matriz se corresponde con el número de grados de libertad del elemento y las columnas están definidas por el número total de grados de libertad en la estructura (Código 3.5).

De esta forma, la ecuación de equilibrio elemental resulta:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}^e \mathbf{a} &= \mathbf{F}^e \\ \mathbf{K}^e \mathbf{A}^e \mathbf{u} &= \mathbf{F}^e \\ (\mathbf{A}^e)^T \mathbf{K}^e \mathbf{A}^e \mathbf{u} &= (\mathbf{A}^e)^T \mathbf{F}^e\end{aligned}\tag{3.156}$$

Sumando para todos los elementos de la estructura se obtiene la matriz de rigidez y el vector de fuerzas:

$$\mathbf{K} = \sum_e (\mathbf{A}^e)^T \mathbf{K}^e \mathbf{A}^e \tag{3.157}$$

$$\mathbf{Q} = \sum_e (\mathbf{A}^e)^T \mathbf{Q}^e \tag{3.158}$$

El vector $\mathbf{F}$ contiene las fuerzas que actúan puntualmente en los nodos de los elementos y las fuerzas distribuidas. La implementación del cálculo y ensamblaje del sistema de ecuaciones de la estructura se muestra en el Código 3.4.

Código 3.4 Listado de comandos de MATLAB: cálculo y ensamblaje del sistema de ecuaciones de la estructura.

```
%% calculo matriz de rigidez y vector fuerzas
K=zeros(tgdl);
F=zeros(tgdl,1);
for e=1:size(elemento,1) % bucle en elementos
    %
    nd_i=elemento(e,1); % nodo i del elemento
    nd_j=elemento(e,2); % nodo j del elemento
    %
    x1=coord(nd_i,1); y1=coord(nd_i,2); % coordenada nodo i
    x2=coord(nd_j,1); y2=coord(nd_j,2); % coordenada nodo j
    %
    L=sqrt((x2-x1)^2+(y2-y1)^2); % longitud elemento
    a=atan((y2-y1)/(x2-x1)); % angulo entre ejes locales y globales
    %
    [Ke,Qe]=matriz_elemental(young(e), area(e), inercia(e), L,a, Qx(e), Qz(e));
    %
    A=matriz_localizacion(tgdl, nd_i, nd_j); % matriz localización
    K=K+A'*Ke*A; % montaje matriz rigidez
    F=F+A'*Qe; % montaje vector fuerzas
end
```

Código 3.5 Listado de comandos de MATLAB: matriz de localización.

```
function A=matriz_localizacion(ng,nd_i,nd_j)
% Matriz de localizacion de un elemento viga de dos nodos
%
```

```

% ng: número de grados de libertad de la estructura
% nd_i: nodo i del elemento
% nd_j: nodo j del elemento

A=zeros(6,ng);
for i=1:3
    A(i,3*(nd_i-1)+i)=1;
    A(3+i,3*(nd_j-1)+i)=1;
end

```

3.12.5 Condiciones de contorno y solución

El sistema de ecuaciones obtenido en la sección anterior se puede reordenar de acuerdo a las condiciones de contorno del problema. Si se define con el subíndice d los grados de libertad que tienen una condición de contorno en desplazamientos, y con el subíndice f aquellos sobre los que está aplicada una fuerza (que también se corresponden con los grados de libertad de la estructura distintos de d), el sistema de ecuaciones es:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F}_d \\ \mathbf{F}_f \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_d \\ \mathbf{Q}_f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{dd} & \mathbf{K}_{df} \\ \mathbf{K}_{fd} & \mathbf{K}_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_d \\ \mathbf{u}_f \end{Bmatrix} \quad (3.159)$$

donde los datos del problema son $\{\mathbf{u}_d, \mathbf{F}_f\}$ y las incógnitas $\{\mathbf{F}_d, \mathbf{u}_f\}$, que se corresponden con las reacciones en los puntos de la estructura donde están restringidos los desplazamientos y con los desplazamientos de los grados de libertad donde actúan las fuerzas.

Los desplazamientos se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\mathbf{K}_{ff}\mathbf{u}_f = \mathbf{F}_f + \mathbf{Q}_f - \mathbf{K}_{fd}\mathbf{u}_d \quad (3.160)$$

Una vez resuelto los desplazamientos las reacciones en los grados de libertad restringidos se calculan como:

$$\mathbf{F}_d = \mathbf{K}_{dd}\mathbf{u}_d + \mathbf{K}_{df}\mathbf{u}_f - \mathbf{Q}_d \quad (3.161)$$

El Código 3.6 implementa el procedimiento de resolución descrito del sistema de ecuaciones.

Código 3.6 Listado de comandos de MATLAB: solución del sistema de ecuaciones.

```

%% solucion
u=zeros( tgd1 ,1) ;
u(d)=ud;
u(f)=K(f,f)\(F(f)-K(f,d)*u(d));

%% reaccion
R=K(d,d)*u(d)+K(d,f)*u(f)-F(d);

```

La solución del problema proporciona un desplazamiento vertical en el nudo central $w_2 = 0.84 \times 10^{-3}$ m, y un giro no nulo $\theta_2 = -0.06$ rad debido a la no simetría de las propiedades de la viga. Se puede comprobar que las reacciones en los extremos de la viga son diferentes por la misma razón.

3.12.6 Cálculo de esfuerzos

La última etapa en un programa de análisis mediante el MEF consiste en el cálculo de esfuerzos en los elementos. El procedimiento requiere evaluar la ecuación de equilibrio elemental. Los Códigos 3.7 y 3.8 muestran la implementación del cálculo de esfuerzos.

Código 3.7 Listado de comandos de MATLAB: esfuerzos en el elemento.

```
function [N,M,Q]=esfuerzo(E,A,I,L,a)

% coordenada natural nodos
xi=[-1 1]';
% desplazamiento flexion
af=a ([2,3,5,6]) ;
% axil
N=E*A/L*(a(4)-a(1));
% momento
Chi=[6*xi/L^2 (3*xi-1)/L -6*xi/L^2 (3*xi+1)/L]*af;
M=E*I*Chi;
% cortante
dChi=[12*xi/L^3 6*xi/L^2 -12*xi/L^3 6*xi/L^2]*af;
Q=E*I*dChi;
```

Código 3.8 Listado de comandos de MATLAB: cálculo de esfuerzos.

```
%% esfuerzos elemento
N=zeros(nelem,1);
M=zeros(nelem,2);
Q=zeros(nelem,2);
N=zeros(nelem,1);
M=zeros(nelem,2);
V=zeros(nelem,2);
for e=1:size(elemento,1) % bucle en elementos
    %
    nd_i=elemento(e,1); % nodo i del elemento
    nd_j=elemento(e,2); % nodo j del elemento
    %
    x1=coord(nd_i,1); y1=coord(nd_i,2); % coordenada nodo i
    x2=coord(nd_j,1); y2=coord(nd_j,2); % coordenada nodo j
    %
    L=sqrt((x2-x1)^2+(y2-y1)^2); % longitud elemento
    a=atan((y2-y1)/(x2-x1)); % angulo entre ejes locales y globales
    %
    A=matriz_localizacion ( tgdL , nd_i , nd_j ); % matriz localizaci ón
    ue=A*u; % desplazamientos nodales
    Ld=matriz_giro(a); % matriz de giro
    ue=Ld'*ue; % transformación coordenadas
    [N(e),M(e,:), V(e,:) ]=...
        esfuerzo (young(e), area (e) , inercia (e) ,L,ue); % esfuerzo elemento
end
```

Las variables N, M, V contienen los esfuerzos en cada elemento. El valor del momento y del cortante se obtienen en los nodos del elemento. El momento tiene una evolución lineal de acuerdo a las funciones de forma, mientras que el cortante es constante. Del mismo modo, el axil obtenido es uniforme en el elemento.

Finalmente, si se unifican los Códigos 3.11, 3.4, 3.6 y 3.8 se llega al cuerpo del programa principal que llama a las funciones antes descritas. El Código 3.9 puede utilizarse para resolver los problemas presentados en este capítulo. La implementación del elemento viga de Timoshenko es sencilla. Sólo requiere definir una función que calcule la matriz de rigidez y el vector de fuerzas elemental de forma similar al elemento de Euler-Bernoulli.

Código 3.9 Listado de comandos de MATLAB: programa de elementos finitos.

```
%% datos de entrada
nelem=2; % número de elementos
nnodo=3; % número de nodos
ngdl=3; % grados de libertad por nodo
tgdl=nnodo*ngdl; % grados de libertad total

%% coordenadas nodales (x,y)
coord=[0 0;
4 0;
8 0];

%% conectividad elemental (i,j)
elemento=[1 2;
2 3];

%% propiedad geometricas y materiales
young=[2.1e11 2.1e11]; % modulo elástico
area=[0.01 0.01]; % área
inercia=[0.001 0.0015]; % inercia

%% condicion de contorno desplazamiento
d=[1 2 3 7 8 9]; % grados de libertad restringidos
ud=[0 0 0 0 0 0]; % valor del desplazamiento

%% condicion de contorno fuerza
f=[4 5 6]; % grados de libertad con fuerzas externas
Qx=[0 0]; % carga distribuida uniforme axial
Qz=[20e3 20e3]; % carga distribuida uniforme normal

%% calculo matriz de rigidez y vector fuerzas
K=zeros(tgdl);
F=zeros(tgdl,1);
for e=1:size(elemento,1) % bucle en elementos
%
nd_i=elemento(e,1); % nodo i del elemento
nd_j=elemento(e,2); % nodo j del elemento
%
x1=coord(nd_i,1); y1=coord(nd_i,2); % coordenada nodo i
x2=coord(nd_j,1); y2=coord(nd_j,2); % coordenada nodo j
%
L=sqrt((x2-x1)^2+(y2-y1)^2); % longitud elemento
```

```

a=atan((y2-y1)/(x2-x1)); % ángulo entre ejes locales y globales
%
[Ke,Qe]=matriz_elemental(young(e), area(e), inercia(e), L,a, Qx(e), Qz(e));
%
A=matriz_localizacion ( tgdL , nd_i , nd_j ); % matriz localización
K=K+A'*Ke*A; % montaje matriz rigidez
F=F+A'*Qe; % montaje vector fuerzas
end

%% solucion
u=zeros( tgdL , 1 );
u(d)=ud;
u(f)=K(f,f) \ ( F(f)-K(f,d)*u(d) );

%% reaccion
R=K(d,d)*u(d)+K(d,f)*u(f)-F(d);

%% esfuerzos elemento
N=zeros(nelem,1);
M=zeros(nelem,2);
Q=zeros(nelem,2);
for e=1:size(elemento,1) % bucle en elementos
%
nd_i=elemento(e,1); % nodo i del elemento
nd_j=elemento(e,2); % nodo j del elemento
%
x1=coord(nd_i,1); y1=coord(nd_i,2); % coordenada nodo i
x2=coord(nd_j,1); y2=coord(nd_j,2); % coordenada nodo j
%
L=sqrt((x2-x1)^2+(y2-y1)^2); % longitud elemento
a=atan((y2-y1)/(x2-x1)); % ángulo entre ejes locales y globales
%
A=matriz_localizacion ( tgdL , nd_i , nd_j ); % matriz localización
ue=A*u; % desplazamientos nodales
Ld=matriz_giro(a); % matriz de giro
ue=Ld'*ue; % transformación coordenadas
[N(e),M(e,:),V(e,:)] = ...
esfuerzo (young(e), area(e), inercia(e), L,ue); % esfuerzo elemento
end

```

La resolución del problema utilizando el programa comercial ANSYS proporciona resultados similares (Figura 3.33, Código 3.10). Para modelizar la viga se han usado dos elementos BEAM3, que se formulan mediante la teoría de vigas de Euler-Bernoulli. Para comparar con los resultados de ANSYS, a los esfuerzos elementales obtenidos es necesario sumarle las cargas que aparecen en los nodos como consecuencia de las fuerzas aplicadas en el interior del elemento. Esto sólo lo hace ANSYS cuando se usa el elemento BEAM3 o BEAM4 (no lo hace con el elemento BEAM188). Esto supone que el diagrama de cortantes, que teniendo en cuenta las funciones de forma debería ser constante, pueda ser lineal (Figura 3.34).

Código 3.10 Listado de comandos de ANSYS para la resolución del Problema 1 usando la formulación de E-B (BEAM3).

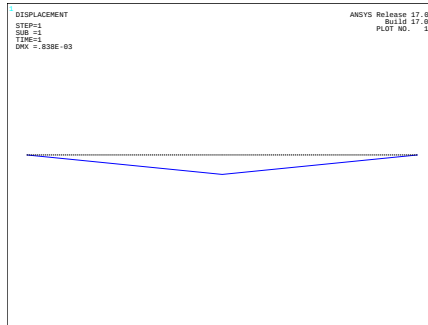
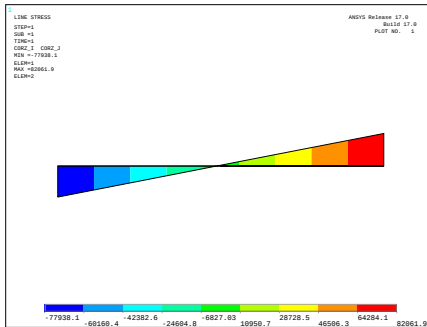


Figura 3.33 Desplazamientos nodales usando la formulación de E-B.

(a)



(b)

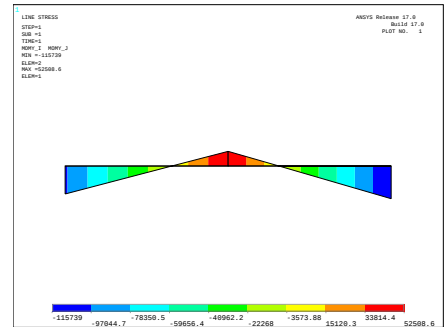


Figura 3.34 (a) Diagrama de esfuerzos cortantes y (b) diagrama de momentos flectores usando la formulación de E-B.

```
NDIV=1

/PREP7
ET,1,BEAM3

R,1,1,0.001
R,2,1,0.0015

MP,EX,1,2.1e11

K,1,0,0,0,
K,2,4,0,0,
K,3,8,0,0,

L,1,2
L,2,3

LSEL,S,LINE,,1,1,1
LATT,1,1,1, , , ,
```

```
ALLSEL,ALL
LSEL,S,LINE,,2,2,1
LATT,1,2,1, , , ,
ALLSEL,ALL
LSEL,ALL
LESIZE,ALL, , ,NDIV
LMESH,ALL

NUMMRG,ALL, , , ,LOW

/SOLU
ANTYPE,STATIC

DK,1,ALL,0
DK,3,ALL,0

SFBEAM,ALL,1,PRES,20000,

SOLVE

/POST1

ETABLE,AXIL_I,SMISC, 1
ETABLE,AXIL_J,SMISC, 7
ETABLE,CORZ_I,SMISC, 2
ETABLE,CORZ_J,SMISC, 8
ETABLE,MOMY_I,SMISC, 6
ETABLE,MOMY_J,SMISC, 12

PRETAB,AXIL_I,AXIL_J,CORZ_I,CORZ_J,MOMY_I,MOMY_J
PRRSOL,
```

3.13 Problemas

3.13.1 Problema 1

Calcule los diagramas de esfuerzos de todas las barras del pórtico rígido (todos los nudos son rígidos) que se muestra en la figura, en el que se conocen los desplazamientos del punto 3. El pórtico soporta una carga de viento igual a 500 kN/m y una sobrecarga vertical con un valor de 100 kN/m.

Resolución mediante MATLAB usando la formulación de E-B.

Código 3.11 Listado de comandos de MATLAB: datos de entrada del problema 1.

```
%% datos de entrada
nelem=3;
nnodo=4;
ngdl=3;
tgdl=nnodo*ngdl;

%% coordenadas nodales (x,y)
coord=[0 0;
```

<i>% número de elementos</i>
<i>% número de nodos</i>
<i>% grados de libertad por nodo</i>
<i>% grados de libertad total</i>

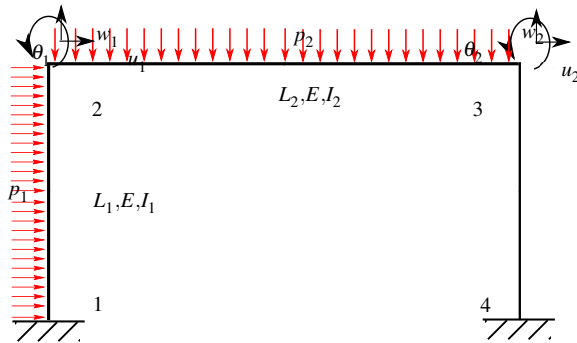


Figura 3.35 Problema 1: pórtico.

```

0 5;
10 5;
10 0];

%%% conectividad elemental (i,j)
elemento=[1 2;
2 3;
3 4];

%%% propiedad geometricas y materiales
young=[2.1e11 2.1e11 2.1e11];           % modulo elástico
area=[0.05 0.05 0.05];                 % área
inercia=[0.1 0.1 0.1];                 % inercia

%%% condicion de contorno desplazamiento
d=[1 2 3 7 8 9 10 11 12];               % grados de libertad restringidos
ud=[0 0 0 0.25050E-03 -0.30829E-03 0.15148E-06 0 0 0]; % valor del desplazamiento

%%% condicion de contorno fuerza
f=[4 5 6];                             % grados de libertad con fuerzas
externas

Qx=[0 0 0];                             % carga distribuida uniforme axial
Qz=[-500e3 -100e3 0];                   % carga distribuida uniforme normal

```

Código 3.12 Listado de comandos de ANSYS para la resolución del Problema 1 usando la formulación de E-B (BEAM3).

```

NDIV=1

/PREP7
ET,1,BEAM3

R,1,0.05,0.1

MP,EX,1,2.1e11
MP,PRXY,1,0.3

K,1,0,0,0,

```

```

K ,2,0,5,0,
K ,3,10,5,0,
K ,4,10,0,0,

L,1,2
L,2,3
L,3,4

LSEL,S,LINE,,1,3,1
LATT,1,1,1, , , ,
LSEL,ALL
LESIZE,ALL, , ,NDIV
LMESH,ALL

NUMMRG,ALL, , ,LOW

/SOLU

ANTYPE,STATIC

DK,1,ALL,0
DK,4,ALL,0

SFBEAM,1,1,PRES,500e+03,
SFBEAM,2,1,PRES,100e+03,

SOLVE

/POST1

ETABLE,AXIL_I,SMISC, 1
ETABLE,AXIL_J,SMISC, 7
ETABLE,CORZ_I,SMISC, 2
ETABLE,CORZ_J,SMISC, 8
ETABLE,MOMY_I,SMISC, 6
ETABLE,MOMY_J,SMISC, 12

PRNSOL,U,COMP
PRNSOL,ROT,COMP
PRETAB,AXIL_I,AXIL_J,CORZ_I,CORZ_J,MOMY_I,MOMY_J

```

3.13.2 Problema 2

Durante un ensayo a flexión de una viga (barra 3-5) se desea comprobar la influencia de la rigidez de las bancadas de apoyo. Dichas bancadas están constituidas por las barras 1-2-3 y 6-7-5, siendo rígida la unión entre ellas en los puntos 3 y 5. Sobre dichos nudos se encuentra simplemente apoyada la viga 3-5, estando solamente acoplado el desplazamiento vertical de la viga con las bancadas (el horizontal se encuentra desacoplado). La viga es de hormigón armado ($E = 20 \text{ GPa}$), y las bancadas son de acero. Para los cálculos deberá establecerse un valor razonable de cálculo para el módulo de elasticidad de las bancadas, teniendo en cuenta el valor del hormigón. El ensayo consiste en la aplicación de una carga vertical en el punto medio de la viga (punto 4), controlándose el valor del desplazamiento aplicado. Cuando dicho valor del desplazamiento es de 1 cm, se pide:

1. Calcular los desplazamientos verticales de los puntos 3 y 5.
2. Calcular los diagramas de esfuerzos de la viga

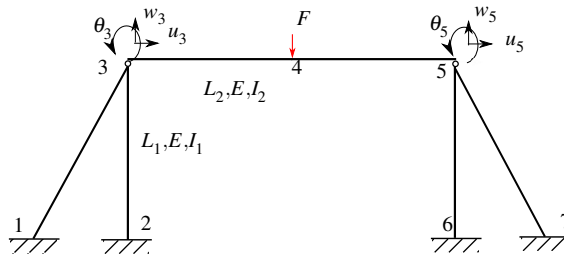


Figura 3.36 Problema 2: bancada de ensayos.

Resolución mediante MATLAB usando la formulación de E-B.

Código 3.13 Listado de comandos de MATLAB: datos de entrada del problema 2.

```
%% datos de entrada
nelem=2; % número de elementos
nnodo=3; % número de nodos
ngdl=3; % grados de libertad por nodo
tgdl=nnodo*ngdl; % grados de libertad total

%% coordenadas nodales (x,y)
coord=[0 0;
        0 1.5;
        3 1.5];

%% conectividad elemental (i,j)
elemento=[1 2;
           2 3];

%% propiedad geometricas y materiales
young=[2.0e11 2.0e10]; % modulo elástico
area=[0.0158 0.01]; % área
inercia=[0 3e-5]; % inercia

%% condicion de contorno desplazamiento
d=[1 2 3 7 8 9]; % grados de libertad restringidos
ud=[0 0 0 0 -0.01 0]; % valor del desplazamiento

%% condicion de contorno fuerza
f=[4 5 6]; % grados de libertad con fuerzas externas
Qx=[0 0]; % carga distribuida uniforme axial
Qz=[0 0]; % carga distribuida uniforme normal
```

Código 3.14 Listado de comandos de ANSYS para la resolución del Problema 2 usando la formulación de E-B (BEAM3).

```
NDIV=1

/PREP7
ET,1,BEAM3
ET,2,LINK1

R,1,100e-4,3000e-8
R,2,1,

MP,EX,1,20e9
MP,EX,2,2.1026e9

K,1,0,0,0,
K,2,0,1,0,
K,3,3,1,0,

L,1,2
L,2,3

LSEL,S,LINE,,2,2,1
LATT,1,1,1, , , ,
ALLSEL,ALL
LSEL,S,LINE,,1,1,1
LATT,2,2,2, , , ,
ALLSEL,ALL
LSEL,ALL
LESIZE,ALL, , ,NDIV
LMESH,ALL

NUMMRG,ALL, , , ,LOW

/SOLU
ANTYPE,STATIC

DK,1,ALL,0
DK,3,UX,0
DK,3,ROTZ,0

FK,3,FY,-666.6667

SOLVE

/POST1

ETABLE,AXIL_I,SMISC,1
ETABLE,AXIL_J,SMISC,7
ETABLE,CORZ_I,SMISC,2
ETABLE,CORZ_J,SMISC,8
ETABLE,MOMY_I,SMISC,6
ETABLE,MOMY_J,SMISC,12

PRETAB,AXIL_I,AXIL_J,CORZ_I,CORZ_J,MOMY_I,MOMY_J
```

3.13.3 Problema 3

Calcule los diagramas de esfuerzos de todas las barras del pórtico rígido (todos los nudos son rígidos) que se muestra en la figura. El pórtico soporta una sobrecarga vertical con un valor de 5 kN/m y a un decremento térmico $\Delta T = -20^\circ \text{C}$.

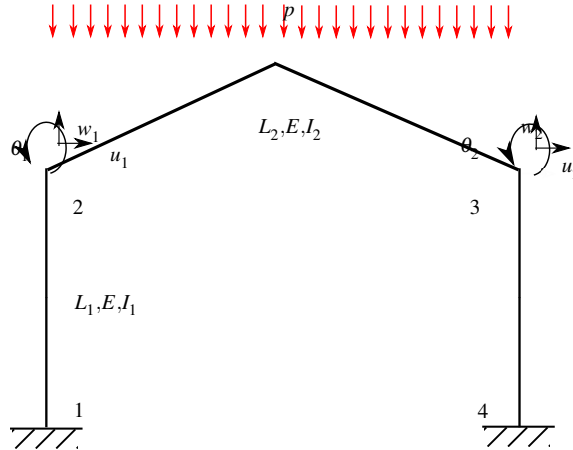


Figura 3.37 Problema 3: pórtico a dos aguas.

Código 3.15 Listado de comandos de MATLAB: datos de entrada del problema 3.

```
%% datos de entrada
nelem=2;      % número de elementos
nnodo=3;      % número de nodos
ngdl=3;       % grados de libertad por nodo
tgd1=nnodo*ngdl; % grados de libertad total

%% coordenadas nodales (x,y)
coord=[0 0;
        0 5;
        7.5 7.5];

%% conectividad elemental (i,j)
elemento=[1 2;
           2 3];

%% propiedad geometricas y materiales
young=[2.1e11 2.1e11]; % modulo elástico
alpha=[1e-5 1e-5];    % coeficiente de dilatación térmica
area=[78.1e-4 53.8e-4]; % área
inercia=[5700e-8 8360e-8]; % inercia

%% condicion de contorno desplazamiento
d=[1 2 3 7 9]; % grados de libertad restringidos
ud=[0 0 0 0 0]; % valor del desplazamiento
```

```

%% condicion de contorno fuerza
f=[4 5 6 8];      % grados de libertad con fuerzas externas
Qx=[0 -5e3*sin(0.3218)]; % carga distribuida uniforme axial
Qz=[0 -5e3*cos(0.3218)]; % carga distribuida uniforme normal
T=[-20 -20];      % incremento térmico

```

Código 3.16 Listado de comandos de ANSYS para la resolución del Problema 3 usando la formulación de E-B (BEAM3).

```

NDIV=1

/PREP7
ET,1,BEAM3

R,1,78.1e-4,5700e-8
R,2,53.8e-4,8360e-8

MP,EX,1,2.1e11
MP,PRXY,1,0.3
MP,ALPX,1,1e-5

K,1,0,0,0,
K,2,0,5,0,
K,3,7.5,7.5,0,

L,1,2
L,2,3

LSEL,S,LINE,,1,1,1
LATT,1,1,1, , , ,
ALLSEL,ALL
LSEL,S,LINE,,2,2,1
LATT,1,2,1, , , ,
ALLSEL,ALL
LSEL,ALL
LESIZE,ALL, , ,NDIV
LMESH,ALL

NUMMRG,ALL, , , ,LOW

/SOLU

ANTYPE,STATIC

DK,1,ALL,0
DK,3,UX,0
DK,3,ROTZ,0
DK,2,UY,0

SFBEAM,2,1,PRES,4.7434e+03,
SFBEAM,2,2,PRES,-1.5811e+03,

BFL,ALL,TEMP,-20

```

```
SOLVE
```

```
/POST1
```

```
ETABLE,AXIL_I,SMISC, 1
```

```
ETABLE,AXIL_J,SMISC, 7
```

```
ETABLE,CORZ_I,SMISC, 2
```

```
ETABLE,CORZ_J,SMISC, 8
```

```
ETABLE,MOMY_I,SMISC, 6
```

```
ETABLE,MOMY_J,SMISC, 12
```

```
PRETAB,AXIL_I,AXIL_J,CORZ_I,CORZ_J,MOMY_I,MOMY_J
```

3.13.4 Problema 4

En la estructura de la figura, la barra 2(b) trabaja solamente a esfuerzo axial. En los puntos 1 y 3 los desplazamientos están impedidos. En el punto 1, el giro tampoco está permitido. La barra 1(a) está sometida a una carga repartida por unidad de longitud de valor p . Además, toda la estructura está solicitada por un incremento térmico de valor ΔT . Calcule los desplazamientos del punto 2 y los diagramas de esfuerzos de ambas barras.

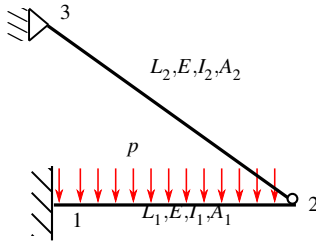


Figura 3.38 Problema 4: voladizo atirantado.

Código 3.17 Listado de comandos de MATLAB: datos de entrada del problema 4.

```
%% datos de entrada
nelem=2; % número de elementos
nnodo=3; % número de nodos
ngdl=3; % grados de libertad por nodo
tgd1=nnodo*ngdl; % grados de libertad total

%% coordenadas nodales (x,y)
coord=[0 0;
        3 0;
        0 2];

%% conectividad elemental (i,j)
elemento=[1 2;
          3 2];

%% propiedad geometricas y materiales
young=[2.0e11 2.0e11]; % modulo elástico
alpha=[1e-5 1e-5]; % coeficiente de dilatación térmica
area=[100e-4 1e-4]; % área
inercia=[1000e-8 0]; % inercia

%% condicion de contorno desplazamiento
d=[1 2 3 7 8 9]; % grados de libertad restringidos
ud=[0 0 0 0 0 0]; % valor del desplazamiento

%% condicion de contorno fuerza
f=[4 5 6]; % grados de libertad con fuerzas externas
Qx=[0 0]; % carga distribuida uniforme axial
```

Qz=[0 -10e3];	<i>% carga distribuida uniforme normal</i>
T=[20 20];	<i>% incremento térmico</i>

Código 3.18 Listado de comandos de ANSYS para la resolución del Problema 5 usando la formulación de E-B (BEAM3).

```

NDIV=1

/PREP7
ET,1,BEAM3
ET,2,LINK1

R,1,100e-4,1000e-8
R,2,1e-4,

MP,EX,1,2e11
MP,ALPX,1,1e-5

K,1,0,0,0,
K,2,3,0,0,
K,3,0,2,0,

L,1,2
L,2,3

LSEL,S,LINE,,1,1,1
LATT,1,1,1, , , ,
ALLSEL,ALL
LSEL,S,LINE,,2,2,1
LATT,1,2,2, , , ,
ALLSEL,ALL
LSEL,ALL
LESIZE,ALL, , ,NDIV
LMESH,ALL

NUMMRG,ALL, , , ,LOW

/SOLU
ANTYPE,STATIC

DK,1,ALL,0
DK,3,UX,0
DK,3,UY,0

SFBEAM,ALL,1,PRES,10000,
BFL,ALL,TEMP,20

SOLVE

/POST1

ETABLE,AXIL_I,SMISC,1
ETABLE,AXIL_J,SMISC,7
ETABLE,CORZ_I,SMISC,2

```

```
ETABLE,CORZ_I,SMISC, 8  
ETABLE,MOMY_I,SMISC, 6  
ETABLE,MOMY_J,SMISC, 12
```

```
PRETAB,AXIL_I,AXIL_J,CORZ_I,CORZ_J,MOMY_I,MOMY_J
```

4 Introducción al análisis no-lineal de estructuras

4.1 Introducción

El análisis no-lineal de estructuras abarca algunos problemas ingenieriles de interés. Por ejemplo, el fallo repentino de estructuras, la evolución de estados de daño, el comportamiento de cables y torres de gran envergadura, entre otros, necesitan de estudios que consideren no-linealidades de diferente naturaleza. La importancia del análisis no-lineal ha aumentado en los últimos años debido a la necesidad de optimizar los sistemas estructurales, el uso de nuevos materiales, y el cumplimiento de los estados límites últimos. El ámbito de este tipo de análisis alcanza varias áreas de la ingeniería, como la ingeniería nuclear, sísmica, la industria automovilística, la ingeniería aeroespacial, de minas o de plataformas oceánicas.

Para realizar un análisis no-lineal es necesario un conocimiento físico y teórico del problema que permita una modelización matemática adecuada para el objeto del estudio. La mejor aproximación para un análisis no-lineal mediante el MEF se basa en el uso de modelos sencillos con los que sea posible obtener resultados comprensibles de los que se tenga la certeza de su validez. Este tipo de modelos se refinarán de acuerdo a las necesidades del análisis y de los resultados obtenidos. Normalmente, un análisis lineal puede dar información útil del problema antes de realizar un análisis con no-linealidades. Por tanto, la utilización de modelos sencillos y fácilmente comprensibles permitirá obtener soluciones aproximadas con un grado de exactitud mayor a medida que se mejora o refina el modelo.

El flujo de trabajo en un análisis no-lineal (Figura 4.1) puede estructurarse en la modelización del problema, la definición de las condiciones cinemáticas de los elementos estructurales, las relaciones constitutivas de los materiales, la imposición de condiciones de contornos y acciones externas, la discretización mediante elementos finitos y, finalmente, la resolución e interpretación de los resultados. El modelo desarrollado puede sufrir modificaciones a partir de los resultados y las conclusiones obtenidas en el análisis,

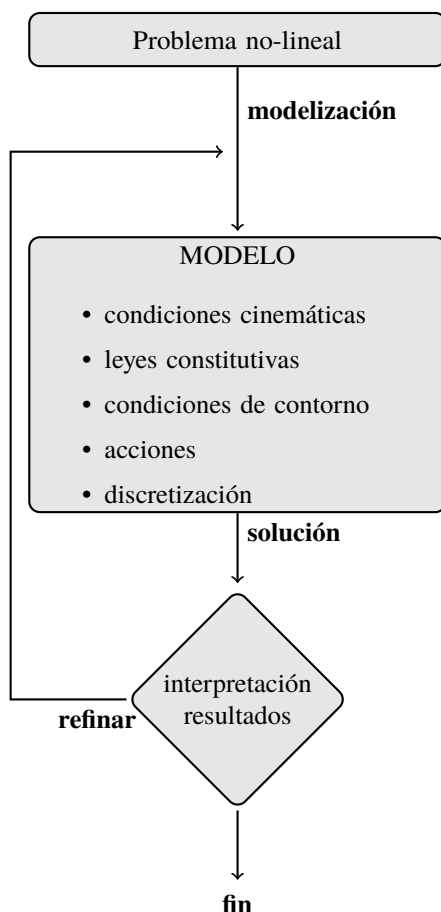


Figura 4.1 Flujo de trabajo en la resolución de un problema no-lineal.

llevándose a cabo de nuevo el procedimiento de trabajo anterior. Este flujo de trabajo se retroalimentará en cada iteración hasta obtener los resultados que mejor representen el comportamiento del problema.

Los objetivos de un análisis no-lineal incluyen la determinación de la carga de fluencia (la carga a partir de la cual aparecen deformaciones plásticas), la carga límite que provoca el fallo estructural, o la identificación de las zonas plásticas y de las tensiones residuales una vez que cesa la acciones externas. Un análisis lineal puede dar resultados acerca de la rigidez de una estructura y de la carga de fluencia. A partir de estos resultados es posible realizar un nuevo análisis, en este caso no-lineal, para estudiar la respuesta plástica del problema que permita identificar el tamaño y la forma de las regiones plastificadas. También es posible realizar un análisis plástico con grandes deformaciones para obtener la carga límite.

Los análisis no-lineales pueden clasificarse como:

No-linealidades del material En este tipo de estudios se considera que los desplazamientos y las deformaciones son pequeñas durante el alcance del análisis, y que la ley de comportamiento tensión-deformación es no-lineal. Por tanto, el origen de las no-linealidades se encuentra en la ley de comportamiento que puede ser la de un material elasto-plástico definido a partir del módulo elástico E , la tensión de fluencia σ_y y del módulo tangente E_T . Un modelo que considere este tipo de no-linealidades se encuentra en régimen elástico mientras que no se supere la tensión de fluencia. Por tanto, si las acciones no producen la plastificación de la estructura los resultados que se obtienen son idénticos a los obtenidos con un modelo lineal.

Grandes desplazamientos, pequeñas deformaciones En este caso se considera válida la hipótesis de pequeñas deformaciones, pero es posible que se alcancen grandes desplazamientos en la estructura. La ley de comportamiento del material puede ser lineal o no-lineal.

Grandes desplazamientos, grandes deformaciones Por último, puede considerarse un análisis en el que tanto los desplazamientos como las deformaciones sean grandes, y por consiguiente, la ley de comportamiento del material sea no-lineal. Este tipo de análisis es el más general, incluyendo no-linealidades de diferente naturaleza.

Además de estos análisis también es posible estudiar, por ejemplo, problemas de contacto no-lineal que incluyan efectos de fricción.

Por ejemplo, el problema de una laja con un agujero sometido a una tracción uniforme p es bien conocido. El estudio de este problema demuestra que en las inmediaciones del agujero se producen unas tensiones normales máximas de valor $3p$. En la Figura 4.2 se muestra la distribución de la componente de las tensiones σ_y que se producen para una carga $p = 1$ MPa en un cuarto de la laja, observándose que el valor máximo de la tensión es $\sigma = 3$ MPa. Por tanto, el nivel de la carga que produce la plastificación es $p = \sigma^*/3$, siendo σ^* la tensión de fluencia del material.

A continuación, si se considera un comportamiento no-lineal del material y el nivel de carga aumenta por encima del valor que produce la plastificación de la laja comenzaran a aparecer zonas plásticas, perdiéndose la no-linealidad del problema. En la Figura 4.3 se muestran la componente de la deformación plástica ε_y^p para diferentes niveles de carga. En esta figura se observa que para niveles de carga inferiores a $p = \sigma^*/3$ no aparecen deformaciones plásticas, pero a medida que aumenta la carga por encima de este nivel se produce la plastificación de la laja.

4.2 Aproximación incremental de la solución

La solución del un problema no-lineal se obtiene mediante una aproximación a partir de incrementos de la fuerza aplicada. En este procedimiento la respuesta de una estructura ante un estado de carga se calcula a partir de la definición de las fuerzas externas como una función del tiempo. Por ejemplo, en la Figura 4.4 se muestra la evolución temporal de la fuerza $F(t)$ definida en N pasos de tiempo equiespaciados un incremento Δt , es decir, se ha discretizado la evolución temporal de la fuerza en N pasos.

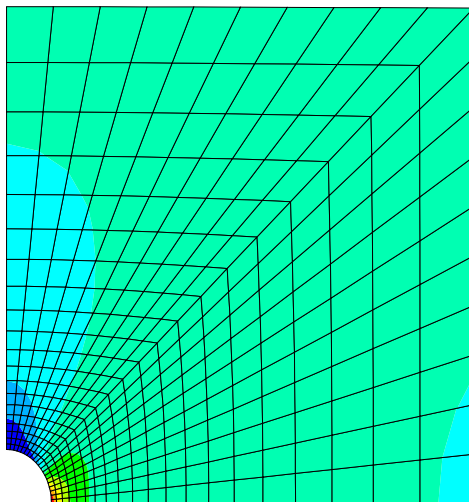


Figura 4.2 Distribución de tensiones normales σ_y en una placa con agujero sometida a una tracción uniforme $p = 1$ MPa.

Es importante destacar la influencia del periodo temporal en el que actúa la fuerza $F(t)$. Si este periodo es suficientemente mayor que los periodos fundamentales de la estructura, entonces se puede considerar que el análisis es estático. Por el contrario, si la variación de la fuerza es mayor que las frecuencias naturales de la estructura el análisis se realizaría en régimen transitorio.

La variable t tiene un significado de falsa variable temporal en un análisis no-lineal estático, ya que únicamente denota el nivel de la carga en un determinado paso de tiempo. En este caso, el paso de tiempo Δt no juega un papel determinante en la resolución del problema, siendo la solución que se obtiene en N pasos de carga equiespaciados durante un periodo temporal T igual a la que se obtendría durante otro periodo. Sin embargo, la variable temporal t es una variable del problema si el análisis fuera dinámico o si las propiedades de la estructura variaran con respecto al tiempo.

La selección del número de pasos de carga en un análisis no-lineal puede conllevar un coste computacional elevado para llegar a la solución del problema y, por otra parte, puede condicionar la validez de los resultados. El numero de pasos de carga debe ser adecuado para describir la evolución temporal de las acciones y propicios para asegurar la convergencia de la solución. La solución en cada paso de carga debe satisfacer el equilibrio de fuerzas, la compatibilidad de desplazamientos y la ley de comportamiento $\sigma - \varepsilon$.

En una estructura, en un determinado paso de tiempo $t + \Delta t$, debe cumplirse que las fuerzas externas estén equilibradas por las fuerzas de reacción R , o equivalentemente ${}^{t+\Delta t}R = {}^{t+\Delta t}F$. Si la solución del problema en el paso de tiempo t es conocida, los desplazamientos en el paso de tiempo $t + \Delta t$ serán ${}^{t+\Delta t}u = {}^t u + \Delta u$. El valor incremental Δu de los desplazamiento durante el paso de tiempo $t + \Delta t$ se calculará a partir de:

$${}^t K \Delta u = {}^{t+\Delta t}F - {}^t R \quad (4.1)$$

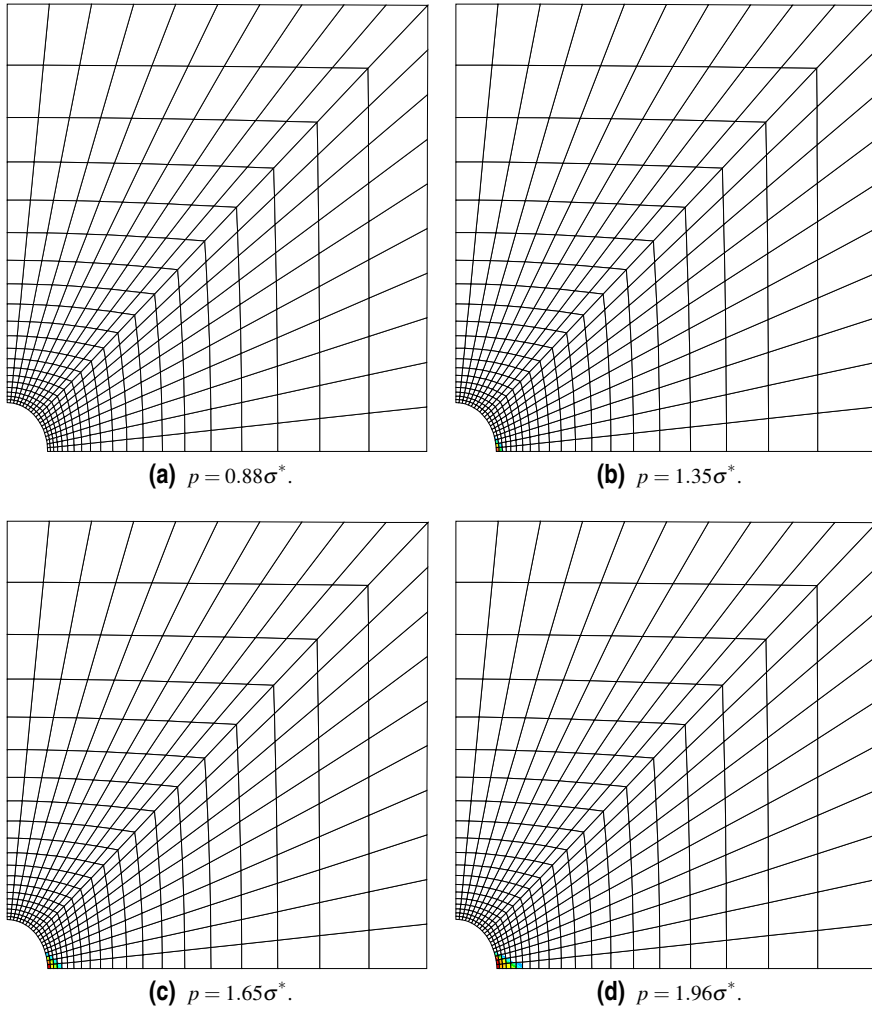


Figura 4.3 Evolucion de la deformaciones plasticas ε_y^p en una placa con agujero sometida a una tracción uniforme p .

donde tK se define como la matriz de rigidez tangente que se calcula en cada paso de tiempo. El término de la derecha define el desequilibrio de fuerzas producido por el incremento de las acciones externas en el paso de carga $t + \Delta t$, que provoca una variación de los desplazamientos Δu . La resolución de esta ecuación se lleva a cabo mediante un proceso iterativo en cada paso de carga. De forma más general se puede expresar para la iteración i como:

$${}^tK\Delta u^{(i)} = {}^{t+\Delta t}F - {}^{t+\Delta t}R^{(i)} \quad (4.2)$$

siendo el valor de los desplazamiento para cada iteración ${}^{t+\Delta t}u^{(i)} = {}^{t+\Delta t}u^{(i-1)} + \Delta u^{(i)}$. En

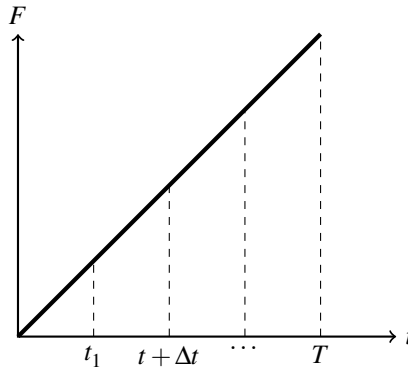


Figura 4.4 Historia de carga en un análisis no-lineal.

cada paso de tiempo, para la primera iteración se emplea los resultados del paso de tiempo anterior, es decir, ${}^{t+\Delta t}F^{(0)} = {}^tF$ y ${}^{t+\Delta t}u^{(0)} = {}^tu$.

La solución en cada paso de carga se obtiene mediante un proceso iterativo hasta alcanzar el equilibrio de fuerzas. El proceso de iteración continua hasta que se alcanza la convergencia del problema en el paso de carga que se esta resolviendo. El criterio de convergencia que se usa comúnmente es la norma L_2 del desequilibrio de fuerzas con una tolerancia TOL_F :

$$\left| {}^{t+\Delta t}F - {}^{t+\Delta t}R^{(i)} \right| < |{}^{t+\Delta t}F| TOL_F \quad (4.3)$$

El valor de la tolerancia debe seleccionarse para asegurar la convergencia de la solución en cada paso de carga. Un valor que puede proporcionar buenos resultados es $TOL_F = 0.005$.

También, como criterio de convergencia puede considerarse la variación de los desplazamientos entre dos iteraciones, imponiendo que $|\Delta u^{(i)}| < TOL_u$. En este caso, puede resultar apropiado seleccionar una valor diferente de la tolerancia como $TOL_u = 0.05$ para alcanzar la convergencia.

En ambos casos, el uso de tolerancias menores mejorará la precisión de la solución del problema, pero el coste computacional aumenta.

4.2.1 Método Newton-Raphson

El proceso iterativo de resolución para cada paso de carga suele emplear un algoritmo basado en el método de Newton-Raphson para encontrar una aproximación de la solución. El método de Newton-Raphson busca la solución de una función $f(x) = 0$ de forma iterativa a partir de una estimación inicial x_0 . A partir de esta solución se aproxima una nueva solución como:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (4.4)$$

Este procedimiento se repite hasta alcanzar la solución. De esta forma, la solución en la iteración $n + 1$ se estima a partir de la aproximación x_n :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (4.5)$$

El proceso de iteración continua hasta que el error relativo E entre dos iteraciones es adecuado para la solución buscada:

$$E = \frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_n|} \quad (4.6)$$

En la Figura 4.5 se muestra el proceso de resolución del algoritmo para calcular la raíz de la función $f(x) = x^3 - x - 1$ tomando como estimación inicial $x_0 = 10$. La raíz buscada de este polinomio es $x = 1.324718$. Los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 4.1.

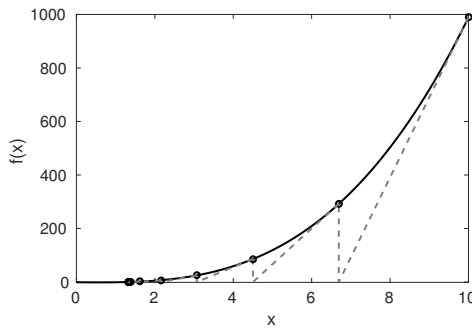


Figura 4.5 Proceso iterativo para encontrar la raíz $f(x) = x^3 - x - 1$.

Tabla 4.1 Solución $f(x) = x^3 - x - 1$.

Iteración	x	E
1	6.692308e+00	4.942529e-01
2	4.502492e+00	4.863565e-01
3	3.068559e+00	4.672983e-01
4	2.157483e+00	4.222868e-01
5	1.626403e+00	3.265363e-01
6	1.384788e+00	1.744781e-01
7	1.327826e+00	4.289830e-02
8	1.324727e+00	2.339654e-03
9	1.324718e+00	6.768120e-06

Código 4.1 Implementación del método Newton-Raphson en MATLAB para encontrar la raíz $f(x) = x^3 - x - 1$.

```
% f(x) y su derivada
f = @(x) x.^3 - x - 1;
df = @(x) 3*x.^2 - 1;
% punto inicial
x0=10;
% tolerancia
tol=1e-5;
% calculo iterativo
E=1;
while E>tol
    x=x0-f(x0)/df(x0);
    E=norm(x-x0)/norm(x);
    fprintf(' x = %d *** error = %dn',x,E)
    x0=x;
end
```

4.3 Comportamiento inelástico de materiales

El comportamiento del material se puede clasificar de forma simplificada como elástico, plástico, o elasto-plástico, dependiendo de su respuesta a las condiciones de carga. El material presenta un comportamiento *elástico* si las trayectorias de carga y descarga coinciden, es decir, si el proceso de carga es reversible (Figura 4.6.(a)). En cambio, si durante el proceso de descarga el material no regresa a su estado indeformado (Figura 4.6.(b)), existiendo deformaciones permanentes, el comportamiento es *inelástico*. El término plasticidad se utiliza para describir el comportamiento inelástico de un material que presenta deformaciones permanentes cuando éste se descarga. En esta sección se presentan las bases de la modelización de la respuesta de una estructura cuando se emplean leyes constitutivas del material no-lineales.

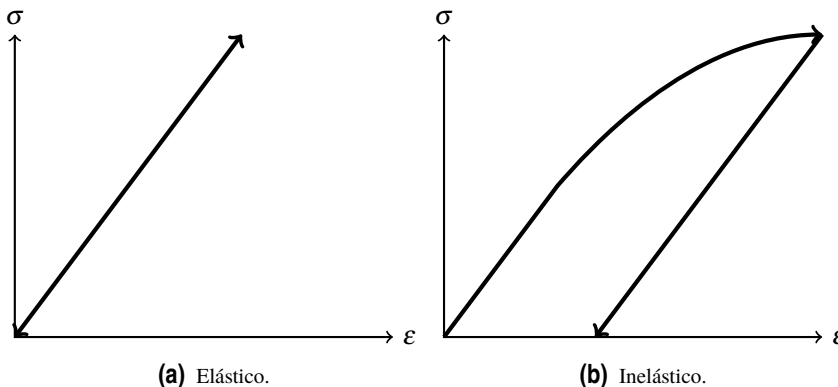


Figura 4.6 Modelos de comportamiento de un material.

Los ensayos experimentales de tracción uniaxial de una probeta muestran que la transición entre la respuesta elástica e inelástica puede presentar un escalón de fluencia del material como el representado en la Figura 4.7.(a), o bien experimentar una transición gradual (Figura 4.7.(b)). En el primer caso, la tensión de fluencia σ_y a la que se produce la plastificación material se corresponde con el límite elástico. Sin embargo, en el segundo caso, el límite elástico se define como la tensión σ_y que produce una deformación remanente ε^p .

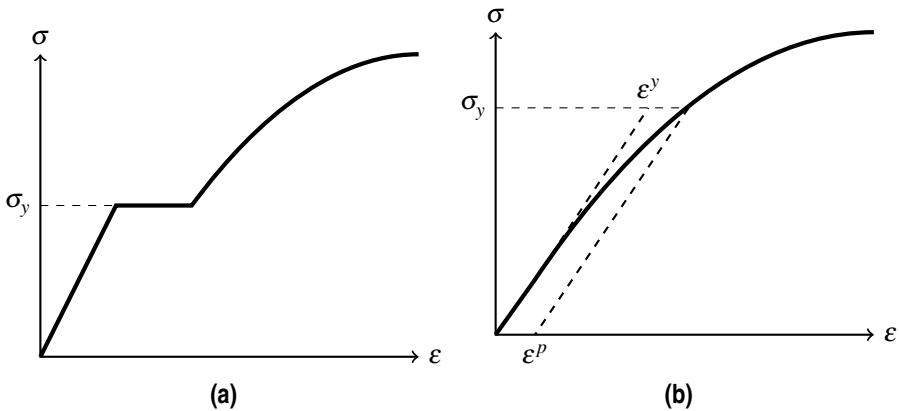


Figura 4.7 Ley de comportamiento del material.

La modelización de materiales con leyes de comportamiento como las representadas en la Figura 4.7 es compleja, por lo que se emplean modelos simplificados del comportamiento del material. Por ejemplo, la ley de comportamiento representada en la Figura 4.7.(a) puede modelizarse mediante una rama de carga en régimen lineal y, posteriormente, con una recta para el rango de fluencia del material. Este tipo de comportamiento es típico de un *material elasto-plástico perfecto* (Figura 4.8.(a)). Por otra parte, los materiales que presentan un *endurecimiento por deformación* en la parte inicial de comportamiento no-lineal pueden modelizarse mediante una ley de comportamiento bilineal (Figura 4.8.(b)).

El periodo de tiempo en el que se produce la respuesta inelástica de un material puede ser corto o largo dependiendo de la naturaleza del tipo de problema que se esté estudiando. Si la respuesta inelástica es rápida se emplea la teoría de la plasticidad para modelizar el problema. Sin embargo, si la respuesta del problema está diferida en el tiempo (horas, días, o años) el comportamiento del problema se describe como la combinación de dos fenómenos naturales: la plasticidad y la *fluencia*. En esta sección sólo se abordarán fenómenos plásticos.

La ley de comportamiento bilineal mostrada en la Figura 4.9 asume un módulo de elasticidad E hasta que se alcanza la tensión de fluencia σ_y y, posteriormente, un nuevo valor del módulo de elasticidad E_T para representar el endurecimiento por deformación. En general, el valor de E_T es considerablemente menor que el de E . El uso de dos valores del módulo de elasticidad permite modelizar el cambio de la tensión en función de las deformaciones que se producen una vez superado el límite elástico.

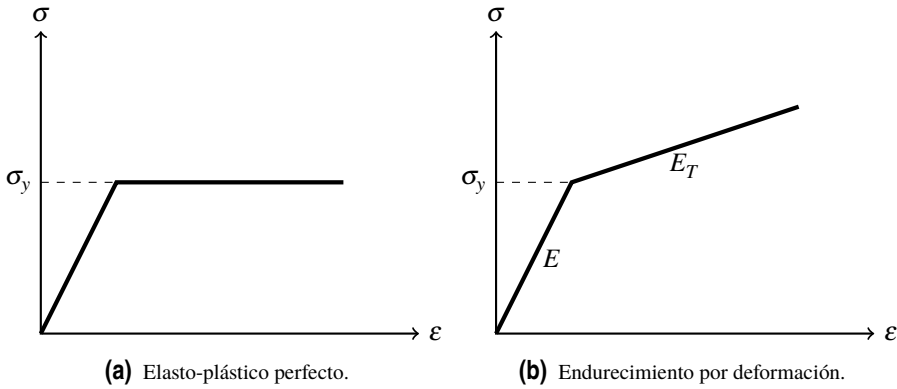


Figura 4.8 Ley de comportamiento de un material.

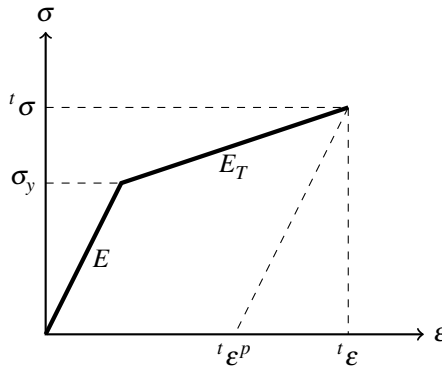


Figura 4.9 Ley de comportamiento bilineal de un material.

En cualquier caso, el proceso de descarga se realiza por una recta con una pendiente dada por el módulo elástico E . El caso mostrado en la Figura 4.9 representa el comportamiento de un material que ha superado el límite de fluencia durante la carga. El proceso de carga se realiza por la recta con pendiente E hasta alcanzar la tensión de fluencia σ_y y, entonces, se prosigue la carga con una pendiente E_T hasta el paso de carga t donde se alcanza el nivel de fuerza fijado. La deformación total $t\epsilon$ está compuesta por una parte elástica $t\epsilon^e$ y por una componente plástica $t\epsilon^p$:

$$t\epsilon = t\epsilon^e + t\epsilon^p \quad (4.7)$$

La tensión alcanzada está definida por las deformaciones elásticas, siendo $t\sigma = E t\epsilon^e$.

A continuación se discuten los modelos de comportamiento del material para describir los procesos de carga y descarga de un elemento.

4.3.1 Modelos de endurecimiento

La teoría de la plasticidad propone dos modelos de endurecimiento para describir el comportamiento inelástico de un material durante un proceso de carga y descarga como, por ejemplo, el mostrado en la Figura 4.10. La historia de carga que se representa en esta figura muestra una sucesión de cargas y descargas en las que se originan plastificaciones en los ciclos de carga. El comportamiento del material puede describirse mediante dos modelos de endurecimiento: *endurecimiento isotrópico* o *endurecimiento cinemático*.

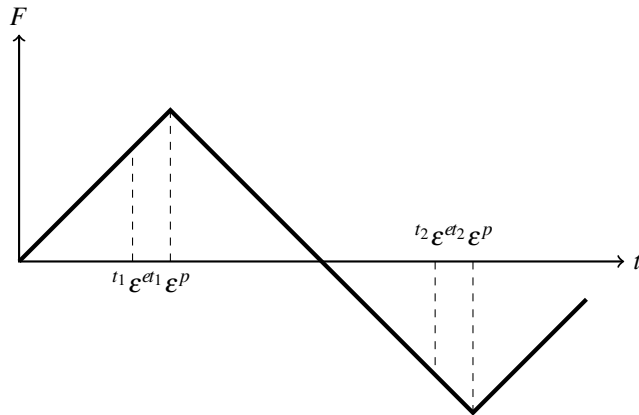


Figura 4.10 Ciclos de cargas y descargas.

En primer lugar, en la Figura 4.11 se muestra una ley de comportamiento bilineal de un material con endurecimiento isotrópico. El comportamiento del material durante el ciclo de carga experimenta las siguientes etapas: (i) un proceso de carga hasta alcanzar el límite de fluencia σ_y , (ii) el proceso de carga continua en régimen plástico hasta que se llega a un nivel σ_y^I . Entonces, (iii) se procede a descargar elásticamente seguido de una carga a compresión, produciéndose en este caso la fluencia del material a la tensión σ_y^I . (iv) El proceso de carga continua hasta alcanzar la tensión σ_y^{II} , que definiría el límite de fluencia en un nuevo ciclo de carga. Las deformaciones plásticas totales que se originan durante los ciclos de carga descritos son la suma de cada una de las deformaciones permanentes obtenidas en cada ciclo. En este caso concreto, la deformación plástica total es $\epsilon^p = {}^{t_1}\epsilon^p + {}^{t_2}\epsilon^p$, que se corresponden con las deformaciones acumuladas en cada ciclo de carga.

Por el contrario, el modelo de comportamiento de un material con endurecimiento cinemático (Figura 4.12) describe el siguiente proceso: (i) el primer ciclo de carga evoluciona de forma elástica hasta la tensión de fluencia σ_y , (ii) continúa en régimen plástico hasta alcanzar la tensión σ_y^I . El comportamiento observado durante el primer ciclo de carga es idéntico al obtenido con un modelo de endurecimiento isotrópico. Sin embargo, (iii) el proceso de descarga elástica y el ciclo posterior de compresión muestra que la fluencia se produce a una tensión mucho menor que la descrita por el modelo de endurecimiento isotrópico. Esta tensión coincide con $\sigma_y^{II} = \sigma_y^I - 2\sigma_y$. Este fenómeno se conoce como el *efecto Bauschinger*, que describe que la tensión de fluencia en compresión después de

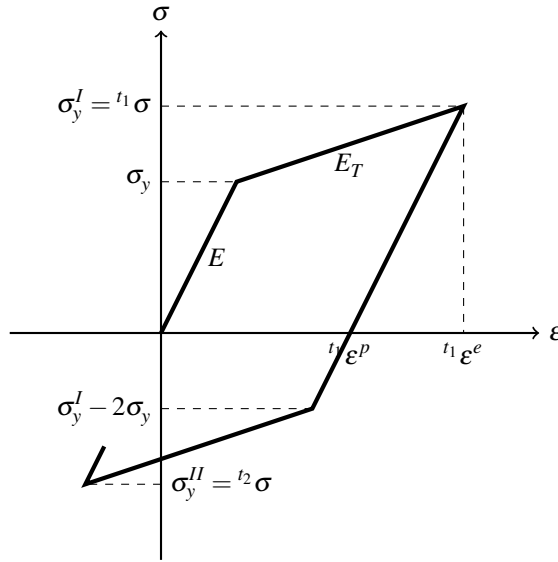


Figura 4.12 Modelo de comportamiento de un material con endurecimiento cinemático.

La superficie de fluencia definida por el criterio de Von Mises se corresponde con un cilindro donde el eje coincide con la diagonal principal del tensor de tensiones (Figura 4.13). Esta expresión se simplificada en un estado uniaxial de tensión es:

$${}^tF({}^t\sigma, {}^t\sigma_y) = \frac{1}{3} ({}^t\sigma^2 - {}^t\sigma_y^2) \quad (4.9)$$

El criterio de plastificación define una superficie de fluencia de modo que en un estado tensional se cumple que ${}^tF({}^t\sigma_{ij}, {}^t\sigma_y) \leq 0$, de forma que: (i) si ${}^tF({}^t\sigma_{ij}, {}^t\sigma_y) < 0$ el material se encuentra en régimen elástico, (ii) si ${}^tF({}^t\sigma_{ij}, {}^t\sigma_y) = 0$ se ha alcanzado el régimen plástico y (iii) que no son admisibles estados tensionales con ${}^tF({}^t\sigma_{ij}, {}^t\sigma_y) > 0$. Por tanto, el criterio de plastificación está definido por ${}^tF({}^t\sigma_{ij}, {}^t\sigma_y) = 0$.

La regla de fluencia define la relación entre el incremento de las deformaciones plásticas y las componentes del tensor de deformación:

$$d\epsilon_{ij}^p = {}^t\lambda \frac{\partial {}^tF}{\partial {}^t\sigma_{ij}} \quad (4.10)$$

donde ${}^t\lambda$ es un escalar que proporciona la magnitud de la deformación plástica denominado multiplicador plástico, mientras que la dirección viene dado por el gradiente del criterio de plastificación. La expresión equivalente para un estado uniaxial de tensión es la siguiente:

$$d\epsilon^p = \frac{2}{3} {}^t\lambda {}^t\sigma \quad (4.11)$$

Finalmente, la *ley de endurecimiento* expresa la variación del tamaño, forma, o posición

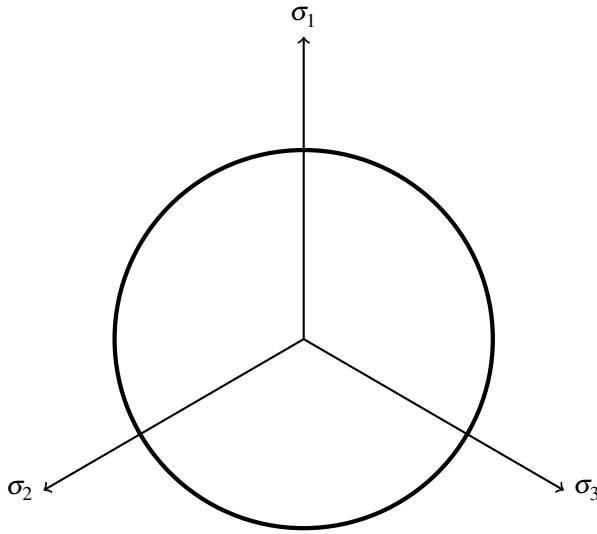


Figura 4.13 Representación del criterio de plastificación de Von-Mises.

de la superficie de fluencia. En la Figura 4.14 se muestra la evolución del criterio de plastificación de Von Mises cuando se consideran leyes de endurecimiento isótropo o cinemático.

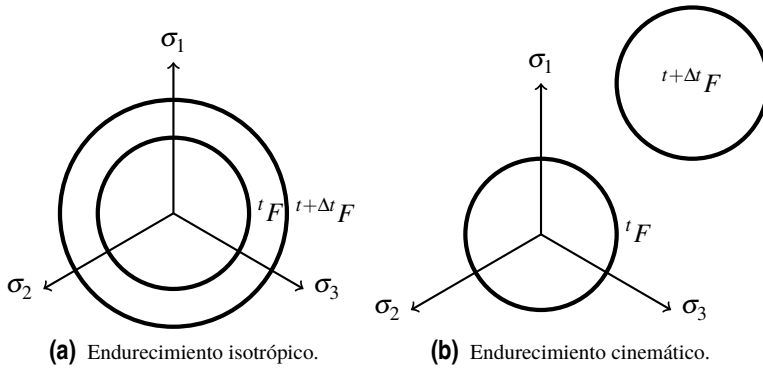


Figura 4.14 Evolución del criterio de plastificación de Von-Mises.

El procedimiento general de evaluación de las tensiones asume que las deformaciones correspondientes al paso de carga $t + \Delta t$ son conocidas. Así mismo, las tensiones en el instante t también son conocidas:

$${}^{t+\Delta t} \sigma = {}^t \sigma + d\sigma = {}^t \sigma + {}^t D^{ep} d\epsilon \quad (4.12)$$

donde ${}^tD^{ep}$ define una ley comportamiento elasto-plástica del material para el paso de carga t .

Esta expresión se evalúa teniendo en cuenta que $d\epsilon = {}^{t+\Delta t}\epsilon - {}^t\epsilon$ y realizando una aproximación de $d\epsilon$ en n incrementos de valor $\Delta\tau$, de forma que $\Delta t = n\Delta\tau$. En cada incremento se evalúan la naturaleza de las deformaciones:

$${}^{t+\Delta t}\sigma = {}^t\sigma + \sum_k^{n-1} {}^{t+k\Delta\tau}D^{ep} \frac{d\epsilon}{n} \quad (4.13)$$

En la Figura 4.15 se muestra esquemáticamente un algoritmo para la actualización de las tensiones en el paso de tiempo $t + k\Delta\tau$. En primer lugar, el incremento de tensión $d\sigma$ se aproxima suponiendo que las deformaciones $d\epsilon$ en el paso $t + k\Delta\tau$ son de origen elástico. De esta forma se obtiene una primera aproximación del valor de las tensiones definidas por ${}^{t+k\Delta\tau}\sigma = {}^t\sigma + d\sigma$. La validez de la hipótesis de que las deformaciones son elásticas se constata mediante el criterio de plastificación, comprobando que $F({}^{t+k\Delta\tau}\sigma, {}^t\sigma_y) \leq 0$. En ese caso, el valor de las tensiones coincidirá con el valor estimado de ${}^{t+k\Delta\tau}\sigma$.

Sin embargo, si $F({}^{t+k\Delta\tau}\sigma, {}^t\sigma_y) > 0$ existe entonces una componente plástica en la aproximación de las tensiones. Para evaluar dicha componente es necesario estimar la parte de la variación de las tensiones $d\sigma$ que produce la plastificación, es decir, se calcula cuál es el factor α que origina la plastificación: $F({}^{t+k\Delta\tau}\sigma, {}^t\sigma_y) = 0$. Entonces, es posible estimar la tensión elástica y la variación plástica de las deformaciones para calcular el valor actualizado de las tensiones considerando la aproximación incremental dada por la Ecuación (4.13).

El procedimiento descrito para un estado de tensión uniaxial se particulariza en los siguientes pasos: (i) se evalúa el valor de la tensión en el paso de carga actual asumiendo que la variación de las deformaciones son elásticas, ${}^{t+k\Delta\tau}\sigma = {}^t\sigma + E d\epsilon$; (ii) a continuación se evalúa el criterio de plastificación $F({}^{t+k\Delta\tau}\sigma, {}^t\sigma_y) = ({}^{t+k\Delta\tau}\sigma^2 - {}^t\sigma_y^2)/3$. Si $F \leq 0$ la estimación de las tensiones sería correcta. En la Figura 4.16 se ilustra este proceso, obteniéndose en este caso que $F > 0$, por lo que el estado de tensiones calculado no es admisible. Por tanto, (iii) es necesario buscar el valor de α que permita obtener el valor de las deformaciones plásticas $F({}^t\sigma + \alpha d\sigma, {}^t\sigma_y) = 0$:

$${}^t\sigma + \alpha d\sigma = {}^t\sigma_y \quad (4.14)$$

obteniéndose que $\alpha = ({}^t\sigma_y - {}^t\sigma)/d\sigma$. La componente elástica de la tensiones coincide con ${}^t\sigma + \alpha d\sigma = {}^t\sigma_y$. Finalmente, el valor obtenido de la tensión es:

$${}^{t+k\Delta\tau}\sigma = {}^t\sigma_y + E_T ({}^{t+k\Delta\tau}\epsilon - {}^t\epsilon_y) \quad (4.15)$$

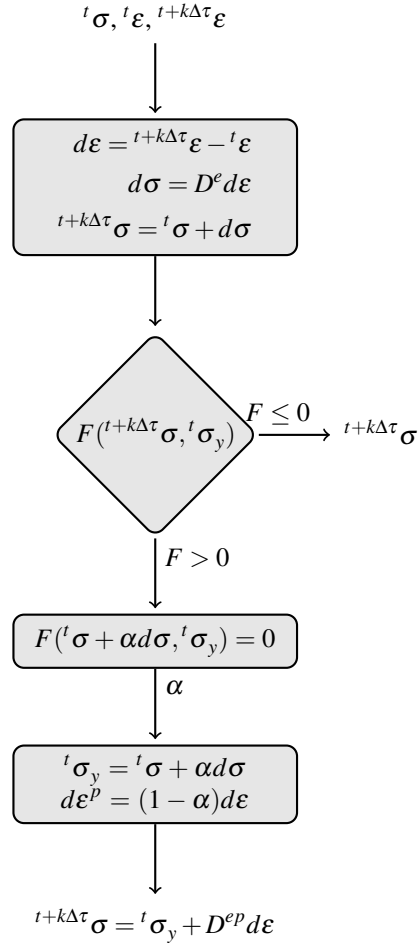


Figura 4.15 Algoritmo para el calculo de tensiones en un problema no-lineal.

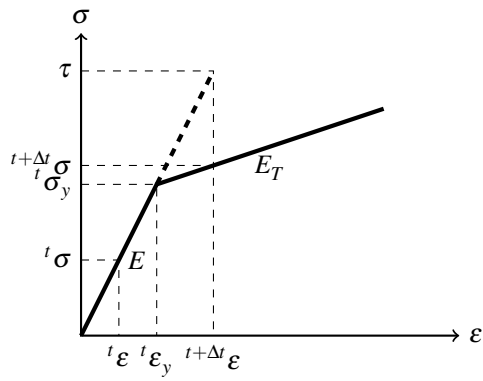


Figura 4.16 Ley de comportamiento bilineal de un material.

Ejemplo 4.3.1 Calcular el desplazamiento de una barra prismática de longitud $L = 100\text{ mm}$ y área $A = 50\text{ mm}^2$ sometida a una carga axial definida como ${}^1tF = 20\text{ kN}$, ${}^3tF = -20\text{ kN}$, ${}^5tF = 20\text{ kN}$. La ley de comportamiento del material está recogida en la Tabla 4.2 y representada en la Figura 4.17, siendo el coeficiente de Poisson es $\nu = 0.33$. Estudiar la respuesta de la barra considerando un modelo de endurecimiento isotrópico y cinemático.

Tabla 4.2 Ley de comportamiento.

$\sigma\text{ [MPa]}$	75	150	225	240	250	300
ϵ	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.025
$\sigma\text{ [MPa]}$	355	390	420	435	449	450
ϵ	0.060	0.100	0.150	0.200	0.250	0.275

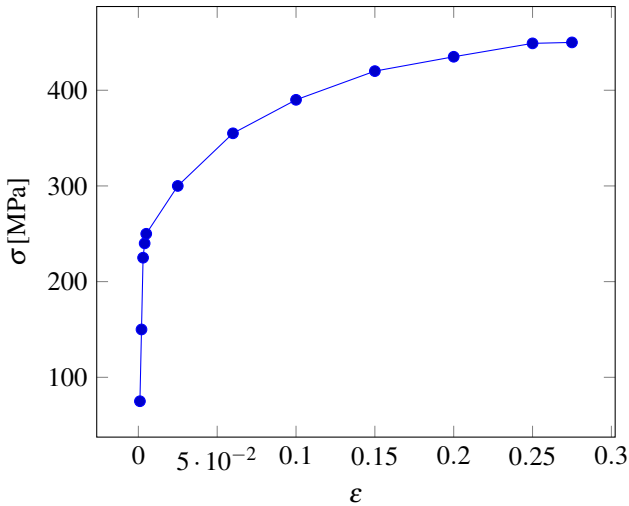
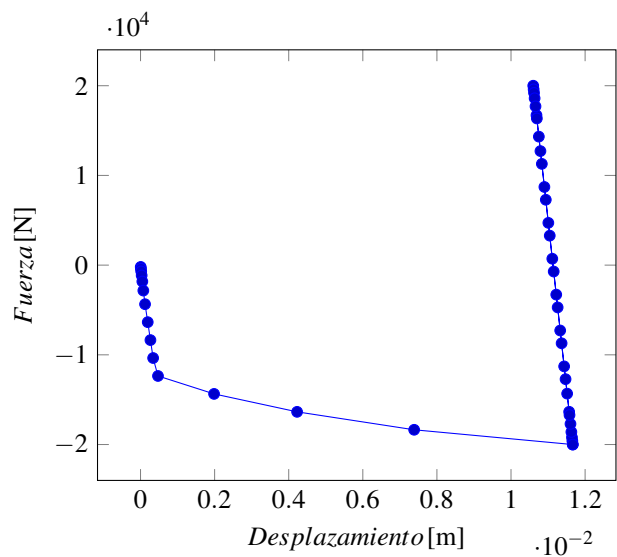


Figura 4.17 Ley de comportamiento.

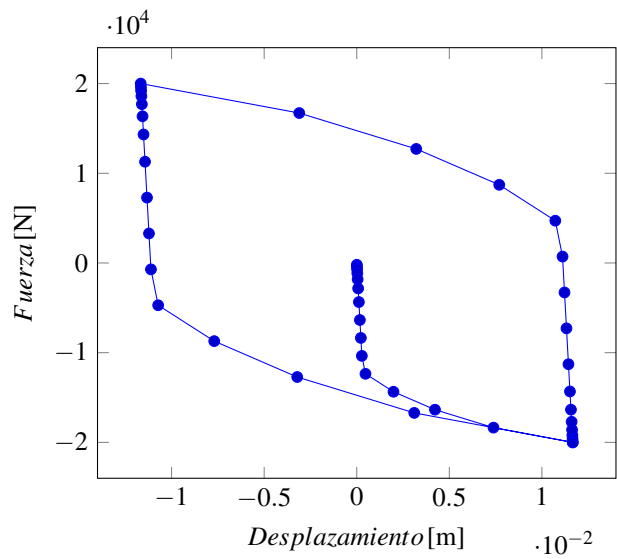
El Código 4.2 resume el listado de comandos de ANSYS utilizado para resolver este ejemplo. La barra se ha modelizado con el elemento uniaxial LINK180. El comportamiento del material se define a partir del módulo de Young $E = 70\text{ GPa}$ y del coeficiente de Poisson $\nu = 0.33$. La ley de comportamiento del material se introduce como una tabla de datos utilizando las órdenes TB y TBPT definiendo 12 pares de deformación-tensión. El modelo de endurecimiento isotrópico está indicado por la opción MISO en la orden TB. Igualmente, para indicar un modelo de endurecimiento cinemático debe seleccionarse la opción KINH. La barra se ha discretizado en 10 elementos.

La Figura 4.18 muestra los resultados obtenidos utilizando ambos modelos de endurecimiento. En la Figura 4.18.(a) la respuesta de la barra muestra un tramo lineal hasta alcanzar la tensión de fluencia. A partir de este instante, la evolución de los desplazamientos es no lineal hasta alcanzar un valor máximo para la fuerza F . Las descargas y cargas sucesivas de

la barra se realizan por una rama de pendiente definida por el módulo elástico del material sin que se produzcan nuevas deformaciones plásticas. Por el contrario, cuando el modelo de endurecimiento es cinemático se observa el efecto Bauschinger (Figura 4.18.(b)). La respuesta de la barra durante el primer paso de carga es idéntico al descrito para el modelo de endurecimiento isotrópico. Sin embargo, en el segundo paso de carga se producen deformaciones plásticas una vez que se ha sobrepasado el nivel de tensión $\sigma^I - 2\sigma_y$ y, análogamente, en el tercer paso de carga la barra vuelve a plastificar cuando alcanza la tensión $\sigma^{II} + 2\sigma_y$. De esta forma, se ponen de manifiesto las diferencias que existen entre ambos modelos de endurecimiento.



(a) Endurecimiento isotrópico.



(b) Endurecimiento cinemático.

Figura 4.18 Curva fuerza-desplazamiento de una barra sometida a un estado uniaxial de tensión.

Código 4.2 Listado de comandos de ANSYS para el análisis no lineal de la barra.

```

/PREP7
! tipo elemento
ET,1,LINK180
SECTYPE, 1, LINK
SECDATA,50e-6
! material
MP,EX,1,75E9
MP,PRXY,1,0.33
! ley comportamiento
TB,MISO,1,1,12,
TBPT,,.001,75E6
TBPT,,.002,150E6
TBPT,,.003,225E6
TBPT,,.004,240E6
TBPT,,.005,250E6
TBPT,,.025,300E6
TBPT,,.06,355E6
TBPT,,.1,390E6
TBPT,,.15,420E6
TBPT,,.2,435E6
TBPT,,.25,449E6
TBPT,,.275,450E6
! nodos
N,1
N,11,,.1
FILL,1,11
! elementos
E,1,2
EGEN,10,1,1
FINISH
! solucion
/SOLU
ANTYPE,0
D,1,ALL
NSUBST,100
OUTRES,ALL,ALL
! paso de carga 1
TIME,1
F,11,FY,20E5
SOLVE
! paso de carga 2
TIME,3
F,11,FY,-20E5
SOLVE
! paso de carga 3
TIME,5
F,11,FY,20E5
SOLVE
FINISH
!
/POST26
RFORCE,2,1,F,Y
NSOL,3,11,U,Y
XVAR,3

```

4.4 Análisis no-lineal de estructuras

El análisis de una estructura puede realizarse, en general, mediante un análisis lineal en primer orden en el que se considera que la influencia de la geometría deformada en la respuesta de la estructura es despreciable. Sin embargo, cuando los efectos de segundo orden, debidos a la actuación del estado de carga en la situación deformada, son significativos entonces es necesario considerarlos para calcular la respuesta de la estructura. El análisis no-lineal de una estructura incluye el estudio de los efectos de inestabilidad, grandes deformaciones y rigidización tensional.

4.4.1 Plasticidad en barras

Los métodos de análisis de la estructura se clasifican de acuerdo a la forma en la que se consideran los efectos no-lineales relacionados con el comportamiento del material en: i) análisis elástico y ii) análisis plástico o elastoplástico. El análisis elástico de la estructura es un análisis en primer orden basado en la hipótesis de comportamiento elástico-lineal de los materiales. El dimensionamiento de una estructura mediante un análisis elástico asume que el agotamiento de la resistencia se produce cuando la sección más solicitada alcanza el tensión del límite elástico.

Actualmente, el dimensionamiento de estructuras de acero permite aprovechar la reserva plástica de la sección en determinadas condiciones. Los métodos de análisis plástico se basan en la teoría de las rótulas plásticas. Una rótula plástica se forma cuando todas las fibras de una sección alcanzan la tensión de fluencia del material. En ese estado la sección no puede incrementar el momento resistente y se considera como una articulación. El análisis plástico sólo puede aplicarse cuando los elementos estructurales poseen la ductilidad suficiente para desarrollar el mecanismo de colapso mediante rótulas plásticas.

Para ilustrar este proceso se va a estudiar el comportamiento de una viga biapoyada que soporta una carga uniformemente distribuida de valor p . El momento flector máximo $M = pL^2/8$ se alcanza en el centro del vano. En régimen elástico, la componente normal de la tensión en una sección está definida por la coordenada y con origen en la fibra neutra:

$$\sigma = -\frac{M}{I}y \quad (4.16)$$

El valor máximo de la tensión se encuentra en las fibras extremas de la sección dadas y_{max} de acuerdo a la expresión anterior:

$$\sigma = -\frac{M}{I}y_{max} = \frac{M}{W} \quad (4.17)$$

donde $W = y_{max}/I$ se define como el módulo resistente de la sección.

Se define el momento flector elástico M_{el} como el valor alcanzado cuando la tensión de la fibra más solicitada de la sección llega al límite de fluencia σ_y , es decir:

$$M_{el} = \sigma_y W \quad (4.18)$$

A partir de este instante, un incremento de la carga producirá la plastificación de las fibras que han alcanzado la tensión de fluencia.

La teoría de rótulas plásticas se basa en un modelo de comportamiento elastoplástico perfecto del material. En este contexto, en la situación anterior se produce la plastificación sucesiva de las fibras de la sección a medida que aumenta la carga que soporta la viga. Un vez que ha plastificado una fibra la tensión no se incrementa ya que el modelo de comportamiento del material no tiene en cuenta el endurecimiento por deformación. Así mismo, se define el momento flector plástico M_{pl} como el valor que produce la plastificación de toda la sección:

$$M_{pl} = \sigma_y \int_A y dA \quad (4.19)$$

Por ejemplo, en una viga de sección rectangular de dimensiones $b \times h$ el módulo resistente es $W = bh^2/6$ y, por tanto, el momento elástico está definido por $M_{el} = \sigma_y bh^2/6$. El momento plástico se obtiene como:

$$M_{pl} = \sigma_y b \int_{-h/2}^{+h/2} y dy = \sigma_y \frac{bh^2}{4} = \sigma_y W_{pl} \quad (4.20)$$

donde W_{pl} es módulo resistente plástico de la sección.

La reserva plástica de la sección se evalúa como la relación entre el momento plástico y el momento elástico:

$$\lambda = \frac{M_{pl}}{M_{el}} = 1.5 \quad (4.21)$$

es decir, un sección rectangular tiene la capacidad de soportar un 50 % más de carga que el límite definido por el momento elástico.

4.4.2 Rigidización tensional e inestabilidad

La rigidización tensional es un efecto que considera el aumento, o la disminución, de la capacidad portante de una estructura de acuerdo al estado tensional producido por las acciones externas. Los efectos de rigidización son importantes, en general, en estructuras donde la capacidad resistente a los esfuerzos de flexión es mucho menor que la de soportar esfuerzos axiales. Este tipo de efecto es común en estructuras esbeltas como cables, vigas delgadas o láminas, donde existe un acoplamiento entre los esfuerzos axiales y de flexión.

El análisis no-lineal de una estructura que considera la rigidización tensional se realiza utilizando una *matriz elemental de rigidez geométrica* que proporciona una rigidez adicional a la matriz de rigidez del elemento. La matriz de rigidez geométrica se calcula de acuerdo al estado tensional de pasos de cargas o iteraciones previas al instante de tiempo actual del análisis. Este procedimiento requiere dos iteraciones al menos para estimar

adecuadamente la solución del problema. El estado tensional se determina en una primera iteración, tras la que es posible calcular la matriz de rigidez geométrica para en una posterior iteración obtener la respuesta de la estructura. Además, si el efecto de la rigidización tensional produce un cambio en el estado tensional calculado en la primera iteración serán necesarias un número mayor de iteraciones que permitan alcanzar la convergencia del problema.

El análisis de inestabilidad de una estructura es caso particular de la rigidización tensional. Este tipo de análisis estudia la pérdida de capacidad portante de una estructura producida por los efectos de pandeo de los elementos que la forman. Existen dos procedimientos para llevar a cabo este estudio.

El procedimiento más simple incluye el cálculo de *factores de pandeo y modos de pandeo* que predicen la carga ideal que provoca un fallo estructural por inestabilidad considerando que el sistema tiene un comportamiento lineal. El cálculo de los factores de pandeo es una aproximación lineal que permite estimar la carga crítica de pandeo de una estructura. Por ejemplo, este tipo de análisis predice una carga crítica aproximada de un elemento unidimensional sometido a compresión similar a la carga de Euler. Sin embargo, si los efectos de posibles imperfecciones o no-linealidades son importantes el resultado obtenido puede ser no conservador ya que el comportamiento de la estructura se considera lineal.

En estos casos, un análisis no-lineal permitirá obtener una aproximación más certera del comportamiento de una estructura. El procedimiento de análisis evalúa la respuesta de la estructura en cada paso de carga para identificar la carga que produce el fallo por inestabilidad. Además, en este tipo de análisis pueden incluirse las imperfecciones y el comportamiento no-lineal del material, y prorrogar el estudio más allá de la carga crítica.

4.4.3 Grandes deformaciones

El efecto de las grandes deformaciones es importante cuando éstas superan un determinado nivel, por ejemplo el 1 %, que provoca que el cambio de la geometría de la estructura no pueda despreciarse en la hipótesis de pequeños desplazamientos y deformaciones. La teoría de grandes deformaciones es compleja y su formulación incluye las relaciones entre la situación deformada e indeformada. Este tipo de análisis queda fuera de alcance de estos apuntes.

5 Inestabilidad en estructuras

5.1 Introducción

El análisis en primer orden de una estructura se fundamenta en la hipótesis de que los desplazamientos y los giros producidos por un determinado estado de fuerzas son pequeños en comparación con las dimensiones de cada barra. Esta hipótesis implica que la geometría de los elementos no varía de forma sustancial durante la acción de las cargas. En estos casos, las ecuaciones de equilibrio que definen la solución del problema se plantean en la situación indeformada. Sin embargo, si la configuración de las acciones o la tipología de la estructura invalidan la hipótesis de pequeños desplazamientos, entonces se dice que la estructura presenta una no linealidad geométrica y el equilibrio debe plantearse en la posición deformada.

La no linealidad geométrica es un fenómeno que se debe principalmente a: (i) la relación entre los desplazamientos de un elemento y las deformaciones del mismo es no lineal, (ii) el equilibrio del elemento muestra una relación no lineal entre las fuerzas y los desplazamientos y (iii) el equilibrio debe plantearse en la situación deformada.

La causa más importante de la aparición de fenómenos no lineales en una barra es la acción de una carga axial. Si este axial es de compresión puede producirse un fenómeno de inestabilidad (pandeo). Los primeros trabajos sobre no linealidad se centraron en el pandeo de barras (Euler, 1744) y, más tarde, en el comportamiento no lineal de los elementos en presencia de un axial.

Por ejemplo, en la Figura 5.1 se representa de forma esquemática una barra de longitud L que tiene impedidos los desplazamientos en el extremo inferior. En este punto, un resorte de rigidez k_θ se opone al giro libre de la barra. En el extremo opuesto el sistema está solicitado por una fuerza p .

Para estudiar la estabilidad de este problema se distinguen dos casos: (i) la barra y la fuerza están perfectamente alineadas y no existen imperfecciones geométricas (Figura 5.1.(a)) y (ii) la configuración del sistema presenta un pequeño desalineamiento de la barra con la fuerza (Figura 5.1.(b)). En el primer caso, la barra está sometida a un estado de compresión simple y el fallo estructural se produce por el agotamiento de la sección.

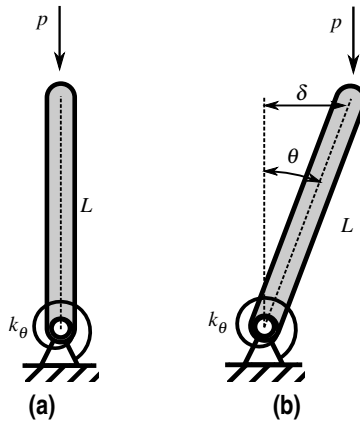


Figura 5.1 Barra articulada sometida a compresión: (a) configuración inicial y (b) situación deformada.

En el segundo caso, la respuesta del sistema se caracteriza por la rotación θ , considerándose que la rigidez axial es mucho mayor que la del resorte. De esta forma, el desplazamiento horizontal del punto superior está dado por $\delta = L \sin(\theta)$. La acción de la fuerza p produce un momento en el apoyo de valor $M = pL \sin(\theta)$, que se encuentra equilibrado por el momento del resorte $M = \theta k_\theta$. Igualando estas expresiones se obtiene que:

$$p = \frac{\theta k_\theta}{L \sin(\theta)} \quad (5.1)$$

Esta expresión define la posición de equilibrio del sistema definida por el ángulo θ cuando actúa una fuerza de valor p . La relación $p - \theta$ presenta una no linealidad ocasionada por la dependencia del momento producido por la fuerza p con la deformada del sistema. Esta relación se puede linealizar si el ángulo θ es pequeño, de forma que $\sin(\theta) \approx \theta$, obteniéndose que:

$$p_{cr} = \frac{k_\theta}{L} \quad (5.2)$$

La Ecuación (5.2) representa el valor máximo de la fuerza en el que existe un equilibrio del sistema, definido como la carga crítica p_{cr} en la que el equilibrio es estable. A partir de este valor, un pequeño incremento de la carga produce una respuesta inestable con un desplazamiento transversal δ elevado. Este fenómeno se conoce como el *pandeo* de la estructura.

En la Figura 5.2 se representa el diagrama de estabilidad del sistema definido por la Ecuación (5.1). El desplazamiento transversal del punto superior es nulo hasta que la carga alcanza el valor crítico $p/p_{cr} = 1$. El diagrama de estabilidad presenta una relación no lineal entre la carga y el desplazamiento si $p/p_{cr} > 1$, debido al incremento del momento producido por la acción de la fuerza p a medida que el ángulo de giro es mayor. El desplazamiento máximo se produce cuando $\theta = \pi/2$ correspondiendo con la posición

horizontal de la barra. Posteriormente, se produce un retroceso del punto central con una rigidización del sistema producida por el aumento del ángulo θ . El análisis lineal del sistema no puede predecir el comportamiento para valores de la carga $p/p_{cr} > 1$ como se muestra en las figuras.

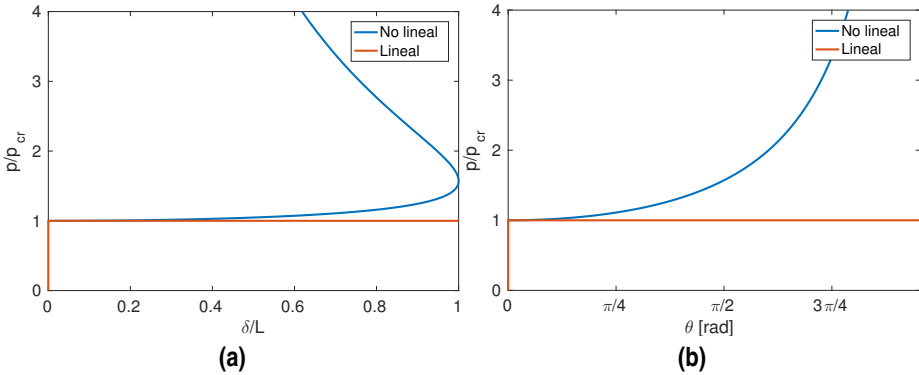


Figura 5.2 Diagrama de estabilidad de un mecanismo sometido a una carga de compresión.

La resolución directa del problema definido por la Ecuación (5.1) es compleja. La no linealidad del sistema requiere usar un algoritmo de resolución iterativo paso-a-paso, de forma que la solución para un determinado valor de la carga p se obtiene resolviendo el problema en N pasos de carga definidos por $\{p_0, p_1, \dots, p_{N-1}, p_N\}$.

El algoritmo implementado en el Código 5.1 permite obtener la solución del problema particularizado para $k_\theta = 5 \text{ Nm/rad}$ y $L = 1 \text{ m}$. El procedimiento de resolución de la ecuación de equilibrio empieza con una estimación inicial θ_0 del ángulo de giro de la barra. Este valor se puede tomar de forma arbitraria, pero su selección puede condicionar la solución obtenida. En este problema se sabe que para un valor de la fuerza inferior a la carga crítica el ángulo girado es nulo. Sin embargo, la solución de la Ecuación (5.1) no está definida y, por tanto, el algoritmo de resolución no aporta una solución adecuada si se toma ese valor. En este caso, tomando un valor θ_0 arbitrariamente pequeño, se obtiene la solución mostrada en la Figura 5.3 para $p = 4p_{cr}$ ($p_{cr} = 5 \text{ N}$), calculada en 20 pasos de carga desde el valor inicial $p_0 = p_{cr}$.

Código 5.1 Listado de comandos de MATLAB para calcular la solución del sistema no-lineal de la Figura 5.1.

```
K=5; % rigidez del resorte
L=1; % longitud de las barras

N=20; % pasos de carga
P=linspace(5,20,N); % historia de carga 5N a 20N

theta0=1e-1; % perturbación inicial
theta=zeros(1,N);
```

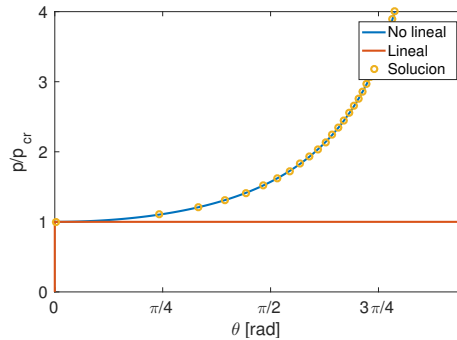


Figura 5.3 Solución no-lineal del problema.

```
for i=1:N
    theta 0 = fsolve ( @(theta) (P(i)-K./(L*sin( theta )).* theta ), theta 0);
    theta (i)=theta 0;
end
```

En las secciones siguientes se aborda, en primer lugar, el análisis de elementos aislados sometidos a cargas de compresión. Se estudiará la influencia de las condiciones de contorno y el efecto de la excentricidad de la carga y de las imperfecciones de la barra. Así mismo, se estudiará el problema de flexo-compresión de una barra que servirá como introducción al estudio de los efectos de pandeo global de estructuras.

5.2 Elementos simples sometidos a compresión

El análisis de la sección anterior muestra que existe un cierto valor de la carga de compresión, denominado carga crítica, para el que se produce la inestabilidad del sistema, caracterizada por un elevado incremento de la flecha cuando la variación de la fuerza es pequeña. El pandeo de barras se observa experimentalmente en piezas esbeltas donde se produce una curvatura del elemento cuando la carga se aproxima al valor crítico. Esta deformación aumenta rápidamente al crecer la fuerza de compresión.

Considérese, en primer lugar, una barra esbelta empotrada en el extremo inferior y cargada axialmente en el superior (Figura 5.4). La ecuación que describe los desplazamientos de la barra se obtiene a partir del equilibrio en la situación deformada representada en la Figura 5.4. El momento en una sección definida por la coordenada longitudinal x es $M = p(\delta - y)$. Así mismo, el momento interno es $M = EIy''$, donde E es el módulo de elasticidad e I la inercia de la barra en el plano de pandeo. El equilibrio de momentos flectores establece que:

$$y'' + a^2 y = a^2 \delta \quad (5.3)$$

siendo $a^2 = p/EI$. La solución general de la ecuación diferencial es la suma de la solución homogénea y de la solución particular $y(x) = y^H(x) + y^P(x)$, respectivamente. En este caso

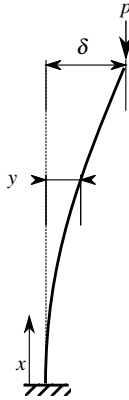


Figura 5.4 Deformada de una columna con extremo libre.

concreto, la solución homogénea¹ se calcula ensayando una solución $y^H(x) = \exp(kx)$. La constante k se obtiene a partir de las raíces del polinomio característico derivado de la ecuación homogénea:

$$k^2 e^{kx} + a^2 e^{kx} = 0 \quad (5.4)$$

En este caso, la solución tiene dos raíces complejas conjugadas $k = \pm ai$. Por tanto, la solución homogénea se puede escribir como²:

$$y^H = c_1 \cos(ax) + c_2 \sin(ax) \quad (5.5)$$

donde c_1 y c_2 son constantes de integración que posteriormente se obtendrán imponiendo condiciones de contorno.

En este caso sencillo la solución particular de la Ecuación (5.3) tiene la expresión³ $y^P = \delta$. Combinando la solución homogénea más la particular se obtiene la solución general:

$$y = c_1 \cos(ax) + c_2 \sin(ax) + \delta \quad (5.6)$$

que debe satisfacer las condiciones de contorno en el apoyo: $y(x=0) = 0$ e $y'(x=0) = 0$. Estas condiciones se cumple si $c_1 = -\delta$ y $c_2 = 0$. Por tanto, la expresión final de la ecuación de la deformada es:

$$y = \delta(1 - \cos(ax)) \quad (5.7)$$

¹ La solución homogénea de una ecuación diferencial ordinaria (EDO) lineal con coeficientes constantes ($a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \dots + a_1 y' + a_0 = 0$) es $y^H = e^{kx}$.

² La solución homogénea de una EDO lineal de segundo orden con dos raíces complejas conjugadas $k = a \pm bi$ tiene la forma $y^H(x) = \exp(ax)(c_1 \cos(bx) + c_2 \sin(bx))$.

³ La solución particular de una función polinómica $f(x) = a_0 + a_1 x^1 + \dots + a_n x^n$ es $y^P = b_0 + b_1 x^1 + \dots + b_n x^n$.

Esta expresión define el desplazamiento transversal de un punto x de la barra para una carga de compresión p . La Ecuación (5.7) debe verificar que el desplazamiento del extremo libre sea $y(L) = \delta$, lo cual impone que $\cos(aL) = 0$. Esta condición se produce cuando $aL = (2n + 1)\pi/2$. Se define como la carga crítica el valor mínimo para que se cumple la condición anterior, es decir, el valor de la carga calculado para $n = 0$:

$$p_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \quad (5.8)$$

El valor de la carga crítica que produce la inestabilidad del elemento no depende de la resistencia del material, sino de las dimensiones de la barra y del módulo de elasticidad. Por ejemplo, dos piezas igualmente esbeltas, una de acero de baja resistencia y otra de acero común, pandean para el mismo valor de la fuerza p independientemente del valor de la tensión de fluencia de cada una.

Las deformadas para los distintos valores de n se denominan *modos de pandeo*. En la Figura 5.5 se representan los tres primeros modos de pandeo.

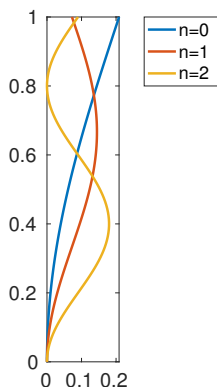


Figura 5.5 Modos de pandeo de una barra en voladizo.

La carga crítica para otras condiciones de apoyo puede deducirse a partir de la solución obtenida de la barra en voladizo. Por ejemplo, la carga crítica de una barra con los dos extremos articulados se corresponde, por simetría, con la de una barra en voladizo de longitud $L/2$:

$$p_{cr}^E = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (5.9)$$

Este caso es muy frecuente en aplicaciones estructurales y su carga crítica se denomina *carga crítica de Euler*. En la siguiente sección se sistematiza el cálculo de la carga crítica para diferentes condiciones de apoyo.

5.2.1 Efecto de la excentricidad de la carga

Cuando la longitud L del elemento cargado es muy grande en comparación con las dimensiones de la sección, la excentricidad de la carga e no se puede despreciar en el equilibrio

de fuerzas. En la Figura 5.6 se representa de forma esquemática una barra en voladizo de longitud L sometida a una carga de compresión p con una excentricidad e .

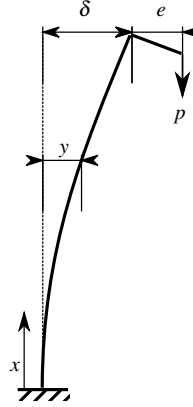


Figura 5.6 Deformada de una columna con extremo libre con excentricidad de la carga.

El momento flector en una sección dada por la coordenada x es $M(x) = p(\delta + e - y(x))$. La ecuación diferencial que define la deformada de la barra es:

$$EIy'' + a^2y = a^2(\delta + e) \quad (5.10)$$

donde el parámetro a tiene el mismo significado que en las secciones anteriores. La solución general de esta ecuación es de la forma:

$$y = c_1 \cos(ax) + c_2 \sin(ax) + \delta + e \quad (5.11)$$

Las constantes de integración c_1 y c_2 se obtienen nuevamente al aplicar las condiciones de contorno en el apoyo: (i) $y(x=0) = 0$ proporciona que $c_1 = -(\delta + e)$ y (ii) $y'(x=0) = 0$ conduce a $c_2 = 0$. En este caso, la expresión final de la deformada es:

$$y(x) = (\delta + e)(1 - \cos(ax)) \quad (5.12)$$

La carga crítica de la barra considerando la excentricidad de la carga se obtiene particularizando la ecuación anterior en $x = L$, siendo $y(x=L) = \delta = (\delta + e)(1 - \cos(aL))$, siendo:

$$\delta = \frac{e(1 - \cos(aL))}{\cos(aL)} \quad (5.13)$$

La expresión anterior muestra que la carga crítica se alcanza cuando el denominador es nulo, $aL = (2n + 1)\pi/2$, es decir:

$$p_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \quad (5.14)$$

Al comparar esta expresión con la carga crítica de la barra en voladizo se observa que es independiente de la excentricidad de la fuerza. Sin embargo, el diagrama de estabilidad del elemento sí depende de la excentricidad de la carga. Para deducir esta dependencia basta con sustituir el valor de la flecha en la Ecuación (5.12). Se llega a la siguiente expresión para la deformada de la barra:

$$y(x) = \frac{e(1 - \cos(ax))}{\cos(aL)} \quad (5.15)$$

En la Figura 5.7 se muestra el diagrama de estabilidad de la carga aplicada p/p_{cr} respecto a la flecha adimensionalizada δ/L para distintos valores de la excentricidad. En esta representación se observa que las curvas se aproximan al caso ideal a medida que la excentricidad de la carga disminuye. Así mismo, la flecha de la barra aumenta significativamente cuando la carga tiende al valor crítico definido por la Ecuación (5.14), y que todas las curvas presentan una asíntota en $p/p_{cr} = 1$.

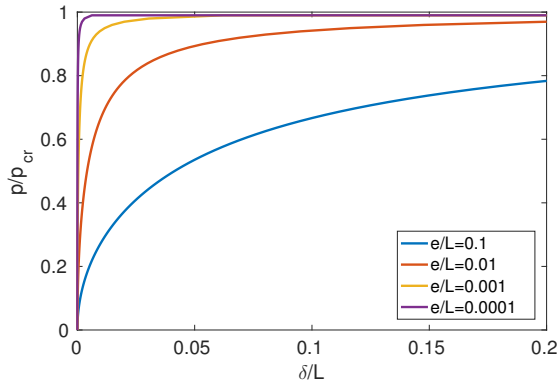


Figura 5.7 Diagrama de estabilidad de una barra en voladizo con carga excéntrica.

En la bibliografía se recoge que los ensayos realizados en piezas a compresión siempre presentan una excentricidad en la carga aunque se sea cuidadoso en la preparación. Dicha excentricidad produce un estado de compresión y flexión en la barra. El momento máximo se produce en el empotramiento:

$$M(x=0) = p(\delta + e) = p \left[e + \frac{e(1 - \cos(aL))}{\cos(aL)} \right] \quad (5.16)$$

Se puede comprobar que el momento flector aumenta conforme la carga se acerca al valor crítico, es decir, cuando $aL = \pi/2$.

5.2.2 Imperfecciones geométricas

En la sección anterior se ha estudiado el efecto que puede tener la excentricidad de la carga de compresión en la respuesta de una barra. También es posible considerar el caso más realista asociado a las imperfecciones geométricas de los elementos. Por ejemplo, se

puede considerar que existe una deformada inicial que puede tener la forma del primer modo de pandeo de la barra con una amplitud δ_0 (Figura 5.8):

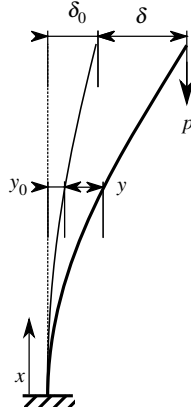


Figura 5.8 Deformada de una columna con extremo libre e imperfecciones geométricas.

$$y_0 = \delta_0 \left(1 - \cos \left(\frac{\pi x}{2L} \right) \right) \quad (5.17)$$

La acción de la fuerza p produce una deflexión $y(x)$ a partir de la deformada inicial, siendo la flecha total en el extremo libre $\delta + \delta_0$. Por tanto, la ecuación de equilibrio del momento flector en una sección de la barra se modifica como:

$$EIy'' = P(\delta + \delta_0 - (y + y_0)) \quad (5.18)$$

Y de forma equivalente:

$$y'' + a^2 y = a^2 (\delta + \delta_0) - a^2 y_0 \quad (5.19)$$

Sustituyendo la expresión de la deformada inicial dada por las imperfecciones de la barra se tiene la siguiente expresión de la ecuación de equilibrio:

$$y'' + a^2 y = a^2 \left(\delta + \delta_0 \cos \left(\frac{\pi x}{2L} \right) \right) \quad (5.20)$$

La solución de esta ecuación se compone de solución homogénea y particular. En esta última hay que buscar una solución de la forma⁴:

$$y^P = b_0 + b_1 \cos \left(\frac{\pi x}{2L} \right) + b_2 \sin \left(\frac{\pi x}{2L} \right) \quad (5.21)$$

⁴ La solución particular para una función trigonométrica de la forma $f(x) = A \sin(kx)$ es $y^P = b_1 \cos(kx) + b_2 \sin(kx)$. Esta solución también es válida si $f(x) = A \cos(kx)$.

Sustituyendo en la ecuación de equilibrio se llega a una expresión en la que se identifican las constantes de integración de la solución particular:

$$a^2 b_0 + b_1 \left(a^2 - \frac{\pi^2}{4L^2} \right) \cos \left(\frac{\pi x}{2L} \right) + b_2 \left(a^2 - \frac{\pi^2}{4L^2} \right) \sin \left(\frac{\pi x}{2L} \right) = a^2 \left(\delta + \delta_0 \cos \left(\frac{\pi x}{2L} \right) \right) \quad (5.22)$$

Identificando términos en esta ecuación se obtienen las constantes de la solución particular:

$$b_0 = \delta \quad (5.23)$$

$$b_1 = \frac{a^2 \delta_0}{\left(a^2 - \frac{\pi^2}{4L^2} \right)} = \frac{\delta_0}{1 - p_{cr}/p} \quad (5.24)$$

$$b_2 = 0 \quad (5.25)$$

Entonces, la solución del problema es:

$$y = c_1 \cos(ax) + c_2 \sin(ax) + \delta + \frac{\delta_0}{1 - p_{cr}/p} \cos \left(\frac{\pi x}{2L} \right) \quad (5.26)$$

Las constantes c_1 y c_2 , del mismo modo que en los apartados anteriores, se calculan imponiendo las condiciones de contorno en el extremo fijo:

$$c_1 = - \left(\delta + \frac{\delta_0}{1 - p_{cr}/p} \right) \quad (5.27)$$

$$c_2 = 0 \quad (5.28)$$

Finalmente, la ecuación de la deformada de la barra cuando existen imperfecciones geométricas es la siguiente:

$$y = \delta (1 - \cos(ax)) + \frac{\delta_0}{1 - p_{cr}/p} \left(\cos \left(\frac{\pi x}{2L} \right) - \cos(ax) \right) \quad (5.29)$$

Particularizando esta expresión en el extremo libre de la barra, $y(L) = \delta$, se tiene la siguiente condición:

$$\left(\delta + \frac{\delta_0}{1 - p_{cr}/p} \right) \cos(aL) = 0 \quad (5.30)$$

En esta expresión se deduce, en primer lugar, que la carga crítica se alcanza cuando $p_{cr} = \pi^2 EI / 4L^2$. El efecto de las imperfecciones no modifica el valor de la carga crítica pero, como se deduce a continuación, produce que la barra experimente efectos de pandeo

antes que en el caso ideal. En efecto, el valor de la flecha está dado por:

$$\delta = -\frac{\delta_0}{1 - p_{cr}/p} = \frac{\delta_0}{p_{cr}/p - 1} \quad (5.31)$$

En la Figura 5.9 se representa el desplazamiento total $\delta_t = \delta + \delta_0$ adimensionalizado a la longitud de la barra respecto al factor de carga p/p_{cr} para distintos niveles de imperfección. El desplazamiento de la barra cuando no actúa la fuerza de compresión se corresponde a la deformada inicial impuesta por la imperfección del elemento. A medida que la carga se aproxima al valor crítico, los desplazamientos aumentan de forma inestable y se pierde la capacidad portante de la barra.

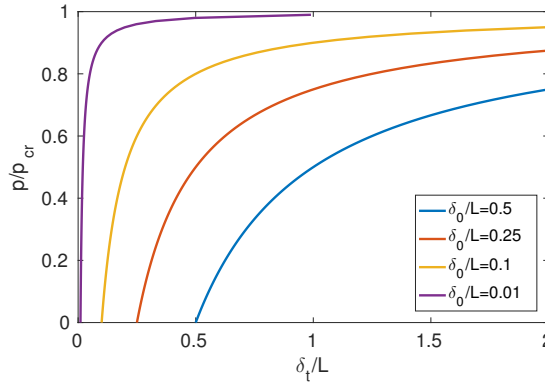


Figura 5.9 Diagrama de estabilidad de una barra en voladizo con imperfecciones geométricas.

5.2.3 Estados de flexo-compresión

En las secciones anteriores se han estudiado elementos sometidos a cargas axiales que provocan estados de compresión y de flexión, dependiendo éste último de la excentricidad de la carga o de las imperfecciones de la barra. A continuación se analiza la respuesta de la barra en voladizo solicitada por un par de fuerzas: una fuerza axial p y otra transversal F (Figura 5.10).

En este caso, el equilibrio de momentos en una sección determinada está definido por el momento asociado a los efectos de segundo orden de la carga p más el momento producido por la fuerza transversal F :

$$EIy'' = p(\delta - y) + F(L - x) \quad (5.32)$$

Esta expresión se reescribe de forma análoga a lo hecho en los apartados anteriores como:

$$y'' + a^2y = a^2\delta + \frac{F}{EI}(L - x) \quad (5.33)$$

La solución homogénea de la ecuación diferencial es de la forma $y^H = c_1 \cos(ax) + c_2 \sin(ax)$. La solución particular será un polinomio del mismo orden que el término

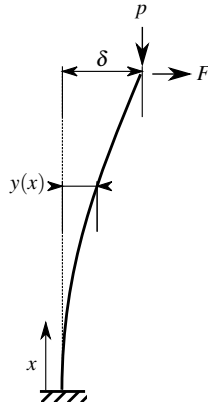


Figura 5.10 Deformada de la viga-columna.

independiente, $y^P = b_0 + b_1x$. Los coeficientes del polinomio se calculan sustituyendo en la Ecuación (5.33):

$$a^2(b_0 + b_1x) = \left(a^2\delta + \frac{FL}{EI}\right) - \frac{F}{EI}x \quad (5.34)$$

En esta expresión cada potencia de x plantea una ecuación para identificar los coeficientes del polinomio de la solución particular:

$$b_0 = \delta + \frac{FL}{a^2EI} = \delta + \frac{FL}{p} \quad (5.35)$$

$$b_1 = -\frac{F}{a^2EI} = -\frac{F}{p} \quad (5.36)$$

Por tanto, la ecuación de la deformada del problema de la viga-columna será la suma de la solución homogénea y la solución particular:

$$y(x) = c_1 \cos(ax) + c_2 \sin(ax) + \delta + \frac{FL}{p} - \frac{F}{p}x \quad (5.37)$$

Las constantes de integración se obtienen imponiendo las condiciones de contorno en el empotramiento, obteniéndose:

$$c_1 = -\left(\delta + \frac{FL}{p}\right) \quad (5.38)$$

$$c_2 = \frac{F}{ap} \quad (5.39)$$

La ecuación de la deformada de la viga-columna se obtiene sustituyendo estas constantes en la Ecuación (5.33):

$$y(x) = \left(\delta + \frac{FL}{p} \right) (1 - \cos(ax)) + \frac{F}{ap} \sin(ax) - \frac{F}{p}x \quad (5.40)$$

Esta expresión particularizada para $F = 0$ coincide con la ecuación de la barra en voladizo que se ha deducido en la Sección 5.2.

La carga crítica de la viga columna se obtiene a partir del valor de la flecha en el extremo libre de la barra, es decir, igualando $y(x = L) = \delta$:

$$\delta = \left(\delta + \frac{FL}{p} \right) (1 - \cos(aL)) + \frac{F}{ap} \sin(aL) - \frac{F}{p}L \quad (5.41)$$

Y, simplificando:

$$\delta = \frac{\frac{F}{ap} \sin(aL) - \frac{F}{p} \cos(aL)}{\cos(aL)} \quad (5.42)$$

Esta expresión muestra que el valor de la flecha aumenta a medida que el denominador disminuye, es decir, cuando el valor de a tiende a $(2n + 1)\pi/2L$, correspondiéndose el caso $n = 0$ con el valor de la carga crítica de la barra en voladizo:

$$p_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L} \quad (5.43)$$

En la Figura 5.11 se representa la flecha adimensionalizada δ/L frente a la relación de la carga p/p_{cr} para distintos valores de F . Los resultados obtenidos son similares a los calculados para la barra con imperfecciones geométricas. En efecto, la fuerza F produce una deformada de primer orden sobre la que actúa la carga axial p . Todas las curvas representadas tienen un valor inicial para $p = 0$ correspondiente a la flecha de una viga en voladizo $\delta_0 = FL^3/3EI$. Posteriormente, la deflexión del elemento aumenta rápidamente cuando la fuerza p tiende asintóticamente a la carga crítica.

5.2.4 Influencia de las condiciones de apoyo

El cálculo de la carga crítica de pandeo realizado en las secciones anteriores se puede generalizar para diferentes condiciones de contorno en los extremos del elemento. En general, una combinación arbitraria de condiciones de apoyo se pueden sustituir por las fuerzas de reacción producidas por la acción de la carga p (Figura 5.12): en el extremo i aparecen un momento flector M_i y una fuerza transversal Q_i y, análogamente, en el extremo j se tiene M_j y Q_j . La fuerza p produce una compresión uniforme en toda la barra del mismo valor de acción y, además, como el esfuerzo cortante es uniforme se tiene que $Q_i = -Q_j$.

La ecuación de equilibrio en una sección de la barra es:

$$M + py + Q_i(L - x) - M_i = 0 \quad (5.44)$$

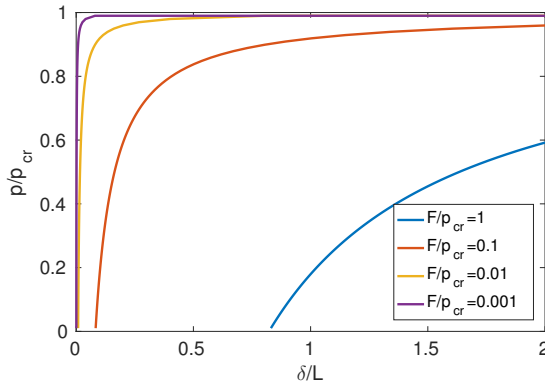


Figura 5.11 Diagrama de estabilidad de la viga-columna.

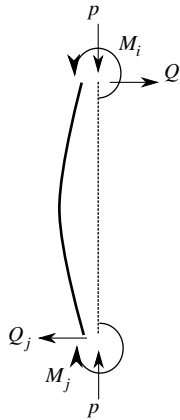


Figura 5.12 Problema general de pandeo de una barra.

En esta ecuación, sustituyendo la expresión del momento flector M , se tiene que:

$$y'' + a^2 y = \frac{M_i - Q_i(L-x)}{EI} \quad (5.45)$$

Derivando dos veces respecto a la coordenada x se obtiene la ecuación diferencial general de pandeo de barras:

$$y^{IV} + a^2 y'' = 0 \quad (5.46)$$

Esta expresión es una ecuación diferencial ordinaria lineal de coeficientes constantes de cuarto orden. Este tipo de ecuaciones admite una solución del tipo $y(x) = \exp(kx)$. El

polinomio característico se obtiene sustituyendo esta solución en la ecuación anterior:

$$k^4 + a^2 k^2 = 0 \quad (5.47)$$

El polinomio tiene una raíz doble en $k = 0$ y dos raíces complejas conjugadas $k = \pm ai$. Por tanto, la ecuación general de la deformada de una barra es:

$$y(x) = c_1 \cos(ax) + c_2 \sin(ax) + c_3 + c_4 x \quad (5.48)$$

Los coeficientes c_1, c_2, c_3 y c_4 se determinan imponiendo las condiciones de contorno en los extremos de la barra. La aplicación de estas condiciones se impondrán en desplazamientos ($y(\bar{x}) = \bar{y}$), giros ($y'(\bar{x}) = \bar{y}'$), momento flector ($y''(\bar{x}) = \bar{y}''$) y esfuerzo cortante ($y'''(\bar{x}) = \bar{y}'''$). Las correspondientes derivadas son:

$$y'(x) = -ac_1 \sin(ax) + ac_2 \cos(ax) + c_4 \quad (5.49)$$

$$y''(x) = -a^2 c_1 \cos(ax) - a^2 c_2 \sin(ax) \quad (5.50)$$

$$y'''(x) = a^3 c_1 \sin(ax) - a^3 c_2 \cos(ax) \quad (5.51)$$

A continuación se estudian las configuraciones más comunes que se pueden encontrar en barras sometidas a compresión (ver Figura 5.13).

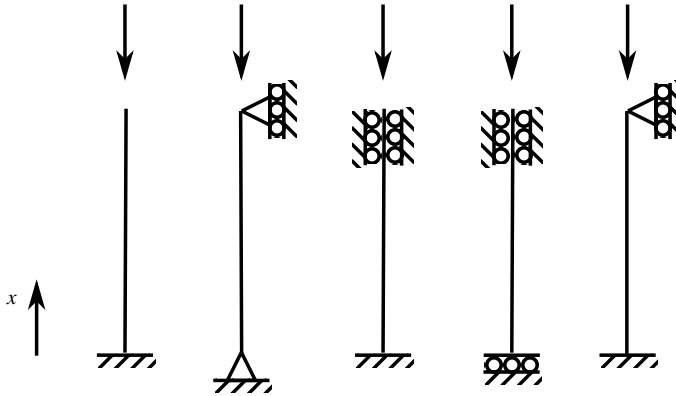


Figura 5.13 Barras con diferentes condiciones de contorno (de izq. a dcha.): empotrada-libre, apoyada-apoyada, empotrada-empotrada, empotrada-empotrada con deslizamiento horizontal, empotrada-articulada.

Barra empotrada-libre Este es el caso estudiado en los apartados anteriores. Imponiendo que el cortante en el extremo empotrado es nulo, $y'''(0) = 0$, se obtiene que $c_2 = 0$. La condición de momento nulo en el extremo libre, $y''(L) = 0$, implica que $\cos(aL) = 0$, es decir, que $p_{cr} = \pi^2 EI / 4L$.

Barra apoyada-apoyada Se puede comprobar que imponiendo que el cortante es nulo en los extremos de la barra, $y'''(0) = 0$ e $y'''(L) = 0$, se llega a que $\sin(aL) = 0$ y, por tanto, que la carga crítica es $p_{cr} = \pi^2 EI / L^2$. Este valor se define como la *carga crítica de Euler* p_{cr}^E .

Barra empotrada-empotrada Esta configuración de apoyos conlleva que en los extremos el desplazamiento, el giro y el esfuerzo cortante son nulos, y que el momento en toda la barra es constante de valor M_0 . Imponiendo estas condiciones en $x = 0$ se obtiene fácilmente que $y(x) = M_0(1 - \cos(ax))/P$. La carga crítica se obtiene al evaluar la expresión anterior en el extremo $x = L$, es decir, $y(L) = 0$. Esta condición se cumple si $\cos(aL) = 1$, obteniéndose que $p_{cr} = 4\pi^2 EI / L^2$.

Barra empotrada-empotrada con deslizamiento La carga crítica se puede deducir imponiendo que el esfuerzo cortante y el giro en $x = 0$ son nulos, obteniéndose que $c_2 = 0$ y $c_4 = 0$, y que el giro en $x = L$ también es nulo. Esta última condición se cumple si $\sin(aL) = 0$, siendo entonces la carga crítica $p_{cr} = \pi^2 EI / L^2$.

Barra empotrada-articulada Imponiendo que el desplazamiento y el giro son nulos en $x = 0$, y que el desplazamiento y el momento flector se anulan en $x = L$ se obtiene que las condiciones de contorno en $x = 0$ que $p_{cr} \simeq 2.04\pi^2 EI / L^2$.

5.2.5 Longitud equivalente de pandeo. La curva Euler

Los resultados de la sección anterior muestran que la carga crítica de un elemento se puede expresar de forma general como:

$$p_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_k^2} \quad (5.52)$$

donde L_k se denomina *longitud equivalente de pandeo*. Este parámetro hace referencia a la longitud que debería tener una barra de longitud L con unas condiciones de contorno determinadas para que la carga crítica coincidiera con la carga crítica de Euler p_{cr}^E .

Esta longitud se interpreta geométricamente como la distancia entre puntos de inflexión en un elemento comprimido o, equivalentemente, puntos de momento nulo. Es evidente que en una barra articulada-articulada $L_k = L$, mientras que en una barra empotrada-libre el punto de momento nulo se da en el extremo libre por lo que aplicando simetría se obtendrá que $L_k = 2L$. La longitud de pandeo se puede escribir también en función de un parámetro adimensional β como $L_k = \beta L$, que depende únicamente de las condiciones de contorno. La carga crítica de pandeo puede escribirse también como:

$$p_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\beta L)^2} \quad (5.53)$$

La Figura 5.14 muestra la longitud equivalente y el valor equivalente para cada uno de los casos estudiados en la sección anterior.

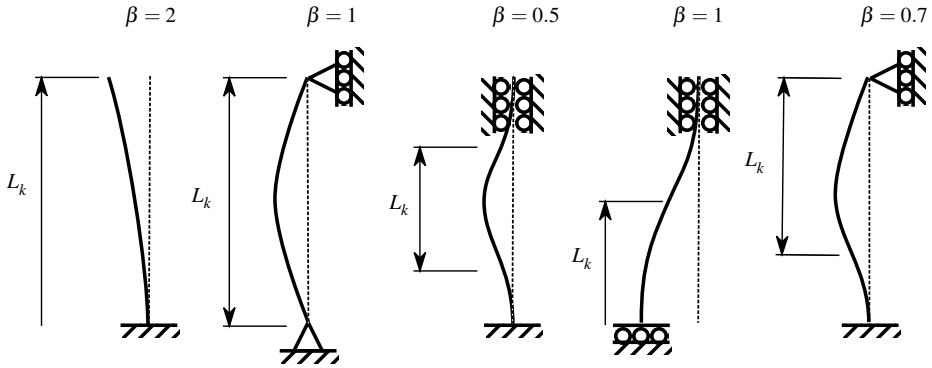


Figura 5.14 Longitud equivalente de una barra comprimida con condiciones de contorno (de izq. a dcha.): empotrada-libre, apoyada-apoyada, empotrada-empotrada, empotrada-empotrada con deslizamiento horizontal, empotrada-articulada.

En el dimensionamiento de elementos sometidos a compresión se utiliza el concepto de tensión crítica, que se obtiene dividiendo la carga crítica por el área A de la sección transversal de la barra:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E(I/A)}{L_k^2} \quad (5.54)$$

La definición de la tensión crítica puede expresarse en función del radio de giro ($r^2 = I/A$) de la sección:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E r^2}{L_k^2} = \frac{\pi^2 E}{(L_k/r)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (5.55)$$

siendo λ la esbeltez de la barra, que relaciona la longitud y el radio de giro.

La *curva de pandeo Euler* es la representación de la tensión crítica frente a la esbeltez de la barra (Figura 5.15). La curva de Euler proporciona el valor de la tensión que produce la inestabilidad de la barra. Está definida por el módulo de elasticidad del material y es independiente del límite elástico de éste. En piezas con valores elevados de λ la tensión crítica es muy pequeña, lo que indica que un elemento comprimido muy esbelto pandea para una tensión muy pequeña. Por ejemplo, en estructuras metálicas este efecto no puede evitarse empleando aceros de alta resistencia, ya que la curva de Euler sólo depende del módulo de Young.

Para incrementar la tensión crítica de un elemento es necesario aumentar la inercia y el radio de giro, sin aumentar el área de la sección. En piezas poco esbeltas aumenta la tensión crítica y, a partir de una cierta esbeltez, el fallo se produce por el agotamiento de la sección. Por tanto, la curva de Euler se completa con una recta horizontal dada por el límite elástico σ_y del material en el rango de esbeltez en el que $\sigma_{cr} > \sigma_y$.

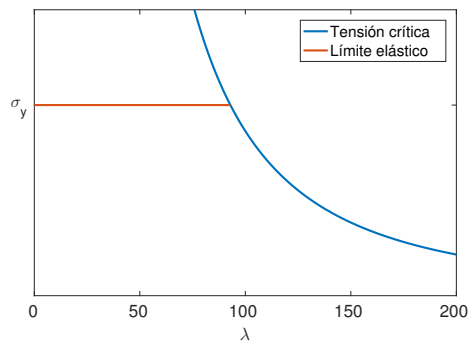


Figura 5.15 Curva de Euler de barras sometidas a compresión de acero S260.

5.3 Pandeo global de estructuras

5.3.1 Equilibrio elemental: matriz rigidez geométrica

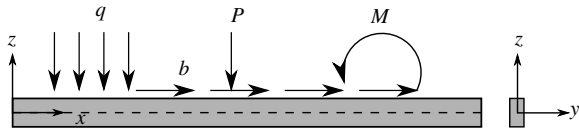


Figura 5.16 Barra sometida una serie de cargas y momentos.

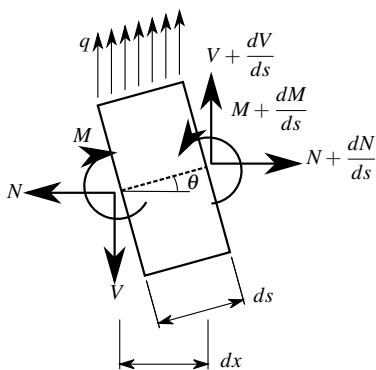


Figura 5.17 Equilibrio de la rebanada en la posición deformada.

A continuación, se estudia el comportamiento de un elemento barra sometido a una serie de cargas (Figura 5.16). En la Figura 5.17 se representan las fuerzas y momentos

que actúan sobre un elemento diferencial de la barra. El equilibrio de fuerzas y momento establece que:

$$-Nds + \left(N + \frac{dN}{ds}\right)ds - bds = 0 \quad (5.56)$$

$$-Vds + \left(V + \frac{dV}{ds}\right)ds + qds = 0 \quad (5.57)$$

$$-Mds + \left(M + \frac{dM}{ds}\right)ds + Vds \cos(\theta) - Nds \sin(\theta) - qds \frac{ds}{2} \cos(\theta) - bds \frac{ds}{2} \sin(\theta) = 0 \quad (5.58)$$

Las ecuaciones de equilibrio se simplifican despreciando términos de orden superior⁵ y linealizando entorno a $\theta = 0$ ⁶:

$$\frac{dN}{dx} = b \quad (5.59)$$

$$\frac{dV}{dx} = -q \quad (5.60)$$

$$V = N \frac{dy}{dx} - \frac{dM}{dx} \quad (5.61)$$

La primera ecuación establece que el axil es constante en la barra, siempre que no existan cargas aplicadas a lo largo de ella. Sustituyendo la expresión de equilibrio de momentos en la segunda ecuación se obtiene que:

$$N \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^2M}{dx^2} = -q \quad (5.62)$$

Esta ecuación puede escribirse también, suponiendo que todas las cargas actúan en los nodos del elemento y que $p = -N$, como:

$$y^{IV} + a^2 y'' = 0 \quad (5.63)$$

La ecuación de equilibrio deducida a partir del equilibrio elemental es idéntica a la que se obtuvo en la Sección 5.2.4. La solución de esta ecuación está dada por:

$$y(x) = c_1 \cos(ax) + c_2 \sin(ax) + c_3 + c_4 x \quad (5.64)$$

Las constantes c_1 , c_2 , c_3 , y c_4 se calculan de forma genérica a partir de las condiciones de contorno en $x = 0$ y $x = L$:

⁵ El término de orden superior ds^2 se pueden despreciar en el cálculo infinitesimal respecto a ds .

⁶ La hipótesis de que el ángulo girado es pequeño posibilita aproximar $\cos(\theta) = 1$, $\sin(\theta) = \theta = dy/dx$, y $ds = dx$.

$$y(0) = \delta_i = c_1 + c_3 \quad (5.65)$$

$$y'(0) = \theta_i = ac_2c_4 \quad (5.66)$$

$$y(L) = \delta_j = c_1 \cos(aL) + c_2 \sin(aL) + c_3 + c_4L \quad (5.67)$$

$$y'(L) = \theta_j = -c_1a \sin(aL) + c_2a \cos(aL) + c_4 \quad (5.68)$$

Despejando, se obtienen las siguientes expresiones:

$$c_1 = \frac{1}{\Delta} \left[(-1 + \cos(aL)) (\delta_j - \delta_i - \theta_i L) + \frac{1}{a} (aL - \sin(aL)) (\theta_j - \theta_i) \right] \quad (5.69)$$

$$c_2 = \frac{1}{\Delta} \left[\sin(aL) (\delta_j - \delta_i - \theta_i L) + \frac{1}{a} (-1 + \cos(aL)) (\theta_j - \theta_i) \right] \quad (5.70)$$

$$c_3 = \delta_i - c_1 \quad (5.71)$$

$$c_4 = \theta_i - ac_2 \quad (5.72)$$

siendo $\Delta = 2(1 - \cos(aL)) - aL \sin(aL)$.

El valor del esfuerzo flector en los extremos del elemento se calcula derivando la solución de la deformada, $M = EIy''$:

$$M_i = C_1 \frac{EI}{L^2} (\delta_i - \delta_j) + \frac{EI}{L} (C_2 \theta_i + C_3 \theta_j) \quad (5.73)$$

$$M_j = C_1 \frac{EI}{L^2} (\delta_i - \delta_j) + \frac{EI}{L} (C_3 \theta_i + C_2 \theta_j) \quad (5.74)$$

El esfuerzo cortante se obtiene de la Ecuación (5.61) de equilibrio particularizada en cada extremo:

$$V_i = C_4 \frac{EI}{L^3} (\delta_i - \delta_j) + C_1 \frac{EI}{L^2} (\theta_i + \theta_j) \quad (5.75)$$

$$V_j = C_4 \frac{EI}{L^3} (\delta_j - \delta_i) - C_1 \frac{EI}{L^2} (\theta_i + \theta_j) \quad (5.76)$$

Los términos C_1 , C_2 , C_3 y C_4 reciben el nombre de *funciones de estabilidad* y sus expresiones son:

$$C_1 = \frac{a^2 L^2 (1 - \cos(aL))}{\Delta} \quad (5.77)$$

$$C_2 = \frac{aL \sin(aL) - a^2 L^2 \cos(aL)}{\Delta} \quad (5.78)$$

$$C_3 = \frac{a^2 L^2 - aL \sin(aL)}{\Delta} \quad (5.79)$$

$$C_4 = \frac{a^3 L^3 \sin(aL)}{\Delta} \quad (5.80)$$

La funciones de estabilidad definen la pérdida de rigidez a flexión del elemento cuando está sometido a un esfuerzo axial de compresión p . En la Figura 5.18 se representan estas funciones frente a $(aL/\pi)^2 = pL^2/EI$. Se observan dos asíntotas para el valor límite de la carga $(aL/\pi)^2 = 4$ en el que no existe la solución del sistema, correspondiéndose con el valor de la carga crítica de la barra empotrada-empotrada.

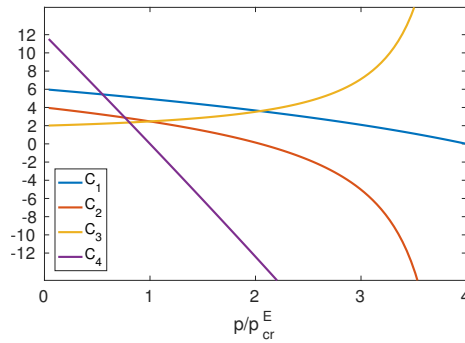


Figura 5.18 Funciones de estabilidad del elemento.

La expresiones de los esfuerzos pueden escribirse en forma matricial $\mathbf{p} = \mathbf{K}\boldsymbol{\delta}$ (Figura 5.19), junto la definición del esfuerzo axial:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & C_4 \frac{EI}{L^3} & C_1 \frac{EI}{L^2} & 0 & -C_4 \frac{EI}{L^3} & C_1 \frac{EI}{L^2} \\ 0 & C_1 \frac{EI}{L^2} & C_2 \frac{EI}{L} & 0 & -C_1 \frac{EI}{L^2} & C_3 \frac{EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -C_4 \frac{EI}{L^3} & -C_1 \frac{EI}{L^2} & 0 & C_4 \frac{EI}{L^3} & -C_1 \frac{EI}{L^2} \\ 0 & C_1 \frac{EI}{L^2} & C_3 \frac{EI}{L} & 0 & -C_1 \frac{EI}{L^2} & C_2 \frac{EI}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{pmatrix} \quad (5.81)$$

La matriz de rigidez $\mathbf{K}$ para un valor nulo del esfuerzo axial se corresponde con la definida en la teoría de primer orden. Se puede comprobar fácilmente observando que la representación de las funciones de estabilidad en $aL = 0$ toman el valor $C_1 = 6$, $C_2 = 4$, $C_3 = 2$, y $C_4 = 12$.

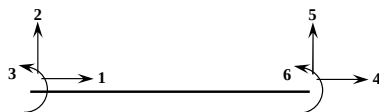


Figura 5.19 Elemento Plano con Nudos Rígidos en Coordenadas Locales.

El cálculo de los desplazamientos de una estructura constituye un problema no lineal ya que la matriz de rigidez K depende del axil al que están sometidos los elementos. Cuando se conoce p para todos los elementos de una estructura se puede definir un sistema de ecuaciones de la forma $\mathbf{f} = \mathbf{K}\mathbf{u}$. Sin embargo, no siempre será posible estimar el axil en todos los elementos de una estructura dado un estado de cargas exteriores. En estos casos será necesario resolver el problema empezando con el cálculo de los esfuerzos en régimen lineal y, posteriormente, hacer un proceso iterativo hasta alcanzar la convergencia de la solución.

El problema se simplifica considerablemente si se linealizan las funciones de estabilidad entorno a $p = 0$:

$$C_1 = 6 \left(1 - \frac{1}{60} \frac{pL^2}{EI} + \dots \right) \quad (5.82)$$

$$C_2 = 4 \left(1 - \frac{1}{30} \frac{pL^2}{EI} + \dots \right) \quad (5.83)$$

$$C_3 = 2 \left(1 + \frac{1}{60} \frac{pL^2}{EI} + \dots \right) \quad (5.84)$$

$$C_4 = 12 \left(1 - \frac{1}{10} \frac{pL^2}{EI} + \dots \right) \quad (5.85)$$

Entonces, la matriz de rigidez del elemento se puede expresar como $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 - p\mathbf{K}_G$, siendo $\mathbf{K}_0$ la matriz de rigidez de la teoría de primer orden y $\mathbf{K}_G$ se define como la *matriz de rigidez geométrica*:

$$\mathbf{K}_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} \frac{1}{L} & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{6}{5} \frac{1}{L} & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{2L}{15} & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{L}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} \frac{1}{L} & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{6}{5} \frac{1}{L} & -\frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & -\frac{L}{30} & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{2L}{15} \end{pmatrix} \quad (5.86)$$

Aunque la linealización de las funciones de estabilidad simplifica el análisis de una estructura en la teoría de segundo orden, aparecerán inexactitudes lejos del punto de linealización. En la Figura 5.20 se comparan las funciones de estabilidad y sus pares linealizados. Existe un buen grado de aproximación de las funciones linealizadas siempre

que el axil del elemento sea inferior a la carga crítica de Euler.

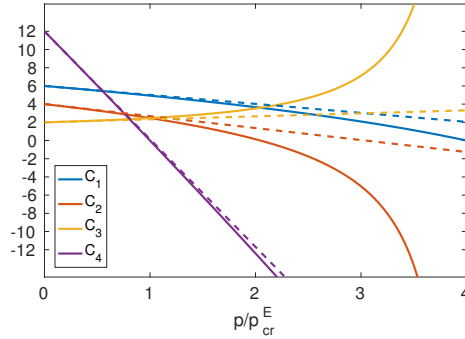


Figura 5.20 Funciones de estabilidad (líneas continuas) y funciones linealizadas (líneas discontinuas) del elemento.

Ejemplo 5.3.1 Para ilustrar el análisis de una estructura con la matriz de rigidez del elemento obtenida en esta sección se va a calcular la respuesta de una barra comprimida empotrada-libre. Además de la carga axial, se considera que actúa también transversalmente una perturbación δf que produce una deformación inicial que propicia el pandeo de la barra. Esta configuración es similar a la viga-columna estudiada en la Sección 5.2.3.

Los grados de libertad de la barra se corresponden con los desplazamientos y el giro del extremo libre. Una vez eliminadas las columnas de la matriz del elemento que multiplican a los términos que son nulos por condiciones de contorno se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} p \\ \delta f \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & C_4 \frac{EI}{L^3} & -C_1 \frac{EI}{L^2} \\ 0 & -C_1 \frac{EI}{L^2} & C_2 \frac{EI}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{pmatrix} \quad (5.87)$$

Asimismo, este sistema se puede linealizar de acuerdo a la definición de la matriz de rigidez:

$$\begin{pmatrix} p \\ \delta f \\ 0 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 12 \frac{EI}{L^3} & -6 \frac{EI}{L^2} \\ 0 & -6 \frac{EI}{L^2} & 4 \frac{EI}{L} \end{pmatrix} - p \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5L} & -\frac{1}{10} \\ 0 & -\frac{1}{10} & \frac{2L}{15} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{pmatrix} \quad (5.88)$$

La primera ecuación de ambos sistemas se encuentra desacoplada del resto y permite calcular el acortamiento de la barra. En el desplazamiento axial de la barra no aparecen efectos de segundo orden como se observa en las ecuaciones.

Las dos ecuaciones restantes proporcionan el desplazamiento transversal y el giro de la barra. Estas expresiones son no lineales, ya que los términos de la matriz de rigidez dependen del axil que producen las acciones externas. En este caso sencillo, el axil de la

barra es igual a la carga p , por lo que el sistema de ecuaciones puede resolverse fácilmente. También es importante observar que sin la perturbación δf , el desplazamiento transversal y el giro de la barra son nulos.

En la Figura 5.21 se compara el desplazamiento transversal de la barra calculado con los dos sistemas de ecuaciones. El grado de acuerdo entre ambos es bueno y puede concluirse en este caso que la linealización de la matriz de rigidez es adecuada para estudiar este problema.

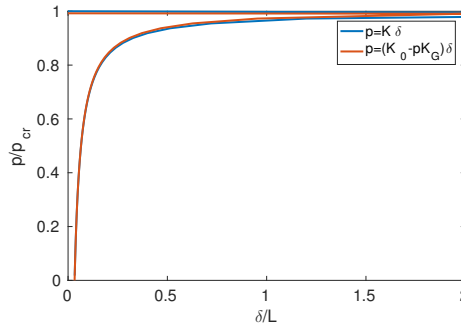


Figura 5.21 Funciones de estabilidad del elemento.

Sin embargo, puede comprobarse que el cálculo de los desplazamientos considerando diferentes configuraciones de apoyos puede diferir sustancialmente cuando se emplea la matriz de rigidez geométrica. Por ejemplo, una barra empotrada-articulada se puede modelizar como un sistema de un grado de libertad asociado al giro del extremo articulado, cuya ecuación de equilibrio es:

$$\delta M = C_2 \frac{EI}{L} \delta_6 = 4 \left(1 - \frac{1}{30} \frac{pL^2}{EI} \right) \frac{EI}{L} \delta_6 \quad (5.89)$$

donde, δM es el momento aplicado en la barra para producir una deformación que posibilite la inestabilidad de la barra. Puede comprobarse que la carga crítica de la barra calculada con la matriz de rigidez geométrica es un 50 % mayor que la obtenida teóricamente mediante la teoría de Euler. Este hecho se debe a la diferencia existente entre la función de estabilidad C_2 y su función linealizada. En general, los resultados son menos precisos si el sistema de ecuaciones incluyen términos que involucren a las funciones de estabilidad C_2 y C_3 .

5.3.2 Cálculo de la estructura. Factor de pandeo

En las secciones anteriores se ha abordado el problema de la inestabilidad de elementos aislados, identificando la influencia de las condiciones de contorno y las propiedades que definen la carga crítica de pandeo. Por ejemplo, en la viga-columna se ha comprobado que el fenómeno de inestabilidad de una barra sometida a compresión simple es distinto si actúa conjuntamente una fuerza transversal.

En estructuras más complejas el cálculo de la carga crítica que produce el pandeo global de una estructura es más complejo. El procedimiento para formular el sistema de ecuaciones de la estructura $\mathbf{f} = \mathbf{K}\mathbf{u}$ es similar al seguido en la teoría de primer orden.

La matriz de rigidez global se obtiene a partir de las matrices de cada elemento de la discretización de la estructura, pero en la teoría de segundo orden es necesario conocer el valor del axil en cada elemento para calcular la matriz de rigidez geométrica.

En general, no es posible conocer a priori el axil en cada barra para montar el sistema de ecuaciones de la estructura. Una buena aproximación es hacer un cálculo preliminar de la estructura en primer orden y con los esfuerzos obtenidos para cada elemento hacer un nuevo cálculo incluyendo los efectos de segundo orden. Este procedimiento es iterativo y en cada nuevo paso se utilizan los esfuerzos obtenidos en el paso anterior, hasta que el axil y los desplazamientos obtenidos convergen. Este proceso puede llegar a ser muy complejo y computacionalmente costoso dependiendo del tipo de estructura y de las acciones externas.

El pandeo global de una estructura supone un estado límite último en el que se pierde la capacidad portante. Por esta razón, el objetivo del cálculo de una estructura no es conocer los desplazamientos y esfuerzos en la configuración de cargas que produce el colapso, sino estimar el margen de seguridad que hay antes de que se produzca el pandeo global de la estructura en un determinado estado de carga. Por tanto, el cálculo de la estructura se aborda identificando un factor Γ por el que hay que multiplicar las fuerzas $\mathbf{f}$ para alcanzar la inestabilidad del sistema. Este factor se denomina el *factor de pandeo*.

Este análisis empieza con el cálculo del axil de cada elemento mediante un análisis lineal de la estructura. Una vez calculados, se puede escribir el sistema de ecuaciones:

$$\mathbf{f} = (\mathbf{K}_0 - \mathbf{K}_G)\mathbf{u} \quad (5.90)$$

donde, la matriz de rigidez geométrica $\mathbf{K}_G$ se calcula teniendo en cuenta el axil de cada elemento. Si se asume que al aumentar las acciones externas multiplicando todas por un factor Γ el axil de cada elemento se incrementa en la misma proporción, entonces se puede afirmar que:

$$\Gamma \mathbf{f} = (\mathbf{K}_0 - \Gamma \mathbf{K}_G)\mathbf{u} \quad (5.91)$$

Esta aproximación no es real en segundo orden ya que no existe una relación lineal entre las fuerzas y los desplazamientos de la estructura, ni entre las fuerzas y los esfuerzos. Es decir, para realizar esta hipótesis hay que suponer una linealización de estas relaciones.

El factor de pandeo que produce la inestabilidad de la estructura es aquel que dada una pequeña perturbación de la fuerza $\delta \mathbf{f}$ produce un desplazamiento no acotado o, equivalentemente, aquel que hace que la rigidez de la estructura sea nula. Esta condición se alcanza cuando la matriz de rigidez es singular y define un problema de valores propios:

$$|\mathbf{K}_0 - \Gamma \mathbf{K}_G| = 0 \quad (5.92)$$

Los autovalores de este problema se corresponden con los factores de pandeo Γ que producen el fallo de la estructura. El autovalor más bajo se define como el *factor crítico de pandeo* Γ_{cr} . El autovector ϕ asociado a este autovalor es el modo, o la forma, en la que pande la estructura.

Ejemplo 5.3.2 Considerar el problema de la viga-columna de la Sección 5.2.3 y calcular el valor de la carga p que produce el pandeo cuando actúa simultáneamente una fuerza

$f = 10\text{ kN}$. La longitud de la barra es $L = 5\text{ m}$, las propiedades del elemento son área $A = 0.01\text{ m}^2$ e inercia $I = 10^{-4}\text{ m}^4$, y el material es acero con un módulo de elasticidad $E = 210\text{ GPa}$.

La resolución de este problema se puede abordar calculando el factor de pandeo crítico cuando el valor de p es la unidad. La carga crítica se corresponderá con $p_{cr} = \Gamma p = \Gamma$. El sistema de ecuaciones que gobierna el comportamiento de la barra es similar al del Ejemplo 5.3.1:

$$\begin{pmatrix} p \\ f \\ 0 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 12\frac{EI}{L^3} & -6\frac{EI}{L^2} \\ 0 & -6\frac{EI}{L^2} & 4\frac{EI}{L} \end{pmatrix} - p \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5L} & -\frac{1}{10} \\ 0 & -\frac{1}{10} & \frac{2L}{15} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{pmatrix} \quad (5.93)$$

Para calcular la carga crítica hay que resolver el problema de autovalores $|\mathbf{K}_0 - \Gamma \mathbf{K}_G| = 0$:

$$\left| \begin{pmatrix} 12\frac{EI}{L^3} & -6\frac{EI}{L^2} \\ -6\frac{EI}{L^2} & 4\frac{EI}{L} \end{pmatrix} - \Gamma \begin{pmatrix} \frac{6}{5L} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{2L}{15} \end{pmatrix} \right| = 0 \quad (5.94)$$

Resolviendo, se obtiene que $\Gamma = \{2.09, 2.71\} \times 10^6\text{ N}$. El primer autovalor es el factor crítico de pandeo, por lo que la carga crítica de pandeo es $p_{cr} = \Gamma_{cr} p = \Gamma_{cr}$. La carga crítica exacta de este problema según la teoría de Euler es $p_{cr} = 2.09 \times 10^6\text{ N}$.

5.4 Formulación del MEF

En esta sección se presenta la formulación del MEF para resolver el problema de barras sometidas a flexión y compresión, teniendo en cuenta las hipótesis de la teoría de Euler-Bernoulli (E-B). Se considera una viga de longitud L , sección transversal A e inercia I , sobre la que actúa una serie de cargas y momentos contenidos en el plano xz (Figura 5.16).

El PTV para la barra se escribe, teniendo en cuenta las Ecuaciones 5.61, como:

$$\int \frac{dN}{dx} \delta u dx - \int \frac{d^2 M}{dx^2} \delta w dx + \int N \frac{d^2 w}{dx^2} \delta w dx = \int_{x_1}^{x_2} \delta u b dx - \int_{x_1}^{x_2} \delta w q dx \quad (5.95)$$

donde q y b son las fuerzas repartidas. El primer miembro de la Ecuación (5.95), que representa el trabajo interno, se simplifica integrando varias veces por partes:

$$-\int \frac{d^2 M}{dx^2} \delta w dx = \frac{dM_{x_1}}{dx} \delta w_{x_1} - \frac{dM_{x_2}}{dx} \delta w_{x_2} + \int \frac{dM}{dx} \delta \left(\frac{dw}{dx} \right) dx \quad (5.96)$$

$$\int \frac{dM}{dx} \delta \left(\frac{dw}{dx} \right) dx = M_{x_2} \delta \left(\frac{dw_{x_2}}{dx} \right) - M_{x_1} \delta \left(\frac{dw_{x_1}}{dx} \right) - \int M \delta \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right) dx \quad (5.97)$$

$$-\int \frac{d^2 M}{dx^2} \delta w dx = \frac{dM_{x_1}}{dx} \delta w_{x_1} - \frac{dM_{x_2}}{dx} \delta w_{x_2} + M_{x_2} \delta \left(\frac{dw_{x_2}}{dx} \right) - M_{x_1} \delta \left(\frac{dw_{x_1}}{dx} \right) - \int M \delta \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right) dx \quad (5.98)$$

$$\int \frac{dN}{dx} \delta u dx = N_{x_2} \delta u_{x_2} - N_{x_1} \delta u_{x_1} - \int N \delta \left(\frac{du}{dx} \right) dx \quad (5.99)$$

$$\int \frac{dN}{dx} \delta u dx = X_{x_2} \delta u_{x_2} - X_{x_1} \delta u_{x_1} - \int EA \frac{du}{dx} \delta \left(\frac{du}{dx} \right) dx \quad (5.100)$$

$$\int N \frac{d^2 w}{dx^2} \delta w dx = N_{x_2} \delta \left(\frac{dw_{x_2}}{dx} \right) du_{x_2} - N_{x_1} \delta \left(\frac{dw_{x_1}}{dx} \right) du_{x_1} - \int \frac{dN}{dx} \frac{dw}{dx} \delta w dx - \int N \frac{dw}{dx} \delta \left(\frac{dw}{dx} \right) dx \quad (5.101)$$

Finalmente, usando las Ecuaciones 5.96-5.96, la Ecuación 5.95 se escribe como:

$$\begin{aligned} & \int \frac{du}{dx} EA \delta \left(\frac{du}{dx} \right) dx + \int M \delta \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right) dx + \int \frac{dw}{dx} N \delta \left(\frac{dw}{dx} \right) dx + \int \frac{dN}{dx} \frac{dw}{dx} \delta w dx = \\ & \int \delta u b dx - \int \delta w q dx + \sum_{i=1}^r \delta u_i X_i + \sum_{i=1}^s \delta \theta_i M_i + \sum_{i=1}^t \delta w_i Z_i \end{aligned} \quad (5.102)$$

donde $Z_i = N_i \frac{dw_i}{dx} - \frac{dM_i}{dx}$ son las fuerzas verticales aplicadas en los extremos del elemento y $N = EA \frac{du}{dx}$.

La Ecuación 5.102 es idéntica a la obtenida en la formulación de primer orden en el capítulo 3, excepto porque aparecen los dos últimos términos del primer miembro. Si se formula el MEF usando las mismas funciones de forma empleadas en la formulación de primer orden, el término $\int \frac{dN}{dx} \frac{dw}{dx} \delta w dx$ desaparece, al ser las funciones de forma que aproximan el problema axial lineales. De este modo, la única diferencia en la formulación del MEF obtenida a partir del PTV es el término $\int \frac{dw}{dx} N \delta \left(\frac{dw}{dx} \right) dx$.

Introduciendo la discretización de los desplazamientos u y w en el PTV planteado en el elemento barra, se obtiene:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K} \mathbf{a} \quad (5.103)$$

donde la matriz de rigidez elemental es:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 - P \mathbf{K}_G \quad (5.104)$$

donde P es el axil del elemento (positivo si es de compresión), $\mathbf{K}_0$ es la matriz de rigidez de primer orden y $\mathbf{K}_G$ es la matriz de rigidez geométrica, definida a partir de las funciones de forma usadas para aproximar el campo de desplazamiento w :

$$K_G^{ij} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} dx \quad (5.105)$$

La matriz geométrica del elemento de E-B resulta:

$$\mathbf{K}_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} \frac{1}{L} & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{6}{5} \frac{1}{L} & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{2L}{15} & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{L}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} \frac{1}{L} & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{6}{5} \frac{1}{L} & -\frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & -\frac{L}{30} & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{2L}{15} \end{pmatrix} \quad (5.106)$$

que coincide con la presentada en la Ecuación 5.86.

Una vez obtenida la matriz de rigidez elemental, la resolución del problema se lleva acabo según lo presentado en la Sección 5.4.

5.5 Problemas propuestos

5.1 En la Figura 5.22 se representa de forma esquemática un pórtico de una estructura sometido a una carga uniformemente distribuida q , en el que las uniones entre las barras son rígidas y la base de los pilares tienen impedidos todos los desplazamientos. Así mismo, se puede asumir que los desplazamientos y giros fuera del plano están impedidos, es decir, que la estructura es plana. La inercia de los pilares es $I_p = 8356 \text{ cm}^4$ y la inercia de la viga es $I_v = 3892 \text{ cm}^4$. El material de la estructura es acero con un valor del módulo de Young $E = 210 \text{ GPa}$.

1. Representar la forma del primer modo de pandeo de la estructura considerando un comportamiento *translacional e intranslacional* de la estructura. Discutir las diferencias entre ambos.
2. El factor crítico de pandeo de la estructura considerando un comportamiento *translacional* es $\Gamma_{cr} = 25$. Calcular la carga crítica q_{cr} que produce el pandeo de la estructura y la longitud equivalente de pandeo de los pilares y de la viga, así como el parámetro β de cada uno de ellos.
3. El factor crítico de pandeo de la estructura considerando un comportamiento *intranslacional* es $\Gamma_{cr} = 48.75$. Calcular la carga crítica q_{cr} que produce el pandeo de la estructura y la longitud equivalente de pandeo de los pilares y de la viga, así como el parámetro β de cada uno de ellos.
4. Discutir de forma razonada los valor límites de la longitud equivalente de pandeo de los pilares y de la viga en el caso intraslacional de acuerdo a las rigidez relativa entre ambos.

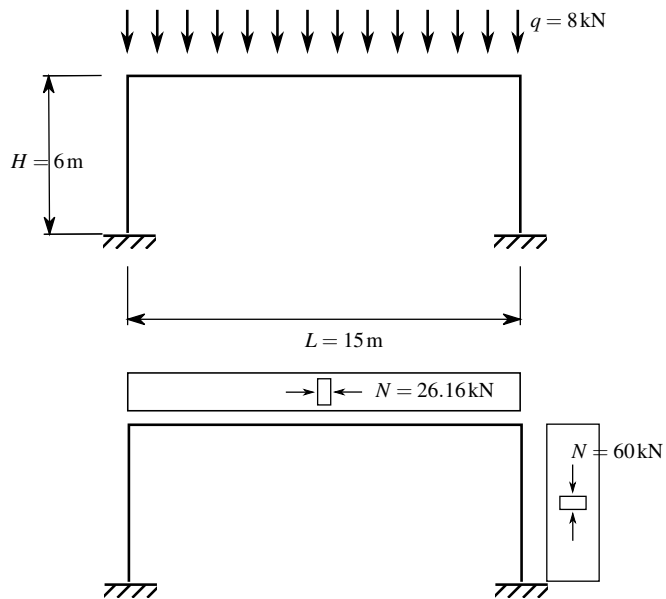


Figura 5.22 Definición de la estructura y esfuerzos.

6 Análisis dinámico de sistemas de un grado de libertad

6.1 Introducción

En este capítulo se estudia la respuesta de estructuras sometidas a cualquier tipo de condiciones que varían a lo largo del tiempo. La variación de las cargas con el tiempo puede ser periódica (sigue la misma variación durante un número determinado de ciclos de carga) o no periódica (por ejemplo, una carga impulsiva).

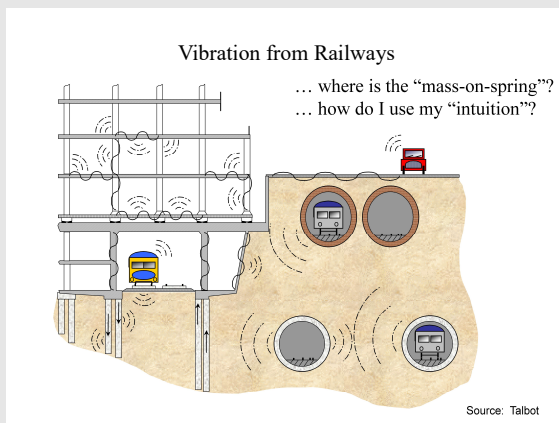
El estudio dinámico de una estructura se diferencia del estático en que todas las variables del problema (desplazamientos, esfuerzos, tensiones, etc.) son funciones del tiempo. Además, y más importante, el estudio dinámico requiere la consideración de las fuerzas de inercia (de signo contrario a la aceleración que produce la carga aplicada) en la ecuación de equilibrio de fuerzas y momentos. Realmente la estática es una simplificación del estudio dinámico donde se supone que la variación de los desplazamientos a lo largo del tiempo es despreciable.

¿Qué tienen en común un depósito elevado de agua, un *Chupa Chups* y un sistema masa-muelle?

El comediante^a hace que se vea fácil crear un buen chiste. Hay que elegir un objetivo y luego buscar una manera de hacerlo gracioso de manera entretenida.

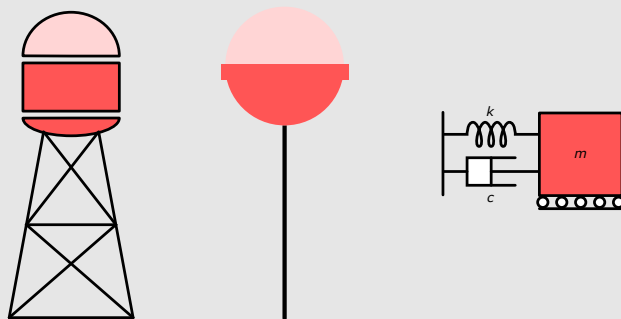
Hace unos años, el profesor Hugh Hunt de la Universidad de Cambridge proyectó en una conferencia la diapositiva titulada "*Las bases del sentido común*", en la que mostraba un modelo masa-muelle y, seguidamente, pasó a la siguiente diapositiva donde se representaba un problema complejo: una estructura, un sistema de cimentación mediante pilotes y cuatro túneles, que estaban vibrando a la vez a causa de tres

ferrocarriles y un coche. Aquella imagen motivaba dos preguntas: "¿...donde está el sistema *masa-muelle*?" y "¿...cómo uso mi *intuición*?"



Aquella diapositiva me pareció un buen chiste. Mis profesores me habían explicado que todas las estructuras *escondían* un modelo masa-muelle y, por entonces, me dispuse a observar las estructuras que encontraba a mi alrededor, pero o yo no había comprendido aquellas explicaciones, o los sistemas masa-muelle estaban muy bien escondidos. Ahora puedo ayudarlos con algunas pistas que nos permitan entender dónde se esconden realmente los sistemas masa-muelle.

Entonces, ¿qué tienen en común un depósito elevado de agua, un *Chupa Chups* y un sistema masa-muelle?



Para responder a esta pregunta se analizan cuales son las semejanzas y las diferencias entre ellos. En primer lugar, hay una masa no estructural muy localizada o concentrada en un punto, ya sea el agua, el caramelo o la masa m . También hay un elemento que soporta a esta masa: la estructura del depósito, el palo del *Chupa*

Chups o el resorte elástico k . Y, además, el movimiento de éstos se puede describir por el desplazamiento horizontal de la masa. Por tanto, es posible reducir el depósito elevado de agua a un *Chupa Chups*, donde el caramelo representa el volumen de agua y el palo se asemeja a la estructura soporte. Y, del mismo modo, podemos reducir el *Chupa Chups* a un sistema masa-muelle.

Las diferencias son obvias para mí: si me dan a elegir, me quedo con el *Chupa Chups* [...chiste malo].

En este capítulo, se analiza primero el comportamiento del sistema de un grado de libertad para sentar las bases que, posteriormente, permitirán el estudio dinámico de una estructura más compleja.

^a No confundir con el personaje de *Watchmen*, aunque recomiendo tanto el comic de Alan More como la película.

6.2 Ecuación de equilibrio de un sistema de un grado de libertad

La respuesta dinámica de un sistema estructural sujeto a una acción externa está determinada por la masa, la rigidez o la flexibilidad, y por la capacidad de disipar energía. La Figura 6.1 representa de forma esquemática un sistema de un grado de libertad. La masa total del sistema m se concentra en un punto que puede experimentar sólo una traslación $u(t)$ que define su posición. La rigidez del sistema que se opone a un cambio de posición se modeliza mediante un muelle con una constante elástica k , mientras que la pérdida de energía debida a los mecanismos de disipación está representada por un elemento amortiguador con una constante de amortiguamiento c . El sistema se encuentra excitado por una fuerza $p(t)$ que puede variar en el tiempo de forma arbitraria.

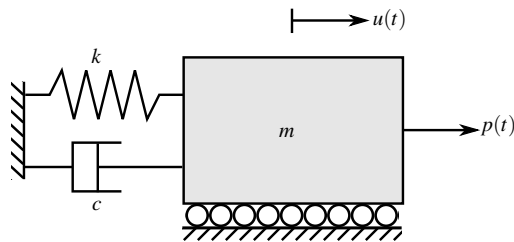


Figura 6.1 Representación de un sistema de un grado de libertad.

La ecuación de equilibrio del sistema permite formular una ecuación diferencial para representar el desplazamiento $u(t)$ que experimenta la masa m producido por la fuerza $p(t)$. Esta ecuación se formula a partir del equilibrio de fuerzas externas e internas que actúan sobre la masa m . En la Figura 6.2 se representan dos tipos de fuerzas: acciones externas, $p(t)$; y fuerzas internas, $f_m(t)$, $f_c(t)$ y $f_k(t)$.

Las fuerzas internas se corresponden con fuerzas que se oponen al movimiento debidas a:

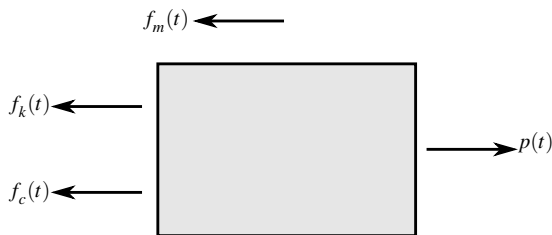


Figura 6.2 Equilibrio de fuerzas en un sistema de un grado de libertad.

- Fuerzas de inercia: $f_m(t) = m\ddot{u}(t)$. Son fuerzas proporcionales a la aceleración $\ddot{u}(t)$ y a la masa, que se oponen al movimiento del sistema.
- Fuerzas disipativas: $f_c(t) = c\dot{u}(t)$. Son fuerzas proporcionales a la velocidad $\dot{u}(t)$ que experimenta la masa m , provocando que la energía del sistema disminuya hasta alcanzar el reposo.
- Fuerzas elásticas: $f_k(t) = ku(t)$. Son fuerzas que se oponen al desplazamiento $u(t)$ que se produce respecto a la posición de reposo en ausencia de fuerzas dinámicas externas.

La ecuación de equilibrio de fuerzas externas e internas puede expresarse de la siguiente forma:

$$f_m(t) + f_c(t) + f_k(t) = p(t) \quad (6.1)$$

Esta ecuación puede desarrollarse introduciendo las expresiones de las fuerzas internas antes descritas, obteniéndose la siguiente expresión:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t) \quad (6.2)$$

La solución de la Ecuación (6.2) permite conocer en cada instante de tiempo t la posición de equilibrio del sistema. La solución se obtiene a partir de la suma de la solución homogénea y de la solución particular. Éstas pueden obtenerse analíticamente o bien mediante integración temporal.

6.3 Influencia de las fuerzas estáticas en la respuesta dinámica de una estructura

Si una estructura está sometida a fuerzas dinámicas $p(t)$ y estáticas F , la ecuación de equilibrio en relación a la posición de equilibrio de la estructura cuando no está solicitada por ninguna fuerza $u(t)$ es la siguiente (Figura 6.3):

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t) + F \quad (6.3)$$

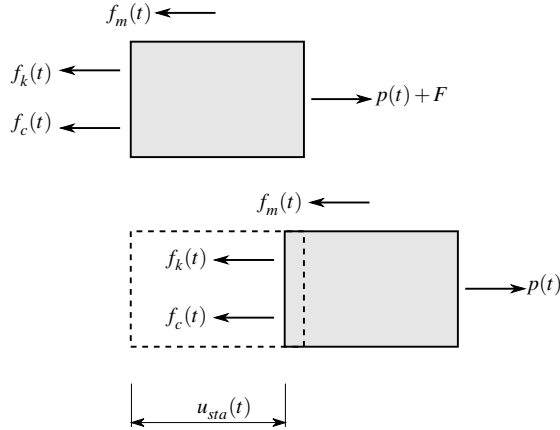


Figura 6.3 Influencia de las fuerzas estáticas en la respuesta dinámica de una estructura.

Teniendo en cuenta que la posición de equilibrio estático u_{sta} está definida por $F = ku_{sta}$, se obtiene sustituyendo en la ecuación anterior que:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t) + ku_{sta} \quad (6.4)$$

Si el desplazamiento total del sistema se descompone en $u(t) = \bar{u}(t) + u_{sta}$, y teniendo en cuenta que $\ddot{u}(t) = \ddot{\bar{u}}(t)$ y $\dot{u}(t) = \dot{\bar{u}}(t)$ ya que el desplazamiento estático no depende del tiempo, la ecuación de equilibrio se reescribe como:

$$m\ddot{\bar{u}}(t) + c\dot{\bar{u}}(t) + k\bar{u}(t) = p(t) \quad (6.5)$$

La Ecuación (6.5) implica que siempre que en un sistema existan cargas estáticas y dinámicas, ambos análisis, si son lineales, se pueden desarrollar de manera independiente y, a posteriori, aplicar superposición. La respuesta total del sistema se obtiene añadiendo la componente estática a la solución del problema dinámico.

6.4 Respuesta en vibración libre

A continuación se estudiará la solución homogénea del sistema de un grado de libertad. Esta solución se corresponde con el análisis de vibración libre, es decir, la evolución temporal de los desplazamientos en ausencia de fuerzas externas. La solución homogénea de la Ecuación (6.2) se obtiene haciendo nulo el término correspondiente a la acción que actúa sobre el sistema $p(t) = 0$:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0 \quad (6.6)$$

La definición del problema se completa imponiendo condiciones iniciales al desplazamiento, $u(0) = u_0$, y a la velocidad, $\dot{u}(0) = \dot{u}_0$.

La respuesta de la estructura obtenida de la Ecuación (6.6) se puede expresar de la siguiente forma:

$$u(t) = G \exp(st) \quad (6.7)$$

donde G es una constante arbitraria compleja y s es la variable de integración del polinomio característico. Sustituyendo la ecuación anterior en la Ecuación (6.6) se obtiene que:

$$(ms^2 + cs + k)G \exp(st) = 0 \quad (6.8)$$

Esta expresión se expresa dividiendo por la masa del sistema m como:

$$\left(s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}\right)G \exp(st) = 0 \quad (6.9)$$

Se define la frecuencia natural del sistema como la relación $\omega = \sqrt{k/m}$, siendo sus unidades rad/s. La expresión anterior se puede expresar también como:

$$\left(s^2 + \frac{c}{m}s + \omega^2\right)G \exp(st) = 0 \quad (6.10)$$

La Ecuación (6.11) tiene solución distinta de la trivial ($G = 0$) si:

$$s = \frac{-c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega^2} \quad (6.11)$$

En las siguientes secciones se estudia el comportamiento del en vibración libre de acuerdo a la naturaleza de las raíces del sistema.

6.4.1 Respuesta en vibración libre no amortiguada

El primer caso se corresponde con el sistema no amortiguado, es decir, $c = 0$. La Ecuación (6.11) tiene solución si:

$$s = \pm i\omega \quad (6.12)$$

La respuesta total de la estructura es:

$$u(t) = G_1 \exp(i\omega t) + G_2 \exp(-i\omega t) \quad (6.13)$$

siendo las constantes complejas arbitrarias: $G_1 = G_{1R} + iG_{1I}$ y $G_2 = G_{2R} + iG_{2I}$. Sustituyendo en la Ecuación (6.13) y teniendo en cuenta que $\exp(i\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$ y $\exp(-i\theta) = \cos \theta - i \sin \theta$ se obtiene:

$$u(t) = (G_{1R} + G_{2R}) \cos(\omega t) - (G_{1I} - G_{2I}) \sin(\omega t) + i[(G_{1I} + G_{2I}) \cos(\omega t) + (G_{1R} - G_{2R}) \sin(\omega t)] \quad (6.14)$$

Dado que la respuesta en vibración libre de la estructura debe ser real:

$$G_{1I} = -G_{2I} = G_I \quad (6.15)$$

$$G_{1R} = G_{2R} = G_R \quad (6.16)$$

y, por tanto, la Ecuación (6.14) se escribe como:

$$u(t) = 2G_R \cos(\omega t) - 2G_I \sin(\omega t) \quad (6.17)$$

$$= (G_R + iG_I) \exp(i\omega t) + (G_R - iG_I) \exp(-i\omega t) \quad (6.18)$$

Las constantes G_R y G_I se pueden determinar a partir de las condiciones iniciales $u(t=0) = u_0$ y $\dot{u}(t=0) = \dot{u}_0$ del problema, quedando la Ecuación (6.18) como sigue:

$$u(t) = u_0 \cos(\omega t) + \frac{\dot{u}_0}{\omega} \sin(\omega t) \quad (6.19)$$

Esta solución representa la variación armónica del desplazamiento de un sistema de un grado de libertad como se observa en la Figura 6.4. Se define el periodo natural de la estructura como $T = 2\pi/\omega$ y la frecuencia natural como la inversa del periodo $f = 1/T$. La amplitud de la vibración libre está dada por $\rho = \sqrt{u_0^2 + (\dot{u}_0/\omega)^2}$ y el desfase por $\theta = \tan^{-1}(-\dot{u}_0/\omega u_0)$.

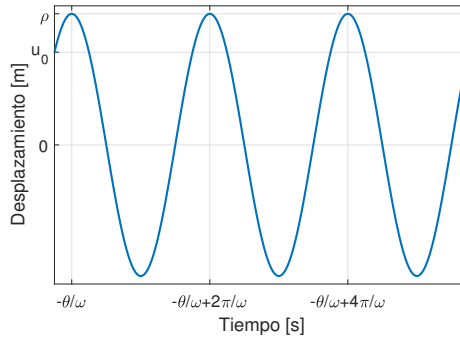


Figura 6.4 Vibración libre no amortiguada de un sistema de un grado de libertad.

6.4.2 Respuesta en vibración libre críticamente amortiguada

Si en la Ecuación (6.11) el valor del amortiguamiento coincide con $\omega = c/(2m)$, se obtiene que la respuesta en vibración libre tiene solución si:

$$s = -\omega \quad (6.20)$$

A este valor del amortiguamiento se le conoce como amortiguamiento crítico, $c_c = 2m\omega$. En este caso, la respuesta del sistema está definida por la siguiente expresión:

$$u(t) = [G_1 + tG_2] \exp(-\omega t) \quad (6.21)$$

donde las constantes de integración G_1 y G_2 son reales. La solución del sistema se obtiene de forma similar al caso anterior a partir de las condiciones iniciales del problema:

$$u(t) = [u_0(1 + \omega t) + \dot{u}_0 t] \exp(-\omega t) \quad (6.22)$$

En la figura 6.5 se presenta la respuesta de un sistema críticamente amortiguado. En este caso, la estructura tiende a la posición de equilibrio de manera asintótica, sin ninguna oscilación. Se define el factor de amortiguamiento $\zeta = c/c_c$ como la relación entre el

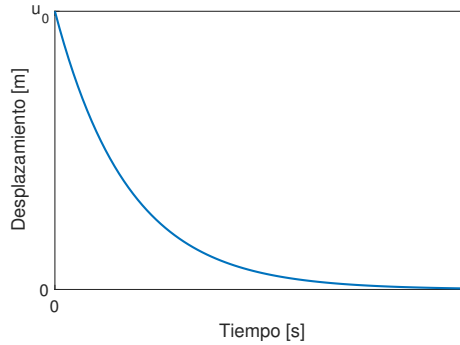


Figura 6.5 Vibración libre críticamente amortiguada de un sistema de un grado de libertad.

amortiguamiento del sistema c y su amortiguamiento crítico $c_c = 2m\omega$.

6.4.3 Respuesta en vibración libre subamortiguada

Se denomina que un sistema está subamortiguado si el amortiguamiento es inferior al valor crítico, es decir, $c < c_c$. En este caso la Ecuación (6.6) se puede escribir dividiendo todos los términos por la masa m del sistema de la siguiente forma:

$$\ddot{u}(t) + \frac{c}{m}\dot{u}(t) + \frac{k}{m}u(t) = 0 \quad (6.23)$$

Sustituyendo en la Ecuación (6.23) la frecuencia natural del sistema y el factor de amortiguamiento se obtiene:

$$\ddot{u}(t) + 2\zeta\omega\dot{u}(t) + \omega^2u(t) = 0 \quad (6.24)$$

Las raíces del polinomio característico se pueden expresar como:

$$s = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega^2} \quad (6.25)$$

$$= -\frac{c}{2m\omega} \omega \pm \omega \sqrt{\left(\frac{c}{2m\omega}\right)^2 - 1} \quad (6.26)$$

$$= -\zeta \omega \pm \omega \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (6.27)$$

$$= -\zeta \omega \pm i\omega \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (6.28)$$

$$= -\zeta \omega \pm i\omega_D \quad (6.29)$$

$$(6.30)$$

donde $\omega_D = \omega \sqrt{1 - \zeta^2}$ se define como la frecuencia natural amortiguada o frecuencia de resonancia del sistema.

La respuesta en vibración libre dada por la Ecuación (6.24) para sistemas subamortiguados ($\zeta < 1$) es de la forma:

$$u(t) = [G_1 \exp(i\omega_D t) + G_2 \exp(-i\omega_D t)] e^{-\zeta \omega t} \quad (6.31)$$

Esta ecuación se puede simplificar considerando que la solución del desplazamiento del sistema es real:

$$u(t) = [A \cos(\omega_D t) + B \sin(\omega_D t)] e^{-\zeta \omega t} \quad (6.32)$$

Las constantes de integración A y B se obtienen a partir de las condiciones iniciales del sistema $u(0) = u_0$ y $\dot{u}(0) = \dot{u}_0$. De esta forma la respuesta en vibración libre queda definida por la siguiente expresión:

$$u(t) = \left[u_0 \cos(\omega_D t) + \left(\frac{\dot{u}_0 + u_0 \zeta \omega}{\omega_D} \right) \sin(\omega_D t) \right] e^{-\zeta \omega t} \quad (6.33)$$

La Figura 6.6 representa la respuesta en vibración libre de varios sistemas de un grado de libertad: subamortiguados, con amortiguamiento crítico y no amortiguado.

Ejemplo 6.4.1 Se desean identificar las propiedades de un sistema de un grado de libertad (m , c y k) que permitan representar adecuadamente el comportamiento dinámico de una pletina en voladizo con una masa no estructural concentrada en el extremo libre de valor $\bar{m} = 0.21344$ kg. Con este objetivo, en primer lugar, se ha realizado un ensayo experimental de la estructura en el que se ha medido la deflexión estática $\bar{u} = 0.1$ m de la pletina producida por el peso de la masa concentrada. Posteriormente, se ha registrado con un acelerómetro la respuesta en vibración libre producida por un desplazamiento inicial $u_0 = 0.01$ m (Figura 6.7). El contenido en frecuencia de las aceleraciones medidas, calculado mediante la transformada rápida de Fourier (FFT), muestra un pico predominante en $f = 4.1$ Hz. La pletina es de acero y tiene una masa $m_p = 0.628$ kg.

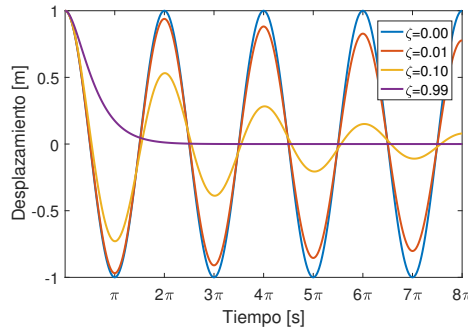


Figura 6.6 Vibración libre de sistemas de un grado de libertad: subamortiguados, con amortiguamiento crítico y no amortiguado.

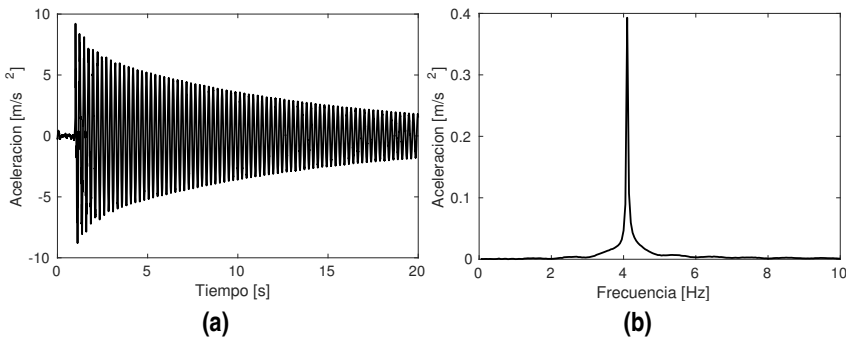


Figura 6.7 (a) Evolución temporal y (b) contenido en frecuencia de la aceleración del extremo de una pletina empotrada producida por un desplazamiento inicial $u_0 = 0.01$ m.

Solución. La identificación del sistema requiere estudiar los resultados obtenidos experimentalmente. El ensayo estático permite identificar el valor de la rigidez, teniendo en cuenta que $f_k = k\bar{u}$. La fuerza f_k está producida por el peso de la masa concentrada, por lo que $k = \bar{m}g/\bar{u} = 209.38$ N/m, donde $g = 9.81$ m/s² es la aceleración de la gravedad.

Por otra parte, el valor de la frecuencia de resonancia $f = 4.1$ Hz posibilita, una vez obtenida la rigidez estática k , el cálculo de la masa del sistema: $m = k/\omega^2 = 0.3155$ kg, donde $\omega = 2\pi f = 25.76$ rad/s. Es importante analizar que la masa que contribuye a la respuesta de la estructura está determinada por la masa concentrada $\bar{m}$ y por una fracción de la masa de la pletina de 0.1021 kg, representando ésta el 16%.

Finalmente, la estimación del amortiguamiento del sistema puede obtenerse a partir de la evolución temporal registrada. Un concepto útil para este objetivo es el *decremento logarítmico* δ , que se define a partir de la relación entre la amplitud del movimiento $u(t)$ en un instante de tiempo t y la del instante $t + T$, donde $T = 1/f$ es el periodo fundamental del sistema. Es decir, $\delta = \ln(u(t)/u(t + T))$. Teniendo en cuenta la Ecuación (6.33) los desplazamientos en un instante de tiempo son $u(t) = Ce^{-\zeta\omega t}$, donde C hace referencia a

los términos de dicha expresión que permanecen invariante en el tiempo. Por tanto:

$$\delta = \ln \left(\frac{u(t)}{u(t+T)} \right) = \ln \left(\frac{C e^{-\zeta \omega t}}{C e^{-\zeta \omega (t+T)}} \right) = 2\pi \zeta \quad (6.34)$$

Esta expresión es también válida si se considera la amplitud de las aceleraciones en lugar de los desplazamientos: $\delta = \ln(\ddot{u}(t)/\ddot{u}(t+T))$. Además, para obtener una mayor precisión en la estimación del factor de amortiguamiento se calcula el decremento logarítmico en N ciclos de la respuesta:

$$\delta = \ln \left(\frac{\ddot{u}(t)}{\ddot{u}(t+NT)} \right) = 2\pi N \zeta \quad (6.35)$$

Por ejemplo, si se considera que $u(5.923 \text{ s}) = 4.834 \text{ m/s}^2$ y que $u(5.923 \text{ s} + 20T) = 3.383 \text{ m/s}^2$ se obtiene un valor del factor de amortiguamiento $\zeta = 0.0031$. El amortiguamiento del sistema se calcula a partir del amortiguamiento crítico como $c = 2m\omega\zeta = 0.056 \text{ Ns/m}$.

En la Figura 6.8 se muestra una comparación de la evolución temporal de las aceleraciones registradas experimentalmente y de la respuesta del sistema de un grado de libertad. El grado de acuerdo está determinado por las incertidumbres presentes en los ensayos realizados y por la modelización de la estructura como un sistema de un grado de libertad. Sin embargo, el grado de aproximación conseguido permite concluir que la respuesta dinámica de este sistema estructural se asemeja bastante bien al de un grado de libertad.

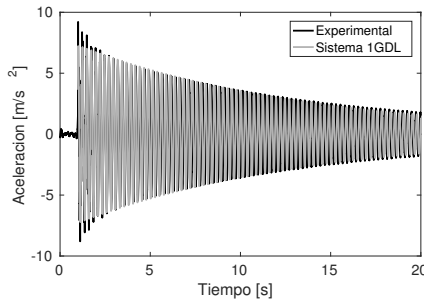


Figura 6.8 Comparación de la medida experimental de la aceleración y de la solución del sistema de un grado de libertad del extremo de una pletina empotrada producida por un desplazamiento inicial $u_0 = 0.01 \text{ m}$.

6.5 Respuesta en vibración forzada

La respuesta en vibración forzada está determinada por la Ecuación (6.2). La resolución de la ecuación de equilibrio puede abordarse teniendo en cuenta la naturaleza de las acciones a las que se encuentra sujeto el sistema. Los tipos de acciones que pueden actuar sobre un sistema pueden dividirse en fuerzas periódicas (rotores desequilibrados, máquinas

rotativas, ...) y fuerzas no periódicas (explosiones, terremotos, viento, ...). La respuesta en vibración forzada podrá calcularse de la siguientes formas.

Respuesta a cargas armónicas Las acciones que actúan sobre el sistema presentan una evolución temporal sinusoidal $p(t) = p_0 \sin(\bar{\omega}t)$ de frecuencia $\bar{\omega}$ y amplitud p_0 . La solución particular se corresponde con un movimiento oscilatorio $u(t) = U \sin(\bar{\omega}t)$ de la misma frecuencia que la fuerza de amplitud U .

Respuesta a acciones periódicas Las acciones periódicas se presentan como un caso generalizado de las cargas armónicas, teniendo en cuenta que una función periódica puede expresarse como una combinación de funciones armónicas de la forma:

$$p(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\bar{\omega}_n t) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\bar{\omega}_n t) \quad (6.36)$$

La solución particular mediante una superposición de funciones armónicas se obtiene de forma análoga a la respuesta a cargas armónicas.

Respuesta a cargas impulsivas Las acciones que pueden considerarse cargas impulsivas son aquellas que actúan durante un corto periodo de tiempo, pudiendo presentar una evolución arbitraria. La duración de la respuesta del sistema abarca unos instantes de tiempo y se emplean métodos de integración temporal.

Respuesta a cargas arbitrarias Esta categoría de acciones abarca a aquellas cargas que no presentan ninguna de las características de los casos anteriores. Son acciones que pueden actuar durante un periodo de tiempo con una evolución arbitraria (terremotos, acción del viento, paso de trenes, ...). Para la resolución de este tipo de problemas se pueden emplear métodos de integración numérica (Runge-Kutta, Newmark, ...) o métodos de superposición.

La solución general de este tipo de problemas puede llegar a ser compleja y existen diferentes métodos de resolución dentro de cada categoría.

6.6 Respuesta a cargas armónicas

Se considera a continuación un sistema de un grado de libertad solicitado por una carga armónica $p(t) = p_0 \sin(\bar{\omega}t)$. El equilibrio del sistema viene dado por la siguiente ecuación:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p_0 \sin(\bar{\omega}t) \quad (6.37)$$

6.6.1 Respuesta a cargas armónicas en sistemas no amortiguados

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = p_0 \sin(\bar{\omega}t) \quad (6.38)$$

La respuesta de la estructura gobernada por la Ecuación (6.37) es la suma de la solución homogénea dada por la Ecuación (6.19) y una solución particular de la Ecuación (6.38). Si

se considera un sistema con condiciones iniciales nulas, es decir, $u_0 = \dot{u}_0 = 0$, la respuesta total de la estructura viene dada por:

$$u(t) = \frac{p_0}{k} \left[\frac{1}{1-\beta^2} \right] (\sin(\bar{\omega}t) - \beta \sin \omega t) \quad (6.39)$$

donde $\beta = \bar{\omega}/\omega$ es la relación entre la frecuencia de excitación y la frecuencia natural de la estructura. La relación p_0/k es la respuesta de la estructura a una carga estática de amplitud p_0 . El factor $\left[\frac{1}{1-\beta^2} \right]$ representa la amplificación de la respuesta de la estructura debido al carácter dinámico de la fuerza. La parte de la respuesta que varía con el tiempo según la frecuencia natural de la estructura $\sin(\omega t)$, tiene carácter transitorio ya que, en sistemas reales, desaparece en poco tiempo debido al amortiguamiento que tiene cualquier sistema, como se estudia a continuación.

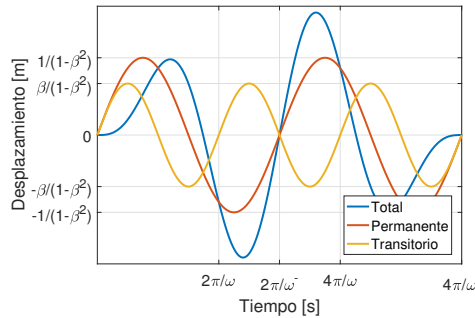


Figura 6.9 Respuesta de un sistema de un grado de libertad no amortiguado sometido a una carga armónica siendo $\beta = 2/3$.

6.6.2 Respuesta a cargas armónicas en sistemas amortiguados

La Ecuación (6.38) puede escribirse como:

$$\ddot{u}(t) + 2\zeta\omega\dot{u}(t) + \omega^2u(t) = \frac{p_0}{m} \sin(\bar{\omega}t) \quad (6.40)$$

La solución de la Ecuación (6.40) resulta:

$$u(t) = [A \cos(\omega_D t) + B \sin(\omega_D t)] e^{-\zeta\omega t} + \frac{p_0}{k} \left[\frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2} \right] ((1-\beta^2) \sin(\bar{\omega}t) - 2\zeta\beta \cos(\bar{\omega}t)) \quad (6.41)$$

El primer término de la solución representa la parte transitoria que se atenúa según $e^{-\zeta\omega t}$. Las constantes A y B se pueden obtener a partir de las condiciones iniciales u_0 y $\dot{u}_0$. El

segundo término representa la parte permanente de la solución:

$$u_p(t) = \frac{p_0}{k} \left[\frac{1}{(1 - \beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2} \right] ((1 - \beta^2) \sin(\bar{\omega}t) - 2\zeta\beta \cos(\bar{\omega}t)) = \rho (\sin(\bar{\omega}t) - \theta) \quad (6.42)$$

donde:

$$\rho = \frac{p_0}{k} [(1 - \beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2]^{-1/2} \quad (6.43)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left[\frac{2\zeta\beta}{1 - \beta^2} \right] \quad (6.44)$$

Se define el factor de amplificación dinámico D como la relación entre la amplitud de la respuesta dinámica y estática:

$$D = \frac{\rho}{p_0/k} = [(1 - \beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2]^{-1/2} \quad (6.45)$$

La Figura 6.10 presenta la variación del factor de amplificación dinámico y la fase con el amortiguamiento. Para el caso no realista en el que se considera $\zeta = 0$, la amplitud tiende a infinito cuando $\beta = 1$, es decir, cuando la frecuencia de excitación coincide con la frecuencia natural del sistema. En un caso real, con amortiguamiento distinto de cero, la amplitud de la respuesta de la estructura presenta una amplificación importante de la respuesta cuando la frecuencia de excitación coincide con $\omega_D = \omega\sqrt{1 - \zeta^2}$. A este fenómeno se le conoce como *resonancia*.

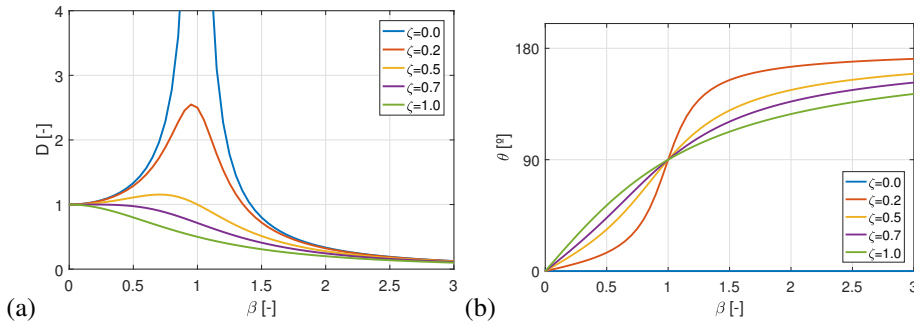


Figura 6.10 Variación del (a) factor de amplificación dinámico y (b) fase con el amortiguamiento.

Ejemplo 6.6.1 Los parámetros modales de una estructura (frecuencias naturales, modos de vibración y amortiguamientos modales) se pueden identificar a partir de su respuesta cuando es solicitada por un excitador armónico. En un ensayo de este tipo se excitó la estructura a frecuencias $\bar{f}_1 = 2.5$ Hz y $\bar{f}_2 = 5$ Hz, con una amplitud de 2500 N. Se midió la respuesta de la estructura siendo $\rho_1 = 18 \times 10^{-5}$ m y $\rho_2 = 36 \times 10^{-5}$ m, respectivamente.

En ambos casos se puede suponer, para facilitar el cálculo, que la fase es nula $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Calcule la frecuencia natural de la estructura.

Solución. A partir de la expresión $\rho = \frac{p_0}{k} \frac{1}{1-\beta^2}$, siendo $\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega} = \frac{\bar{\omega}}{\sqrt{k/m}}$, se puede obtener $\rho = \frac{p_0}{k-m\bar{\omega}^2}$. Usando los datos medidos para las dos frecuencias de excitación se obtiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, de donde resulta: $k = 16.2 \times 10^6 \text{ N/m}$ y $m = 9381 \text{ kg}$. A partir de estos dos parámetros, se obtiene que la frecuencia natural de la estructura es: $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = 6.6 \text{ Hz}$.

6.6.3 Respuesta resonante

En el caso ideal en el que $\zeta = 0$, la resonancia tiene lugar cuando $\beta = 1$, es decir, para $\bar{\omega} = \omega$. El valor del factor de amplificación dinámico para $\beta = 1$ es $D(\beta = 1) = 1/(2\zeta)$. Realmente la resonancia tiene lugar para $\beta = \sqrt{1-2\zeta^2}$ obteniéndose un valor del factor de amplificación $D(\beta = \sqrt{1-2\zeta^2}) = 1/(2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}) = 1/(2\zeta)\bar{\omega}/\omega_D = 1/(2\zeta)\omega/\omega_D$. Normalmente, el valor del amortiguamiento $\zeta \ll 1$, por lo que $\omega_D = \omega$ y $D(\beta = 1) \sim D(\beta = \sqrt{1-2\zeta^2})$.

Si las condiciones iniciales son nulas ($u_0 = \dot{u}_0 = 0$) y se supone que $\sqrt{1-\zeta^2} \sim 1$, la relación entre la respuesta total de un sistema de un grado de libertad sometido a una carga armónica y la respuesta estática es:

$$R(t) = \frac{u(t)}{p_0/k} = \frac{1}{2\zeta} \left[\left(e^{-\zeta\omega t} - 1 \right) \cos(\omega t) + \zeta e^{-\zeta\omega t} \sin(\omega t) \right] \quad (6.46)$$

Para el caso de $\zeta \rightarrow 0$ (resolviendo el límite):

$$R(t) = \frac{u(t)}{p_0/k} = \frac{1}{2} [\sin(\omega t) - \omega t \cos(\omega t)] \quad (6.47)$$

En la Figura 6.11 se muestra la variación de la respuesta resonante con el amortiguamiento. Para el caso de amortiguamiento nulo, la respuesta aumenta de manera indefinida en cada ciclo de carga. Sin embargo, cuando se considera un amortiguamiento no nulo, la respuesta aumenta hasta $1/(2\zeta)$ según $1/(2\zeta)(e^{-\zeta\omega t} - 1)$.

6.7 Aislamiento de vibraciones

En esta sección se aplican las ideas anteriores para diseñar de manera aproximada dos sistemas de aislamiento de vibraciones.

La primera situación se presenta en la Figura 6.12. Se trata de una máquina que trabaja a frecuencia $\bar{\omega}$ e introduce en la bancada una fuerza de amplitud p_0 . La respuesta de la máquina viene dada por la Ecuación (6.42):

$$u(t) = u_p(t) = \frac{p_0}{k} D \sin(\bar{\omega}t - \theta) \quad (6.48)$$

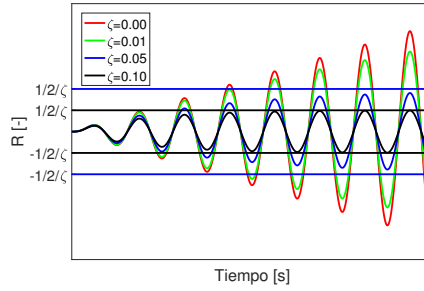


Figura 6.11 Variación de la respuesta resonante con el amortiguamiento.

donde D está definido en la Ecuación (6.45). Suponiendo despreciables los movimientos de la base, las fuerzas que se transmiten son:

$$f_k(t) = ku(t) = p_0 D \sin(\bar{\omega}t - \theta) \quad (6.49)$$

$$f_c(t) = c\dot{u}(t) = \frac{cp_0 D \bar{\omega}}{k} \cos(\bar{\omega}t - \theta) = 2\zeta\beta p_0 D \cos(\bar{\omega}t - \theta) \quad (6.50)$$

La fuerza máxima transmitida a la bancada es:

$$f_{max} = \sqrt{f_{k,max}^2 + f_{c,max}^2} = p_0 D [1 + (2\zeta\beta)^2]^{1/2} \quad (6.51)$$

Se denomina *transmisibilidad* a la relación entre la amplitud de la carga aplicada y la amplitud de la carga transmitida:

$$TR = \frac{p_0}{f_{max}} = D [1 + (2\zeta\beta)^2]^{1/2} \quad (6.52)$$

El segundo caso que se estudia representa la atenuación de los desplazamientos que

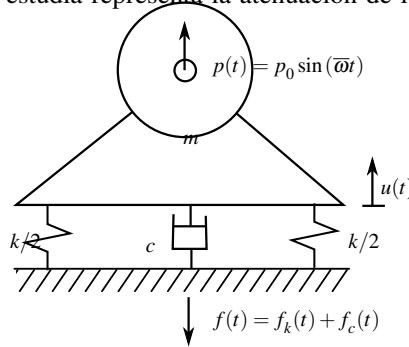


Figura 6.12 Aislamiento de vibraciones para atenuar una fuerza aplicada.

aparecen en una estructura $u_t(t)$ inducidos por un movimiento en su base $u_s(t)$ (Figura 6.13). La respuesta de la estructura viene dada igualmente por la Ecuación (6.42), teniendo

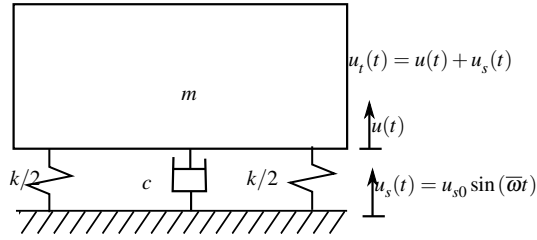


Figura 6.13 Aislamiento de vibraciones para atenuar un desplazamiento de la base.

en cuenta que la fuerza aplicada en la estructura es $p(t) = -m\ddot{u}_s(t) = m\bar{\omega}^2 u_{s0} \sin(\bar{\omega}t)$:

$$u(t) = u_p(t) = \frac{m\bar{\omega}^2 u_{s0}}{k} D \sin(\bar{\omega}t - \theta) = \frac{\bar{\omega}^2 u_{s0}}{\omega^2} D \sin(\bar{\omega}t - \theta) = u_{s0} \beta^2 D \sin(\bar{\omega}t - \theta) \quad (6.53)$$

La respuesta total de la estructura se obtiene sumando vectorialmente $u_t(t) = u_s(t) + u(t)$:

$$u_t = \sqrt{u^2 + u_s^2} = u_{s0} D [1 + (2\zeta\beta)^2]^{1/2} \sin(\bar{\omega}t - \theta) \quad (6.54)$$

La transmisibilidad se obtiene de la relación entre la respuesta total máxima y el movimiento de la base:

$$TR = \frac{u_{t,max}}{u_{s,max}} = \frac{\dot{u}_{t,max}}{\dot{u}_{s,max}} = \frac{\ddot{u}_{t,max}}{\ddot{u}_{s,max}} = D [1 + (2\zeta\beta)^2]^{1/2} \quad (6.55)$$

obteniéndose la misma expresión que para la primera situación (Ecuación (6.52)).

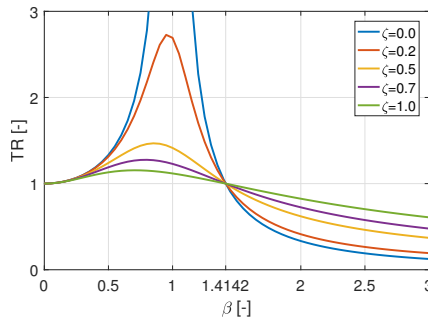


Figura 6.14 Variación de la transmisibilidad con el amortiguamiento.

La Figura 6.14 presenta la variación de la transmisibilidad con el amortiguamiento. Para $\beta < \sqrt{2}$, la transmisibilidad disminuye a medida que el amortiguamiento aumenta. Sin embargo, para estructuras en las que $\beta > \sqrt{2}$, es decir, para estructuras solicitadas por cargas armónicas con una frecuencia $\sqrt{2}$ veces mayor que la frecuencia natural del sistema, incrementar el amortiguamiento supone un aumento no deseado de la transmisibilidad.

Ejemplo 6.7.1 En puentes de hormigón, debido a la fluencia, pueden aparecer pequeñas deformaciones que generan vibraciones en los vehículos que los cruzan. Las amplitudes de

dichas vibraciones están controladas por el sistema de suspensión del vehículo. Considere un vehículo de masa $m = 1800 \text{ kg}$, y con un sistema de suspensión de rigidez definida a partir de conocer que una fuerza de 50 kgf produce una deflexión de 2 mm , y con un amortiguamiento del 40% sobre el crítico. El puente está formado por sucesivos vanos de longitud igual a $L = 10 \text{ m}$ siendo la amplitud máxima de la deflexión por fluencia igual a 3 cm . Calcule:

1. La velocidad del vehículo que produce que entre en resonancia durante su paso por el puente.
2. La amplitud máxima del movimiento vertical en la situación de resonancia.
3. La amplitud máxima del movimiento vertical en la situación de resonancia si el vehículo no tuviese amortiguamiento.
4. La amplitud máxima del movimiento vertical cuando la velocidad del vehículo es $v = 45 \text{ km/h}$.
5. El valor del amortiguamiento $[\text{Ns/m}]$ que hace que se alcance la posición de equilibrio sin oscilaciones.

Solución. La rigidez del vehículo viene dada por $k = 50 \text{ kgf} \times 9.81 \text{ m/s}^2 / 2 \text{ mm} = 245250 \text{ N/m}$. La frecuencia natural del sistema es $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k/m} = 1.8578 \text{ Hz}$, siendo su periodo natural $T = 1/f = 0.5383 \text{ s}$.

El vehículo está solicitado por una carga con un periodo $\bar{T} = L/v$. Para que se de la situación de resonancia debe ocurrir que $\bar{T} = T$, lo que supone una velocidad $v_{\text{res}} = 66.8 \text{ km/h}$.

La amplitud máxima del movimiento vertical cuando $v = v_{\text{res}}$, es decir, cuando $\beta = 1$, se obtiene de la Ecuación (6.55) $u_{t,\text{max}} = TR u_{s,\text{max}} = TR \times 3 \text{ cm} = 0.048 \text{ m}$.

En la situación irreal en la que el vehículo no tuviese amortiguamiento, la amplitud sería infinita.

Si la velocidad es $v = 45 \text{ km/h}$, el periodo de la carga es $\bar{T} = L/v = 0.8 \text{ s}$ y $\beta = T/\bar{T} = 0.6729$. Sustituyendo nuevamente en la Ecuación (6.55) se obtiene $u_{t,\text{max}} = 0.044 \text{ m}$.

Para que se llegue a la posición de equilibrio sin oscilaciones el valor del amortiguamiento debe ser igual al valor del amortiguamiento crítico $c_c = 2m\omega = 2\sqrt{km}$. Sustituyendo se obtiene $c_c = 42021 \text{ Ns/m}$

Para el diseño de un sistema de aislamiento de vibraciones, es decir, para los casos en los que $\beta \geq \sqrt{2}$ y la transmisibilidad es menor que 1, el comportamiento del sistema de un grado de libertad se expresa en función de la efectividad, definida como:

$$IE = 1 - TR \quad (6.56)$$

$IE = 1$ representa el aislamiento total que se puede alcanzar sólo si $\beta \rightarrow \infty$, e $IE = 0$ representa el caso en el que no hay aislamiento que ocurre para $\beta = \sqrt{2}$. Al ser $\beta \geq \sqrt{2}$ el amortiguamiento del sistema de aislamiento debe ser lo menor posible.

Si se considera un ζ muy pequeño, la transmisibilidad se puede escribir como:

$$TR = \frac{1}{\beta^2 - 1} \quad (6.57)$$

y la efectividad:

$$IE = \frac{\beta^2 - 2}{\beta^2 - 1} \quad (6.58)$$

De la Ecuación (6.58) se obtiene:

$$\frac{2 - IE}{1 - IE} = \beta^2 = \frac{\bar{\omega}^2}{\omega^2} = \frac{\bar{f}^2}{4\pi^2 \frac{k}{m}} = \frac{\bar{f}^2}{4\pi^2 k} = \frac{m\bar{f}^2}{4\pi^2 k} = \frac{mg\bar{f}^2}{4\pi^2 kg} = \frac{mg}{k} \frac{\bar{f}^2}{4\pi^2 g} = u_{sta} \frac{\bar{f}^2}{4\pi^2 g} \quad (6.59)$$

donde $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ y u_{sta} es el desplazamiento del sistema de aislamiento inducido por el peso de la estructura. La Ecuación (6.59) se reescribe como:

$$\bar{f} = \frac{\bar{\omega}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{u_{sta}} \frac{2 - IE}{1 - IE}} \quad (6.60)$$

A partir de la frecuencia de excitación $\bar{f}$ y la efectividad del sistema IE , la Ecuación (6.60) permite determinar u_{sta} . La rigidez del sistema de aislamiento se obtiene de $k = \frac{mg}{u_{sta}}$. En la Figura 6.15 se representa la Ecuación (6.60).

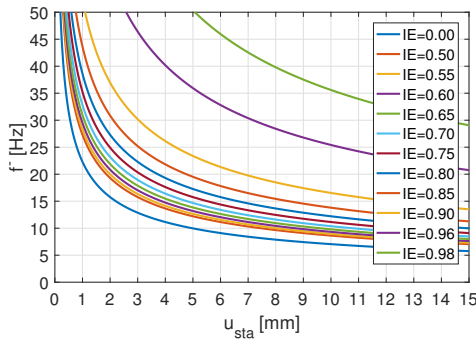


Figura 6.15 Mapa de diseño del sistema de aislamiento.

Ejemplo 6.7.2 Una máquina rotativa con 10000 kg de masa y que opera a 40 Hz, desarrolla una fuerza vertical con una amplitud de 2500 N. Para limitar las vibraciones transmitidas a la losa sobre la que descansa la máquina, se quiere diseñar un sistema anti vibración consistente en 4 apoyos (uno en cada esquina de la máquina). Se requiere que la amplitud total de la fuerza transmitida sea 400 N. Calcule la rigidez de cada apoyo.

Solución. La transmisibilidad es $TR = 400/2500 = 0.16$ que corresponde a una eficiencia $IE = 1 - TR = 0.84$. A partir de la Ecuación (6.60) se obtiene para $\bar{f} = 40 \text{ Hz}$ y $IE = 0.84$,

$u_{sta} = 0.0011$ m. Por lo tanto, la rigidez de cada apoyo del sistema de aislamiento es:
 $k = \frac{W}{4u_{sta}} = \frac{10000 \cdot 9.81}{4 \cdot 0.0011} = 22.295 \times 10^6 \text{ N/m}$.

6.8 Respuesta sísmica

La acción del sismo está caracterizada por una excitación de la base que origina desplazamientos en el sistema. En la Figura 6.16 se representa un sistema de un grado de libertad excitado por un sismo que actúa en la dirección horizontal con una evolución temporal $u_s(t)$. Esta acción produce un desplazamiento como sólido rígido de valor $u_s(t)$ debido a una traslación de la base de la estructura, a la que se superpone un desplazamiento dado por la respuesta dinámica del sistema $u(t)$. De esta forma, la respuesta total del sistema está descrita por la siguiente expresión:

$$u_t(t) = u_s(t) + u(t) \quad (6.61)$$

La ecuación de equilibrio (Ecuación (6.2)) se modifica introduciendo la descomposición

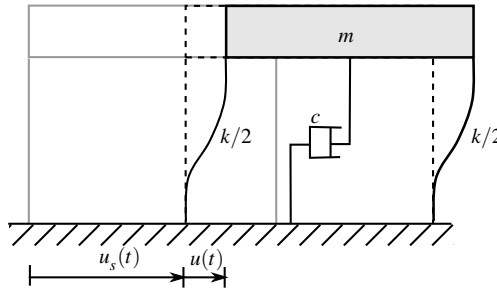


Figura 6.16 Representación de un sistema de un grado de libertad excitado por un desplazamiento de la base.

de los desplazamientos definida por la Ecuación (6.61):

$$m(\ddot{u}_s(t) + \ddot{u}(t)) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0 \quad (6.62)$$

Si la respuesta total de la estructura es igual al movimiento de la base $u_s(t)$, sólo se produce un desplazamiento como sólido rígido en el sistema, siendo las fuerzas elásticas $f_k(t) = ku_s(t)$ nulas. Análogamente, la velocidad asociada a dicho movimiento $\dot{u}_s(t)$ es la misma en todo el sistema y, por tanto, las fuerzas disipativas $f_c(t) = c\dot{u}_s(t)$ también son nulas. La Ecuación (6.62) se escribe como:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = -m\ddot{u}_s(t) \quad (6.63)$$

Las solución general de la Ecuación (6.63) puede obtenerse a partir de la integral de Duhamel que permite conocer en cada instante de tiempo el desplazamiento $u(t)$ producido

por la acción del sismo $u_s(t)$:

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t -m\ddot{u}_s(\tau) \sin(\omega_D(t-\tau)) e^{-\zeta\omega(t-\tau)} d\tau \quad (6.64)$$

Esta expresión puede simplificarse si se considera que en un sistema con un factor de amortiguamiento $\zeta \leq 0.1$ la frecuencia de resonancia es aproximadamente igual a la frecuencia natural, $\omega_D \approx \omega$. Por ejemplo, si $\zeta = 0.1$ el valor de la frecuencia de resonancia es $\omega_D = 0.995\omega$. En estos casos la Ecuación (6.64) se simplifica de la siguiente forma:

$$u(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t -\ddot{u}_s(\tau) \sin(\omega(t-\tau)) e^{-\zeta\omega(t-\tau)} d\tau \quad (6.65)$$

En ingeniería sísmica se define el espectro de la respuesta $S_d(\zeta, \omega)$ como el máximo desplazamiento en valor absoluto que produce un sismo para todos los posibles sistemas de un grado de libertad definidos por su frecuencia natural ω y por el factor de amortiguamiento ζ :

$$S_d(\zeta, \omega) = \max(|u(t)|) \quad (6.66)$$

Se define también la pseudo-velocidad espectral $S_{pv}(\zeta, \omega)$ como:

$$S_{pv}(\zeta, \omega) = \max \left[\left| \int_0^t -\ddot{u}_s(\tau) \sin(\omega(t-\tau)) e^{-\zeta\omega(t-\tau)} d\tau \right| \right] \quad (6.67)$$

De las Ecuaciones (6.65-6.67) se obtiene la relación entre el espectro de la respuesta y la pseudo-velocidad:

$$S_d(\zeta, \omega) = \frac{1}{\omega} S_{pv}(\zeta, \omega) \quad (6.68)$$

Análogamente, se define la pseudo-aceleración $S_{pa}(\zeta, \omega)$ como:

$$S_{pa}(\zeta, \omega) = \omega^2 S_d(\zeta, \omega) = \omega S_{pv}(\zeta, \omega) \quad (6.69)$$

Ejemplo 6.8.1 En este ejemplo se desea conocer la amplitud máxima del desplazamiento en un sistema de un grado de libertad producido por el terremoto El Centro ocurrido en 1940 y que se muestra en la Figura 6.17. Así mismo, se pide calcular el valor de la pseudo-velocidad y de la pseudo-aceleración. Las propiedades del sistema son $m = 1$ kg, $c = 0.1264$ Ns/m y $k = 10$ N/m.

Solución. La respuesta de un sistema de un grado de libertad producida por una excitación de la base se calcula mediante la integral de Duhamel (Ecuación (6.65)). Para evaluar dicha expresión es necesario conocer el valor de la frecuencia natural y el factor de amortiguamiento del sistema: $\omega = \sqrt{k/m} = 3.16$ rad/s y $\zeta = c/c_c = c/2m\omega = 0.02$.

En la Figura 6.18 se muestra el resultado de la evolución temporal de los desplazamientos calculada con el listado de comando de MATLAB que se recoge en el Código 6.1. La respuesta obtenida presenta una evolución que oscila con un periodo $T = 2\pi/\omega = 2$ s. El

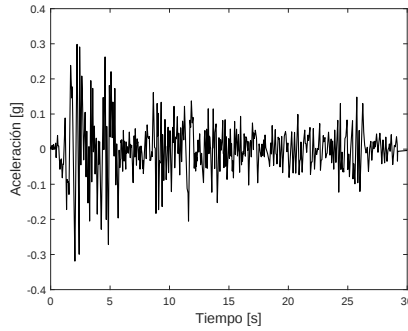


Figura 6.17 Acelerograma del terremoto de El Centro (1940).

máximo de la respuesta define el espectro de la respuesta $S_d = 0.019$ m de acuerdo con la Ecuación (6.66). A partir de este resultado se obtiene que $S_{pv} = \omega S_d = 0.0604$ m/s y que $S_{pa} = \omega^2 S_d = 0.1908$ m/s².

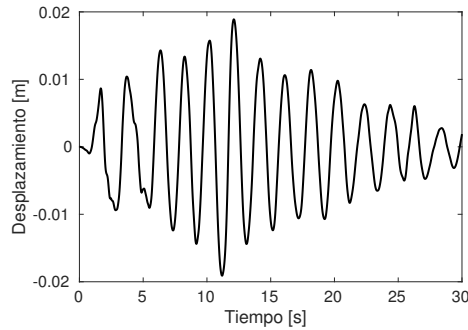


Figura 6.18 Evolución temporal del desplazamiento de un sistema de un grado de libertad producidos por el terremoto de El Centro (1940).

El procedimiento desarrollado para calcular el espectro de la respuesta puede generalizarse para *todos* los sistemas de un grado de libertad. En la Figura 6.19.(a) se muestra el espectro de la respuesta frente al periodo fundamental del sistema para distintos factores de amortiguamiento. En esta figura se observa que la respuesta tiende a un valor nulo a medida que el periodo de la estructura tiende a 0 (sistemas muy rígidos), es decir, los desplazamientos máximos tienden a cero cuando la frecuencia natural del sistema aumenta. Así mismo, los desplazamiento máximos aumentan con el periodo de la estructura. Las Figuras 6.19.(b) y (c) muestran la pseudo-velocidad y la pseudo-aceleración obtenidas a partir del espectro de la respuesta de acuerdo con las Ecuaciones (6.67-6.69). En el caso de estructuras muy flexibles ($T \rightarrow \infty$), el espectro de respuesta en desplazamientos tiende al desplazamiento inducido por el sismo $\max(u_s)$. Si la estructuras es muy rígida ($T \rightarrow 0$), el espectro de respuesta en aceleraciones tiende a la aceleración inducida por el sismo $\max(\ddot{u}_s)$.

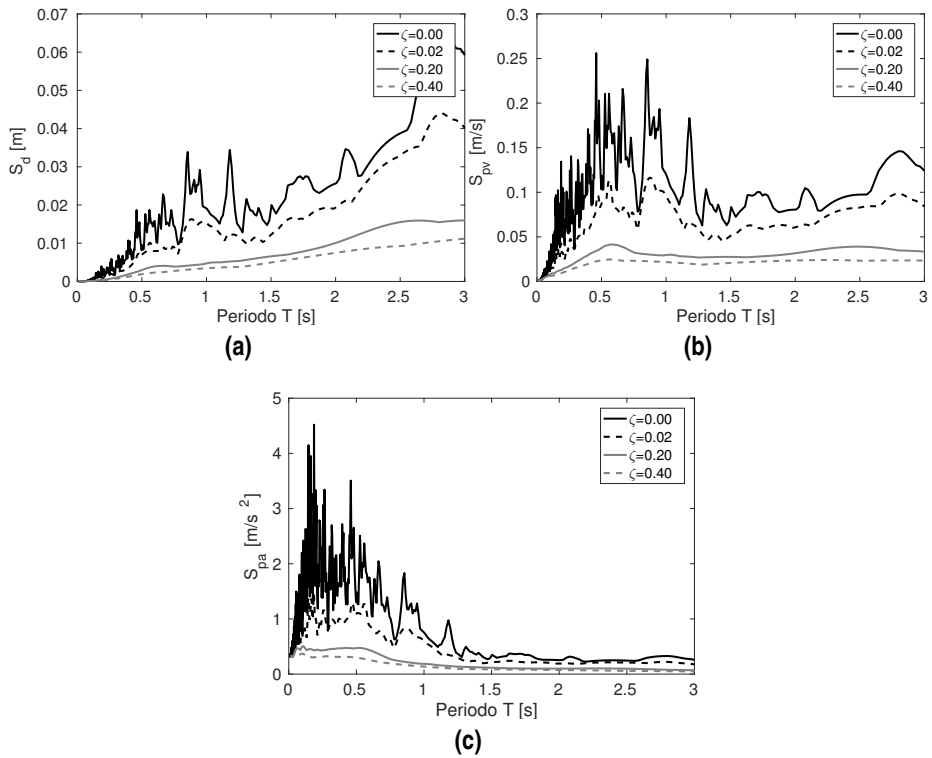


Figura 6.19 (a) Espectro elástico de la respuesta, (b) pseudo-velocidad espectral y (c) pseudo-acceleración espectral del terremoto del El Centro (1940) para distintos factores de amortiguamiento.

Código 6.1 Listado de comandos de MATLAB para resolver la integral de Duhamel.

```
% definición sistema
m=1; c=0.1264; k=10;
% frecuencia natural
omg=sqrt(k/m);
% factor amortiguamiento
zeta=c/(2*m*omg);
% datos El Centro (1940)
data=load('elcentro.dat');
% vector tiempo
t=data(:,1);
% incremento tiempo
dt=t(2)-t(1);
% aceleración base
a=data(:,2);
% función respuesta impulso
h=sin(omg*t).*exp(-zeta*omg*t);
% convolucion
```

```
u=omg^(-1)*conv(-a,h)*dt;
```

Existen métodos para generar acelerogramas compatibles con un espectro de respuesta dado. Estos métodos se basan en expandir la señal sísmica en una serie de ondas sinusoidales:

$$\ddot{u}_s(t) = I(t) \sum_{i=1}^n A_i \sin(\omega_i t + \phi_i) \quad (6.70)$$

donde ϕ_i , ω_i y A_i son un conjunto de ángulos de fase, frecuencias y amplitudes, respectivamente. $I(t)$ es una función de intensidad predefinida que permite representar el carácter transitorio de los acelerogramas.

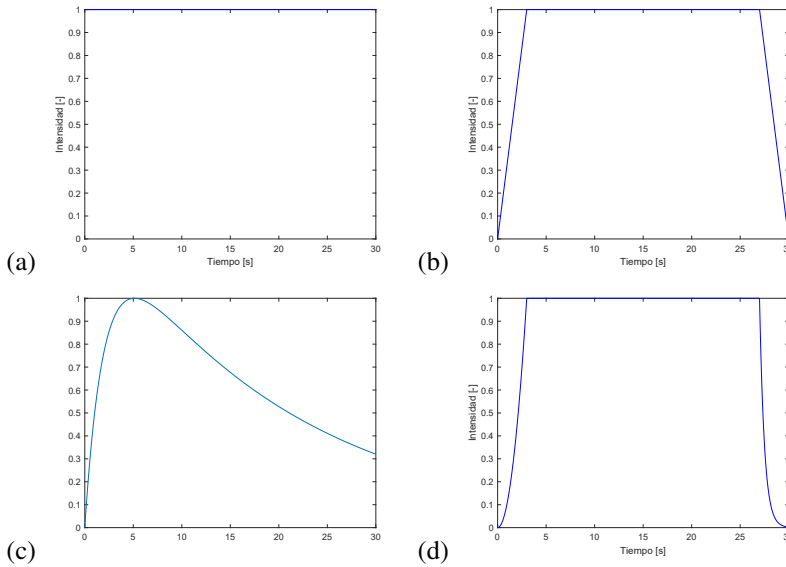


Figura 6.20 Funciones de intensidad: (a) $I(t) = 1$, (b) trapezoidal: $I(t) = (t/t_{RISE})$, $I(t) = 1$ y $I(t) = (1 - t/t_{END})$, (c) exponencial: $I(t) = a_0(\exp(-\alpha_0 t) - \exp(-\beta_0 t))$ y (d) compuesta: $I(t) = (t/t_{RISE})^{ipow}$, $I(t) = 1$ y $I(t) = \exp(-\alpha_0 t)$.

Se ha creado un código de MATLAB¹ para obtener acelerogramas compatibles con un espectro dado. En la Figura 6.21 se muestra el acelerograma obtenido a partir del espectro del terremoto de El Centro.

Si se comparan las Figuras 6.17 y 6.21 se observa que las señales temporales no son idénticas. Sin embargo, ambas presentan un acelerograma similar, como se muestra en la Figura 6.22. La diferencia entre ambos espectros es menor del 5 %. El grado de acuerdo

¹ basado en "D. Gasparini and E.H. Vanmarcke, Simulated Earthquake Motions Compatible with Prescribed Response Spectra, M.I.T. Department of Civil Engineering Research Report R76-4, Order No. 527, January 1976".

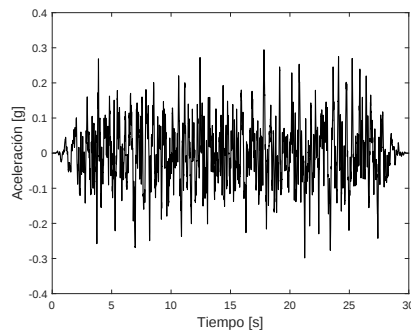


Figura 6.21 Acelerograma compatible con el espectro del terremoto de El Centro (1940) para $\zeta = 0.02$.

de los acelerogramas se puede mejorar mediante las funciones de intensidad. El resultado mostrado en la Figura 6.21 se ha obtenido usando una función de intensidad trapezoidal con un periodo de subida y bajada de 3 s.

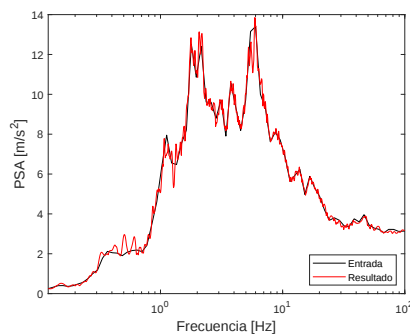


Figura 6.22 (Línea negra) Espectro elástico de la respuesta del terremoto del El Centro (1940) para $\zeta = 0.02$ y (línea roja) espectro del acelerograma compatible mostrado en la Figura 6.21.

7 Análisis dinámico de múltiples grados de libertad

7.1 Introducción

La modelización de una estructura mediante un sistema de un grado de libertad requiere que la distribución de masas se concentre, principalmente, en un punto de la estructura, y que los desplazamientos de este punto se produzcan en una sola dirección. Si se dan estas condiciones, el comportamiento de la estructura puede representarse adecuadamente mediante un sistema de un grado de libertad.

Por ejemplo, un depósito elevado de agua como el mostrado en la Figura 7.1 es un tipo de estructura que podría representarse mediante éste modelo, ya que concentra la masa del líquido de forma *puntual* y se puede asumir que el desplazamiento horizontal de la parte superior de la estructura es predominante respecto al resto de componentes de los desplazamientos.



Figura 7.1 Marson Water Tower (Universidad de Iowa).

En cambio, si la estructura puede experimentar desplazamientos significativos en más de una dirección, una modelización que considera sólo un grado de libertad puede ser imprecisa. La validez de los resultados dependerá de las distribuciones de la masa y de la rigidez del sistema.

En general, la respuesta dinámica de las estructuras no se puede representar mediante un solo grado de libertad. En este caso, será necesario emplear sistemas de múltiples grados de libertad que permitan representar este comportamiento.

7.2 Ecuación de equilibrio de sistemas de múltiples grados de libertad

La ecuación de equilibrio de un sistema de múltiples grados de libertad establece el equilibrio de fuerzas externas e internas de forma análoga a la del sistema de un grado de libertad. Por ejemplo, en la Figura 7.2 se representa una viga simplemente apoyada sometida a una acción externa $\mathbf{p}(x,t)$ con una distribución espacial y una amplitud dependiente del instante de tiempo t . La respuesta de la estructura se calculará a partir de la solución de un sistema con N grados de libertad que relacionan los desplazamientos verticales de N puntos repartidos a lo largo de la longitud de la viga. El número de grados de libertad seleccionados dependerá de la complejidad de la respuesta del sistema dada por las propiedades dinámicas de la estructura y por la distribución de carga $\mathbf{p}(x,t)$.

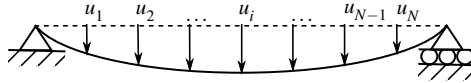


Figura 7.2 Representación de una viga simplemente apoyada. Definición de grados de libertad.

En un sistema de N grados de libertad como el descrito, la ecuación de equilibrio se representa mediante un sistema de N ecuaciones con N incógnitas:

$$f_m(x_1,t) + f_c(x_1,t) + f_k(x_1,t) = p(x_1,t) \quad (7.1a)$$

$$f_m(x_2,t) + f_c(x_2,t) + f_k(x_2,t) = p(x_2,t) \quad (7.1b)$$

$$\dots \quad (7.1c)$$

$$f_m(x_i,t) + f_c(x_i,t) + f_k(x_i,t) = p(x_i,t) \quad (7.1d)$$

$$\dots \quad (7.1e)$$

$$f_m(x_N,t) + f_c(x_N,t) + f_k(x_N,t) = p(x_N,t) \quad (7.1f)$$

En este sistema de ecuaciones las fuerzas que aparecen pueden expresarse a partir de unos coeficientes de influencia m_i , c_i y k_i , que representan las fuerzas en el punto x_i proporcionales a la aceleración $\ddot{u}(x_i,t)$, a la velocidad $\dot{u}(x_i,t)$ y al desplazamiento $u(x_i,t)$. En general, este conjunto de fuerzas puede expresarse para un instante de tiempo t de la

siguiente forma:

$$f_m(x_i, t) = m_{i1}\ddot{u}_1(t) + m_{i2}\ddot{u}_2(t) + \cdots + m_{ii}\ddot{u}_i(t) + \cdots + m_{iN}\ddot{u}_N(t) \quad (7.2a)$$

$$f_c(x_i, t) = c_{i1}\dot{u}_1(t) + c_{i2}\dot{u}_2(t) + \cdots + c_{ii}\dot{u}_i(t) + \cdots + c_{iN}\dot{u}_N(t) \quad (7.2b)$$

$$f_k(x_i, t) = k_{i1}u_1(t) + k_{i2}u_2(t) + \cdots + k_{ii}u_i(t) + \cdots + k_{iN}u_N(t) \quad (7.2c)$$

La ecuación de equilibrio definida por las Ecuaciones (7.1a-7.1f) se expresa en notación matricial sustituyendo las Ecuaciones (7.2a-7.2c):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(x, t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(x, t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{p}(x, t) \quad (7.3)$$

donde $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ y $\mathbf{K}$ son las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez, respectivamente, de la estructura. Estas matrices pueden representarse de la siguiente forma:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1i} & \cdots & m_{1N} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2i} & \cdots & m_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{i1} & m_{i2} & \cdots & m_{ii} & \cdots & m_{iN} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{N1} & m_{N2} & \cdots & m_{Ni} & \cdots & m_{NN} \end{bmatrix} \quad (7.4a)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1i} & \cdots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2i} & \cdots & c_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{ii} & \cdots & c_{iN} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N1} & c_{N2} & \cdots & c_{Ni} & \cdots & c_{NN} \end{bmatrix} \quad (7.4b)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1i} & \cdots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2i} & \cdots & k_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{i1} & k_{i2} & \cdots & k_{ii} & \cdots & k_{iN} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{N1} & k_{N2} & \cdots & k_{Ni} & \cdots & k_{NN} \end{bmatrix} \quad (7.4c)$$

En la siguiente sección se obtendrán las expresiones de las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez mediante el Método de los Elementos Finitos (MEF).

7.3 Formulación del Método de los Elementos Finitos

La formulación del MEF en el problema dinámico requiere considerar las fuerzas de inercia en la ecuación de equilibrio de la estructura. La ecuación de equilibrio (2.1) se

modifica teniendo en cuenta el efecto de las fuerzas de inercia del siguiente modo:

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{x},t) + X_i(\mathbf{x},t) = \rho \ddot{u}_i(\mathbf{x},t) \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (7.5)$$

donde el término $\rho \ddot{u}_i(\mathbf{x},t)$ representa las fuerzas de inercia en un punto $\mathbf{x}$ producidas por una aceleración $\ddot{u}_i(\mathbf{x},t)$ en la dirección i , siendo ρ la densidad del material. En este caso, todas las variables que aparecen en la ecuación de equilibrio dependen del tiempo.

El método de los residuos ponderados se basa en obtener una solución aproximada u_i^h de los desplazamientos de la estructura. De esta forma, se puede asumir que la ecuación de equilibrio (7.7) no se cumple de forma rigurosa, obteniéndose que:

$$\sigma_{ij,j}^h + X_i - \rho \ddot{u}_i^h \neq 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (7.6)$$

o, equivalentemente:

$$\sigma_{ij,j}^h + X_i - \rho \ddot{u}_i^h = R_i \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (7.7)$$

donde, R_i es el residuo de la solución que puede interpretarse como el desequilibrio producido por la aproximación de la solución mediante u_i^h . El método de los residuos ponderados consiste en forzar el equilibrio global de la estructura usando una función de prueba δu_i :

$$\int_{\Omega} \delta u_i R_i dV = \int_{\Omega} \delta u_i (\sigma_{ij,j}^h dV + X_i dV - \rho \ddot{u}_i^h) dV = 0 \quad (7.8)$$

donde, la función de ponderación δu_i puede adquirir un valor arbitrario con la única condición de que sea compatible con las condiciones de contorno del problema original.

La Ecuación (7.8) se desarrolla de forma similar al procedimiento seguido en la Sección 2.2, aplicando el teorema de la divergencia y aprovechando la simetría del tensor de tensiones. La consideración de las fuerzas de inercia añade un término adicional al Teorema de los Trabajos Virtuales (TTV), obteniéndose la siguiente expresión:

$$\int_{\Omega} \delta \epsilon_{ij} \sigma_{ij}^h dV + \int_{\Omega} \delta u_i \rho \ddot{u}_i^h dV = \int_{\partial\Omega_f} \delta u_i f_i dS + \int_{\Omega} \delta u_i X_i dV \quad (7.9)$$

donde, el segundo término de la izquierda representa el trabajo interno realizado por las fuerzas de inercia con el estado virtual de desplazamientos. La expresión del TTV se puede escribir en forma matricial:

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\epsilon} \boldsymbol{\sigma} dV + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \rho \ddot{\mathbf{u}} dV = \int_{\partial\Omega_f} \delta \mathbf{u} \mathbf{f} dS + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \mathbf{X} dV \quad (7.10)$$

en la que, sin pérdida de generalidad, se ha omitido el superíndice h por simplicidad en la notación.

La formulación del MEF se basa en la discretización en elementos del dominio Ω y en la aproximación del campo de desplazamientos en cada elemento. En el problema dinámico los desplazamientos son dependientes del tiempo como se ha comentado en las secciones

anteriores de este capítulo. Por tanto, la aproximación del campo de desplazamiento en el elemento dada por la Ecuación (2.57) se modifica introduciendo la variable temporal t :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \approx \sum_k N_k(\mathbf{x}) \mathbf{u}_k^e(t) = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \mathbf{u}^e(t) \quad (7.11)$$

donde, $N_k(\mathbf{x})$ son las funciones de forma del elemento e y $\mathbf{u}_k^e(t)$ los desplazamientos nodales. Es importante observar que la aproximación de los desplazamiento en el elemento se obtiene a partir de la interpolación espacial de los desplazamientos nodales que son dependientes del tiempo. Por tanto, la aceleración en un punto del elemento se puede aproximar fácilmente derivando la expresión anterior:

$$\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \approx \sum_k N_k(\mathbf{x}) \ddot{\mathbf{u}}_k^e(t) = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \ddot{\mathbf{u}}^e(t) \quad (7.12)$$

La expresión del TTV dada por la Ecuación (7.9) para un elemento se modifica haciendo uso de la aproximación del campo de desplazamientos y de aceleraciones, obteniéndose que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^e} (\delta \mathbf{u}^e)^T \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{u}^e dV + \int_{\Omega^e} (\delta \mathbf{u}^e)^T \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} \ddot{\mathbf{u}}^e dV = \\ \int_{\partial \Omega_f^e} (\delta \mathbf{u}^e)^T \mathbf{N}^T \mathbf{f} dS + \int_{\Omega^e} (\delta \mathbf{u}^e)^T \mathbf{N}^T \mathbf{X} dV \end{aligned} \quad (7.13)$$

y, equivalentemente:

$$\begin{aligned} (\delta \mathbf{u}^e)^T \left\{ \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \right] \mathbf{u}^e + \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dV \right] \ddot{\mathbf{u}}^e \right\} = \\ (\delta \mathbf{u}^e)^T \left\{ \int_{\partial \Omega_f^e} \mathbf{N}^T \mathbf{f} dS + \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{X} dV \right\} \end{aligned} \quad (7.14)$$

El TTV expresa la igualdad del trabajo producido por un estado de fuerzas en equilibrio con un campo de desplazamientos virtuales compatible en el elemento. Como la expresión anterior debe cumplirse para cualquier campo de desplazamientos $\delta \mathbf{u}^e$ se obtiene la siguiente ecuación de equilibrio elemental:

$$\left[\int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \right] \mathbf{u}^e + \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dV \right] \ddot{\mathbf{u}}^e = \int_{\partial \Omega_f^e} \mathbf{N}^T \mathbf{f} dS + \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{X} dV \quad (7.15)$$

Finalmente, la ecuación de equilibrio del elemento se escribe de la siguiente forma:

$$\mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{u}}^e(t) + \mathbf{K}^e \mathbf{u}^e(t) = \mathbf{F}^e(t) \quad (7.16)$$

Las definiciones de las matrices de masa $\mathbf{M}^e$ y rigidez $\mathbf{K}^e$, y del vector de fuerzas nodales $\mathbf{F}(t)$ son las siguientes:

$$\mathbf{M}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dV \quad (7.17a)$$

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \quad (7.17b)$$

$$\mathbf{F}^e = \int_{\partial\Omega_f^e} \mathbf{N}^T \mathbf{f} dS + \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{X} dV \quad (7.17c)$$

Las expresiones particulares de las Ecuaciones (7.17a-7.17c) de un elemento dependen de la formulación empleada. Esta formulación puede particularizarse al problema de elasticidad, vigas, placas, láminas, etc., de acuerdo a las hipótesis cinemáticas que se asumen en cada caso.

Ejemplo 7.3.1 Obtener el término M_{11}^e de la matriz de masa del elemento axil de dos nodos (ver Sección 3.2).

Solución. El elemento axil de dos nodos aproxima el campo de desplazamientos según la expresión dada por la Ecuación (3.10):

$$u(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) u_1 + \left(\frac{x}{L}\right) u_2 = N_1(x) u_1 + N_2(x) u_2$$

en el que la matriz de funciones de forma es $\mathbf{N} = [N_1 \ N_2]$. Por tanto, el primer término de la matriz de masa de este elemento se calcula mediante la siguiente expresión:

$$M_{11}^e = \int_{\Omega^e} N_1 \rho N_1 dV = \int_0^L N_1 \rho A N_1 dx = \frac{\rho A L}{3}$$

donde, L es la longitud del elemento y A el área de la sección transversal.

Ejemplo 7.3.2 Obtener el término M_{11}^e de la matriz de masa del elemento de Euler-Bernoulli de dos nodos (ver Sección 3.5).

Solución. El desplazamiento transversal en el elemento de dos nodos formulado según las hipótesis de Euler-Bernoulli se aproxima según la Ecuación (3.77) como:

$$w(x) = N_1(x) w_1 + \bar{N}_1(x) \left. \frac{dw}{dx} \right|_1 + N_2(x) w_2 + \bar{N}_2(x) \left. \frac{dw}{dx} \right|_2$$

siendo la matriz de funciones de forma $\mathbf{N} = [N_1 \ \bar{N}_1 \ N_2 \ \bar{N}_2]$, donde las expresiones de las funciones de forma están dadas por las Ecuación (3.98):

$$N_1(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (7.18)$$

$$\bar{N}_1(x) = x\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \quad (7.19)$$

$$N_2(x) = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (7.20)$$

$$\bar{N}_2(x) = \frac{x^2}{L}\left(\frac{x}{L} - 1\right) \quad (7.21)$$

Por tanto, el primer término de la matriz de masa es:

$$M_{11}^e = \int_0^L N_1 \rho A N_1 dx = \frac{13}{35} \rho A L$$

Calculando sucesivamente todos los términos M_{ij} , tanto del elemento axil como del elemento viga de Euler-Bernoulli, se obtiene la siguiente matriz de masa:

$$\mathbf{M} = \frac{\rho A L}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (7.22)$$

La matriz de masa del elemento de dos nodos se puede encontrar en el Apéndice B para su consulta.

7.3.1 Matriz de masas concentradas

La matriz de masa que se ha formulado en el apartado anterior se denomina matriz de masa *congruente*. Sin embargo, es posible definir una matriz de masa aproximada ignorando el acoplamiento entre los diferentes grados de libertad del elemento. Esta matriz se define como la matriz de masas *concentradas* $\bar{\mathbf{M}}$.

La matriz de masa de un elemento de dos grados de libertad asociados a los desplazamientos axiales de los extremos se puede obtener mediante la integración elemental como se ha hecho en el Ejemplo 7.3.1, obteniéndose la siguiente expresión:

$$\mathbf{M} = \frac{\rho A L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (7.23)$$

Existen diferentes técnicas de diagonalización de la matriz de masa. El procedimiento más intuitivo consiste en repartir la masa total del elemento $M_t = \rho A L$ en dos masas puntuales que se concentran en los extremos como se muestra en la Figura 7.3. En este caso, la matriz

de masa definida por la Ecuación (7.23) se modifica como:

$$\bar{\mathbf{M}} = \frac{\rho AL}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.24)$$

De esta forma, siguiendo este procedimiento, se conserva la energía cinética del elemento

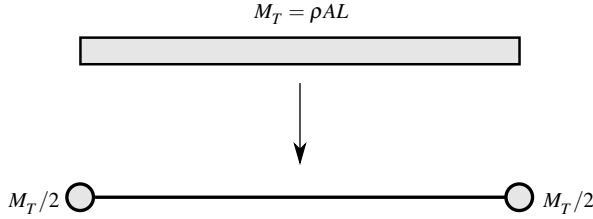


Figura 7.3 Elemento barra: modelo de masas discretas.

o, equivalentemente, el momento lineal. Esta condición se comprueba fácilmente aplicando una velocidad uniforme v al elemento, siendo el campo de velocidad $\dot{\mathbf{u}} = v[1 \ 1]^T$. La energía cinética del elemento se obtiene como $T = \dot{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{u}}/2 = \rho AL v^2/2 = M_T v^2/2$. También puede comprobarse que el momento lineal $p = \partial T / \partial v = M_T v$ se conserva en el elemento.

El procedimiento de diagonalización de la matriz de masa se puede generalizar mediante la siguiente expresión:

$$\bar{\mathbf{M}} = \bar{M}_{ij} = \begin{cases} \sum_j M_{i,j} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (7.25)$$

Sin embargo, el procedimiento de diagonalización no asegura que se conserve el momento angular en el elemento si el elemento tiene grados de libertad asociados a las rotaciones. La diagonalización de la matriz de masa del elemento viga definida por la Ecuación (7.22) es más compleja. Las masas asociadas a las traslaciones deben ser las mismas que en el caso de la barra ($\rho AL/2$), pero para las masas asociadas a las rotaciones no se obtiene una expresión unívoca. La matriz de masa concentrada de un elemento viga puede definirse mediante la siguiente expresión:

$$\bar{\mathbf{M}} = \rho AL \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha L^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha L^2 \end{bmatrix}, \quad \alpha \geq 0 \quad (7.26)$$

donde α es una constante no negativa que suele tomar valores entre 0 y 50. Una buena aproximación de la matriz de masa concentrada para el elemento viga se obtiene fijando un valor $\alpha = 0$.

En general, la matriz de masa de un elemento debe cumplir las siguientes condiciones:

- Simetría de la matriz, es decir, $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T$.
- Simetría física. La simetría del elemento debe reflejarse en la matriz de masa. Por ejemplo, la matriz de masa del elemento barra cumple que $m_{11} = m_{22}$. Para visualizar esta condición puede cambiarse el orden de los nodos y la matriz de masa debe permanecer inalterada.
- Conservación de la masa. La masa total del elemento debe conservarse. Esta condición se cumple si el momento lineal se conserva cuando se aplican una traslación al elemento con velocidad uniforme.
- Positividad. La matriz del elemento debe ser positiva, es decir, para un campo de velocidad $\dot{\mathbf{u}} \neq 0$ debe cumplirse que $\dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} \geq 0$.

La diagonalización de la matriz de masa de un elemento es ventajosa ya que computacionalmente se requiere menor capacidad para su almacenamiento, entre otras cuestiones. Además, la matriz de masa permite considerar masas no estructurales $\bar{m}$ concentradas en partes de una estructura simplemente sumándolas al termino correspondiente de la diagonal.

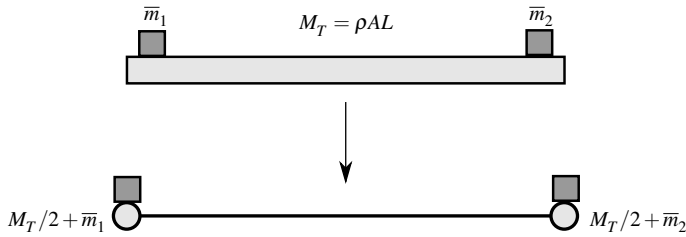


Figura 7.4 Elemento barra: modelo de masas discretas.

Por ejemplo, la expresión de la matriz de masas concentradas del elemento barra con dos masas no estructurales de valores $\bar{m}_1$ y $\bar{m}_2$ en los extremos de la Figura 7.4 es la siguiente:

$$\bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \rho AL/2 + \bar{m}_1 & 0 \\ 0 & \rho AL/2 + \bar{m}_2 \end{bmatrix} \quad (7.27)$$

7.3.2 Evaluación de la matriz de amortiguamiento

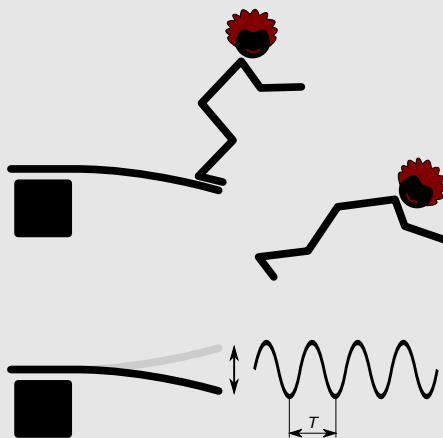
La matriz de amortiguamiento del un elemento viga también puede deducirse introduciendo en la ecuación de equilibrio el efecto de las fuerzas viscosas debidas al amortiguamiento interno definido por $c(\mathbf{x})$. Desarrollando el TTV se obtiene la siguiente expresión para la matriz de amortiguamiento:

$$\mathbf{C} = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T c(\mathbf{x}) \mathbf{N} d\Omega \quad (7.28)$$

Sin embargo, la estimación del amortiguamiento $c(\mathbf{x})$ es, en general, difícil y no se aborda en este apartado el cálculo de esta matriz. En las siguientes secciones se expondrán algunos modelos de amortiguamiento que se utilizan en el análisis dinámico de estructuras.

¿Qué sucede si salto de un trampolín?

Imagina una nadadora sobre un trampolín que se deforma por la acción del peso de ésta. La deflexión está determinada por el peso de la nadadora y por la flexibilidad de la estructura. La nadadora, justo antes de saltar, toma impulso y provoca que el trampolín experimente una deflexión adicional y, justo en ese momento, deja de estar en contacto con el trampolín. A partir de ahora, concéntrate únicamente en lo que sucede en el trampolín y olvida el salto de la nadadora. El trampolín se había deformado por el peso de la nadadora y por el impulso que toma para saltar.



¿Qué sucede a partir de este momento?

El trampolín comienza a vibrar como se ve en la figura inferior: experimenta ciclos de vibración entorno a la configuración indeformada. La forma en la que vibra es muy característica, se alternan las configuraciones deformadas representadas en color negro y gris. Si representamos en cada instante de tiempo el desplazamiento vertical del extremo, se puede observar que en ausencia de amortiguamiento sigue una evolución sinusoidal con un periodo característico T . La amplitud del movimiento se corresponde con la máxima deflexión del trampolín al saltar la nadadora.

La deformada del trampolín durante la vibración se denomina *modo de vibración*, y la inversa del periodo característico es la *frecuencia natural* de este modo. En la siguiente sección se desarrollan las bases matemáticas del *análisis modal*, que permiten identificar los modos de vibración y las frecuencias naturales de una estructura.

7.4 Respuesta en vibración libre. Análisis modal

El análisis dinámico de una estructura pasa, en primer lugar, por la caracterización del comportamiento dinámico de ésta. Una estructura se caracteriza por las frecuencias na-

turales y por la forma de los modos de vibración, es decir, las formas básicas en las que vibra una estructura y los periodos asociados.

Por ejemplo, en la Figura 7.5 se muestra la forma de los dos primeros modos de vibración de una viga biapoyada y de una viga en voladizo. La forma en la que vibra la viga depende en cada caso de las condiciones de contorno y de las propiedades de ésta. En ambos casos, el primer modo de vibración, correspondiente a las figuras superiores, tiene asociado un periodo de vibración que será mayor que el del segundo modo. El periodo asociado a cada modo define el tiempo en el que la estructura experimenta un ciclo de vibración desde la posición que se ha representado en la figura, la configuración simétrica y, de nuevo, la situación original. Análogamente, se define la frecuencia natural asociada a cada modo como la inversa del periodo $f_n = 1/T_n$ expresada en hercios (Hz) o como $\omega_n = 2\pi/T_n$ (rad/s).

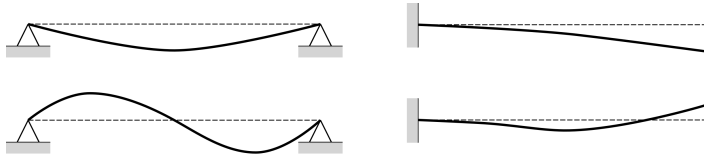


Figura 7.5 Modos de vibración de vigas biapoyadas y en voladizo.

En esta sección se estudia la respuesta de una estructura en vibración libre, sin considerar el efecto amortiguamiento, con el objetivo de determinar las frecuencias naturales y los modos de vibración. Este estudio se denomina *análisis modal*.

En estas condiciones, la ecuación de equilibrio del sistema se obtiene a partir de la Ecuación (7.3), omitiendo el término relacionado con el amortiguamiento de la estructura y considerando un estado nulo de fuerzas $\mathbf{F}(\mathbf{x},t) = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \mathbf{0} \quad (7.29)$$

Como solución de la ecuación de equilibrio se supone un movimiento armónico en la estructura de la siguiente forma:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \mathbf{U}(\mathbf{x}) \sin(\omega t + \varphi) \quad (7.30)$$

donde, $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ representa la amplitud de los desplazamientos para todos los grados de libertad de la estructura, ω es la frecuencia angular del movimiento y φ es el desfase. La expresión del vector aceleración se obtiene derivando temporalmente los desplazamientos:

$$\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t) = -\omega^2 \mathbf{U}(\mathbf{x}) \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 \mathbf{u}(\mathbf{x},t) \quad (7.31)$$

Sustituyendo la definición de los desplazamientos y de la aceleración en la ecuación de equilibrio (7.29) se obtiene la siguiente expresión:

$$-\omega^2 \mathbf{M}\mathbf{U}(\mathbf{x}) \sin(\omega t + \varphi) + \mathbf{K}\mathbf{U}(\mathbf{x}) \sin(\omega t + \varphi) = \mathbf{0} \quad (7.32)$$

o, de forma equivalente:

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{U}(\mathbf{x}) \sin(\omega t + \varphi) = \mathbf{0} \quad (7.33)$$

En esta ecuación, el término $\sin(\omega t + \varphi)$ depende del tiempo y, por tanto, se puede omitir, obteniéndose que:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (7.34)$$

Las soluciones de la Ecuación (7.34), distinta de la trivial, se obtienen resolviendo un problema de autovectores, en el que los autovalores se corresponden con el cuadrado de las frecuencias naturales de la estructura ω_n , y los autovectores con la forma del modo de vibración asociado $\mathbf{U}$. Las soluciones admisibles de este sistema están definidas por la siguiente igualdad:

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0 \quad (7.35)$$

La Ecuación (7.35) tiene N soluciones, tantas como el número de grados de libertad definidos en la estructura, que se corresponden con las frecuencias naturales $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_i, \dots, \omega_N\}$. Los N autovalores son positivos y reales ya que las matrices $\mathbf{M}$ y $\mathbf{K}$ también son reales, simétricas y definidas positivas.

La amplitud del movimiento $\mathbf{U}_i$, asociado a la frecuencia natural ω_i , se obtiene a partir de la matriz de rigidez dinámica definida como $\tilde{\mathbf{K}}_i = \mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}$:

$$\tilde{\mathbf{K}}_i \mathbf{U}_i = \mathbf{0} \quad (7.36)$$

La solución de esta ecuación está indeterminada, ya que se satisface idénticamente para la frecuencia natural ω_i . Por tanto, no es posible conocer la amplitud del movimiento. Sin embargo, sí se puede obtener la forma en la que vibra la estructura, o el *modo de vibración*, asumiendo un valor arbitrario para una de las componentes del vector $\mathbf{U}_i$.

Por ejemplo, si se asigna el valor $\mathbf{U}_i(1) = 1$ a la primera componente del autovector, es posible obtener el siguiente sistema a partir de la Ecuación (7.36):

$$\tilde{\mathbf{K}}_i \begin{Bmatrix} 1 \\ U_i(2) \\ \vdots \\ U_i(k) \\ \vdots \\ U_i(N) \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (7.37)$$

En este caso, la solución de este sistema hace posible determinar la forma del modo de vibración pero no su amplitud. El vector de desplazamiento $\mathbf{U}_i$ obtenido a partir de esta ecuación se corresponde con el i -ésimo modo de vibración de la estructura.

Los modos de vibración se pueden normalizar a la componente de mayor amplitud, definiéndose entonces como:

$$\phi_i = \begin{Bmatrix} \phi_i(1) \\ \phi_i(2) \\ \vdots \\ \phi_i(k) \\ \vdots \\ \phi_i(N) \end{Bmatrix} = \frac{1}{\max(\mathbf{U}_i)} \begin{Bmatrix} 1 \\ U_i(2) \\ \vdots \\ U_i(k) \\ \vdots \\ U_i(N) \end{Bmatrix} \quad (7.38)$$

En este caso, aunque el modo de vibración ϕ_i es un vector que determina la amplitud del movimiento en cualquier punto de la estructura, se opta por usar una notación simplificada sin usar la tipografía sin resaltar en negrita. También es común normalizar la forma de los modos de vibración respecto a la matriz de masa, imponiendo la condición $\phi_i^T \mathbf{M} \phi_i = 1$. Esta forma de normalizar presenta algunas ventajas desde un punto de vista computacional, como se verá en los siguientes apartados de este capítulo, pero inicialmente es más compleja de realizar.

7.4.1 Condición de ortogonalidad

Los modos de vibración presentan una propiedad útil para el análisis dinámico de estructuras. Esta propiedad es la condición de ortogonalidad, que establece que los modos de vibración son ortogonales tanto respecto de la matriz de masa como de la de rigidez, es decir, se cumple las condiciones $\phi_i^T \mathbf{M} \phi_j = 0$ y $\phi_i^T \mathbf{K} \phi_j = 0$.

Para demostrar esta propiedad, se particulariza la Ecuación (7.34) para el modo de vibración ϕ_i , obteniéndose que:

$$(\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}) \phi_i = \mathbf{0} \quad (7.39)$$

Es importante comprender que los modos de vibración definidos como $\mathbf{U}_i$ o ϕ_i no cambia la expresión anterior, ya que la amplitud está indeterminada en ambos casos.

La Ecuación 7.39 se modifica multiplicándola por la forma del modo de vibración ϕ_j^T y llevando el término asociado a la matriz de masa a la parte de la derecha:

$$\phi_j^T \mathbf{K} \phi_i = \omega_i^2 \phi_j^T \mathbf{M} \phi_i \quad (7.40)$$

y transponiendo esta ecuación, se obtiene la siguiente expresión:

$$\phi_i^T \mathbf{K} \phi_j = \omega_i^2 \phi_i^T \mathbf{M} \phi_j \quad (7.41)$$

donde, la transposición deja inalteradas las matrices de masa y rigidez ya que son simétricas, es decir, $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T$ y $\mathbf{K} = \mathbf{K}^T$.

Ahora, realizando un procedimiento similar para el modo de vibración ϕ_j se obtiene que:

$$\phi_i^T \mathbf{K} \phi_j = \omega_j^2 \phi_i^T \mathbf{M} \phi_j \quad (7.42)$$

Restando las Ecuaciones (7.41) y (7.42) se llega a la siguiente relación:

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2)\phi_i^T \mathbf{M}\phi_j = 0 \quad (7.43)$$

Esta condición se cumple cuando $\phi_i^T \mathbf{M}\phi_j = 0$ si $\omega_i^2 \neq \omega_j^2$. Del mismo modo, a partir de la Ecuación (7.41) ó (7.42) se obtiene también que $\phi_i^T \mathbf{K}\phi_j = 0$. Estas dos relaciones establecen que los modos de vibración son ortogonales respecto a las matrices de masa y rigidez, como se quería demostrar.

Además, cuando $\omega_i^2 = \omega_j^2$ se obtienen las siguientes expresiones:

$$m_i = \phi_i^T \mathbf{M}\phi_i \quad (7.44)$$

$$k_i = \phi_i^T \mathbf{K}\phi_i = \omega_i^2 m_i \quad (7.45)$$

donde, m_i y k_i son la masa modal y la rigidez modal asociadas al modo de vibración ϕ_i . La relación $k_i = \omega_i^2 m_i$ se puede deducir fácilmente si se sustituye la Ecuación (7.44) en (7.41), particularizada para $\phi_i = \phi_j$.

Ejemplo 7.4.1 A continuación, en este ejemplo se realiza el análisis modal de una edificación de tres plantas de altura como la mostrada en la Figura 7.6.(a), en la que los forjados de cada planta están sustentados por dos pilares.

La modelización de la estructura se basa en las siguientes hipótesis: *i*) la rigidez axial de los pilares es mayor que la rigidez transversal y, por tanto, los modos de vibración asociados a movimientos axiales tendrán frecuencias naturales mayores; *ii*) la rigidez de los forjados en su propio plano es muy superior a la de los pilares y, por tanto; *iii*) la rotación de las cabezas de los pilares puede suponerse nula. Estas hipótesis permiten simplificar la estructura para obtener sólo los modos de vibración relacionados con movimientos horizontales de los forjados.

El análisis sísmico de estructuras adopta estas hipótesis para formular modelos simplificados como se puede consultar en la Norma de Construcción Sismorresistente (NCSE-02).

Las propiedades de la estructura de este ejemplo son las siguientes: altura de la planta $L = 4$ m, masa del forjado $\bar{m} = 4900$ kg, área de cada pilar $A = 91$ cm², inercia de cada pilar $I = 8091$ cm⁴, módulo elástico $E = 210$ GPa, y densidad de los pilares $\rho = 7850$ kg/m³.

Solución. La simplificaciones del problema permiten considerar un modelo de viga con masas concentradas para los forjados (Figura 7.6.(b)). En este modelo se define un pilar de sección equivalente en cada planta, con una masa concentrada en la parte superior del pilar que representa la masa del forjado. Además, en estos puntos se concentrará la mitad de la masa de cada pilar.

Las hipótesis realizadas permiten anular el desplazamiento longitudinal y la rotación de las cabezas de los pilares. De esta forma, el comportamiento dinámico de la estructura se describe mediante un modelo de tres grados de libertad, correspondientes a las traslaciones

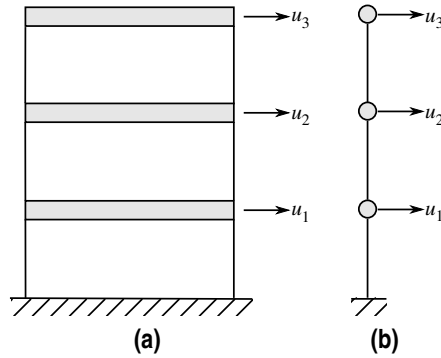


Figura 7.6 (a) Representación esquemática de una estructura de tres grados de libertad. (b) Modelo equivalente de masas concentradas.

de los forjados. Por tanto, la matriz de rigidez del sistema es:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 4k_p & -2k_p & 0 \\ -2k_p & 4k_p & -2k_p \\ 0 & -2k_p & 2k_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.27 & -0.64 & 0 \\ -0.64 & 1.27 & -0.64 \\ 0 & -0.64 & 0.64 \end{bmatrix} \times 10^7 \text{ N/m}$$

donde, $k_p = 12EI/L^3$ es la rigidez asociada al movimiento transversal de cada pilar.

La matriz de masa puede calcularse mediante un modelo de masas concentradas que tiene en cuenta la masa de los forjados y la masa $m_p = \rho AL$ de los pilares, como:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 4m_p/2 + \bar{m} & 0 & 0 \\ 0 & 4m_p/2 + \bar{m} & 0 \\ 0 & 0 & 2m_p/2 + \bar{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.47 & 0 & 0 \\ 0 & 5.47 & 0 \\ 0 & 0 & 5.19 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ kg}$$

La solución del problema de autovalores dado por la Ecuación (7.35) proporciona los valores de las frecuencias naturales $f_n = \{2.4, 6.8, 9.8\}$ Hz. Los modos de vibración asociados a estas frecuencias se calculan mediante la Ecuación (7.36), obteniéndose que:

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 0.45 \\ 0.80 \\ 1.00 \end{Bmatrix}, \quad \phi_2 = \begin{Bmatrix} 1.00 \\ 0.42 \\ -0.82 \end{Bmatrix}, \quad \phi_3 = \begin{Bmatrix} -0.79 \\ 1.00 \\ -0.46 \end{Bmatrix}$$

En la Figura 7.7 se representa la forma de los modos de vibración de la estructura. La deformada de los pilares en cada modo de vibración se ha representado teniendo en cuenta que el giro es nulo en la unión con los forjados.

La solución del problema de autovalores puede obtenerse utilizando el programa MATLAB mediante el comando $[V, D] = \text{eigs}(K, M)$, donde V son los autovectores y D los autovalores. Los autovectores que se obtienen de esta forma están normalizados a la matriz de masa.

El Código 7.1 recoge el listado de comandos que permite resolver el problema utilizando el programa de elementos finitos ANSYS. La estructura se representa como un modelo

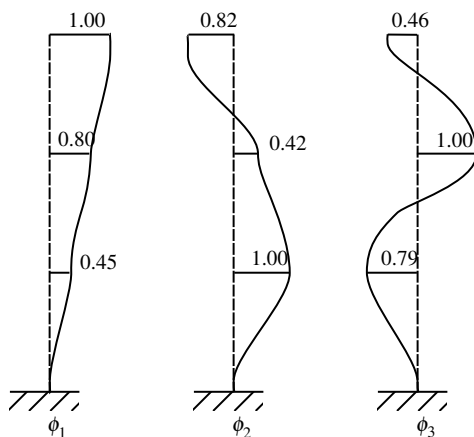


Figura 7.7 Modos de vibración de la edificación.

masa-muelle de tres grados de libertad, asociados a los desplazamientos horizontales de los forjados, donde la constante de rigidez cada elemento representa la rigidez de los pilares y la masas puntuales se corresponden con la masa de los forjados.

Los elementos LINK11 y MASS21 permiten representar el comportamiento de los pilares y de la masas concentradas de los forjados. Las propiedades del elemento LINK11 definen la rigidez y la masa del pilar. El modelo de la estructura se define mediante tres elementos LINK11 y tres elementos MASS21, que se han generado utilizando un modelo masa-muelle como un patrón para definir la estructura completa mediante el comando EGEN.

El resultado de análisis modal también proporciona información relativa a la contribución de cada modo en la respuesta de la estructura. En la Tabla 7.1 se muestran los resultados que recoge la ventana de salida de ANSYS. Además de la frecuencia natural y el periodo de cada modo, en esta tabla se calcula el factor de participación modal mediante la siguiente expresión:

$$\gamma_i = \phi_i^T \mathbf{M} \mathbf{d} \quad (7.46)$$

donde, $\mathbf{d}$ es un vector que describe la dirección de la excitación.

Así mismo, se describe la masa efectiva modal como:

$$M_{ei} = \frac{\gamma_i^2}{\phi_i^T \mathbf{M} \phi_i} = \frac{\gamma_i^2}{m_i} \quad (7.47)$$

La definición de la masa efectiva modal coincide con el cuadrado del factor de participación si la forma de los modos de vibración está normalizada a la matriz de masa, es decir, si $m_i = \phi_i^T \mathbf{M} \phi_i = 1$.

En la Tabla 7.1 también aparece la fracción de masa acumulada para el modo i -ésimo, definida como $\hat{M}_{ei} = \sum_{j=1}^i M_{ej} / \sum_{j=1}^N M_{ej}$, donde N es el número total de modos. El resto de parámetros hacen referencia a la ratio entre los factores de participación modal respecto al primer modo de vibración y a la ratio de la masa modal efectiva respecto a la masa total

de la estructura. Estos conceptos como se verán en mayor profundidad en los siguientes apartados de este capítulo.

Tabla 7.1 Factor de participación modal (masa total $M_T = 16414$ kg).

Modo	f_n [Hz]	T_n [s]	γ	Ratio γ_1	M_e [kg]	$\hat{M}_e$	Ratio M_T
1	2.45	0.41	121.49	1.00	14758.8	0.92	0.90
2	6.84	0.15	34.596	0.29	1196.19	0.99	0.073
3	9.82	0.10	-13.18	0.11	173.79	1.00	0.011
Suma					16128.7		0.98

Código 7.1 Listado de comandos de ANSYS para realizar el análisis modal de una edificación de tres plantas.

```

/prep7
! tipo de elemento
et ,1, link 11
et ,2, mass21
! propiedades pilar
r,1,6.3717e+06,,571.4800
! masa forjado
r,2,4900
! elementos
n ,1,,
n ,2,1,
type,1
real ,1
e,1,2
type,2
real ,2
e,2
egen, 3, 1, 1, 2, , , , , , 1
! condiciones de contorno
d, all, uy, , , , , uz
d,1,ux

/solu
antype,modal          ! análisis modal
modopt,lanb,3
mxpand,3,,,yes
outpr ,basic ,1
solve
finish

```

7.4.2 Matriz de amortiguamiento proporcional

En el apartado anterior se ha demostrado la condición de ortogonalidad, que establece que los modos de vibración son ortogonales respecto de las matrices de masa y rigidez.

Esta propiedad es muy relevante para el análisis dinámico de una estructura como se verá en la próxima sección de este capítulo. Sin embargo, es necesaria una formulación de la matriz de amortiguamiento para tener completamente definida la ecuación de equilibrio de la estructura. Aunque no se puede probar que los modos de vibración de una estructura sean también ortogonales respecto de la matriz de amortiguamiento, es posible definir una expresión para ésta que cumpla la condición de ortogonalidad.

En este sentido, la forma más sencilla de identificar esta matriz es calcularla proporcionalmente a las matrices de masa y rigidez, ya que ambas verifican la condición de ortogonalidad. La aproximación de la matriz de amortiguamiento proporcional a las matrices de masa y rigidez recibe el nombre de *modelo de amortiguamiento de Rayleigh*. De esta forma, se puede definir la siguiente expresión para obtener una matriz de amortiguamiento proporcional:

$$\mathbf{C} = \alpha_0 \mathbf{M} + \alpha_1 \mathbf{K} \quad (7.48)$$

donde α_0 y α_1 son las constantes de proporcionalidad que tienen como unidades s^{-1} y s , respectivamente. Este procedimiento es ventajoso ya que la matriz de amortiguamiento calculada de esta forma es ortogonal respecto a los modos de vibración.

Por ejemplo, el amortiguamiento modal del modo i se define como:

$$\begin{aligned} c_i &= \phi_i^T \mathbf{C} \phi_i = \alpha_0 \phi_i^T \mathbf{M} \phi_i + \alpha_1 \phi_i^T \mathbf{K} \phi_i \\ &= \alpha_0 m_i + \alpha_1 k_i \\ &= \alpha_0 m_i + \alpha_1 \omega_i^2 m_i \end{aligned} \quad (7.49)$$

Esta expresión también puede escribirse en función del factor de amortiguamiento modal ζ_i :

$$\zeta_i = \frac{c_i}{2m_i\omega_i} = \alpha_0 \frac{1}{2\omega_i} + \alpha_1 \frac{\omega_i}{2} \quad (7.50)$$

La simple inspección de la relación anterior sugiere que las constantes de proporcionalidad se evaluarán a partir del factor de amortiguamiento ζ_i y ζ_j definidos para los modos de vibración ϕ_i y ϕ_j :

$$\begin{Bmatrix} \zeta_i \\ \zeta_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\omega_i & \omega_i \\ 1/\omega_j & \omega_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{Bmatrix} \quad (7.51)$$

La solución de este sistema de ecuaciones es:

$$\begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{Bmatrix} = \frac{2\omega_i\omega_j}{\omega_i^2 - \omega_j^2} \begin{bmatrix} \omega_j & -\omega_i \\ -1/\omega_j & 1/\omega_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \zeta_i \\ \zeta_j \end{Bmatrix} \quad (7.52)$$

La matriz de amortiguamiento se evalúa una vez que se han calculado las constantes de proporcionalidad.

Dado que rara vez se dispone de información detallada sobre la variación de los factores de amortiguamiento con la frecuencia, generalmente, se supone un valor constante del

factor de amortiguamiento modal $\zeta = \zeta_i = \zeta_j$. Asimismo, algunos estándares normativos proporcionan valores del factor de amortiguamiento. Por ejemplo, la Instrucción de acciones a considerar en puentes de ferrocarril (IAPF) establece que el factor de amortiguamiento en puentes de hormigón con luces mayores de 20m es el 2 %. También, la Instrucción de Acero Estructural (EAE) establece que en edificios con estructura de acero el factor de amortiguamiento puede tomarse del 3 %.

Por tanto, asumiendo un valor constante del factor de amortiguamiento modal las constantes de proporcionalidad quedan definidas por la siguiente expresión:

$$\begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{Bmatrix} = \frac{2\zeta}{\omega_i + \omega_j} \begin{Bmatrix} \omega_i \omega_j \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (7.53)$$

El factor de amortiguamiento calculado depende de la frecuencia natural de cada modo como se muestra en la Figura 7.8. La aproximación de la Ecuación (7.50) indica que el factor de amortiguamiento es inversamente proporcional a la frecuencia natural en sistemas en los que la rigidez permanezca constante, y directamente proporcional a la frecuencia natural en sistemas donde la masa modal no cambie.

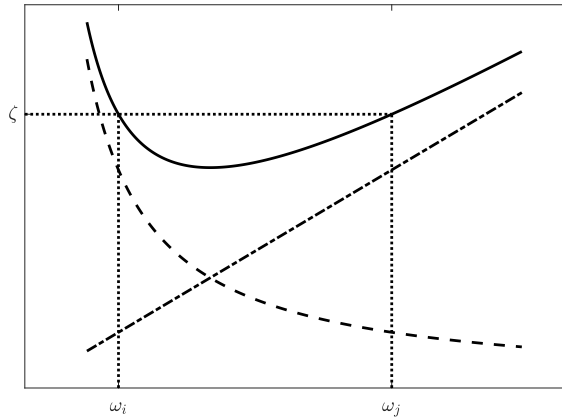


Figura 7.8 Factor de amortiguamiento modal: (línea continua) modelo de Rayleigh (línea de trazos) proporcional a la matriz de masa y (línea de trazos y puntos) proporcional a la matriz de rigidez.

La estimación de las constantes α_0 y α_1 suele realizarse haciendo $\omega_i = \omega_1$, y ω_j igual a la frecuencia natural del modo de mayor orden que contribuye de una forma significativa a la respuesta dinámica de la estructura. Los modos con frecuencias naturales entre estas dos tendrán valores del factor de amortiguamiento algo más bajos, mientras que todos los modos con frecuencias mayores que ω_j tendrán un valor de ζ que aumenta monótonicamente con la frecuencia. El resultado de esta situación es una baja contribución de los modos de mayor orden debido al elevado amortiguamiento estimado.

Ejemplo 7.4.2 Calcular las constantes de proporcionalidad del modelo de amortiguamiento de Rayleigh para la estructura del Ejemplo 7.4.1, considerando un factor de amortiguamiento modal $\zeta = 2\%$ para la estructura.

Solución. El análisis modal de la estructura del Ejemplo 7.4.1 dio como resultados unas frecuencias naturales $\omega_n = \{15.41, 42.96, 61.68\}^T$ rad/s. Por tanto, el cálculo de las constantes de proporcionalidad en el modelo de amortiguamiento de Rayleigh seleccionando $\omega_i = \omega_1$ y $\omega_j = \omega_3$ resulta:

$$\begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{Bmatrix} = 2 \frac{\zeta}{\omega_1 + \omega_3} \begin{Bmatrix} \omega_1 \omega_3 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.4931 \\ 0.0005 \end{Bmatrix}$$

El factor de amortiguamiento para el segundo modo de la estructura se puede calcular a partir de la Ecuación (7.50), obteniéndose $\zeta_2 = 1.69\%$.

7.4.3 Actualización de modelos numéricos

El diseño y el análisis estructural se realiza comúnmente con el MEF. No obstante, en general, los datos experimentales obtenidos en pruebas de carga u otros ensayos, reflejan más adecuadamente que los resultados numéricos el comportamiento real de la estructura.

La actualización de modelos consiste en mejorar el modelo de EF, ajustándolo a lo medido experimentalmente. Las medidas que se suelen usar más frecuentemente para actualizar los modelos son las frecuencias naturales y los modos de vibración. También se usan, fundamentalmente en ingeniería mecánica y aeronáutica, las Funciones de Respuesta en Frecuencia (FRF). En ingeniería civil, las FRF son más difíciles de medir.

La Figura 7.9 muestra la metodología que se sigue para la mejora de un modelo numérico. Esta técnica se puede aplicar para identificar propiedades desconocidas en estructuras y, también, para la localización y cuantificación de daños, mediante un seguimiento de la evolución de las propiedades a lo largo de su vida útil.

Para comparar los modos de vibración obtenidos numéricamente y experimentalmente, normalmente se usan dos índices: MAC y COMAC:

$$MAC(\phi_{num,k}, \phi_{exp,j}) = \frac{(\phi_{num,k}^T \phi_{exp,j})^2}{(\phi_{num,k}^T \phi_{num,k})(\phi_{exp,j}^T \phi_{exp,j})} \quad (7.54)$$

$$COMAC(i) = \frac{\left(\sum_{j=1}^n \phi_{num,j}^i \phi_{exp,j}^i \right)^2}{\sum_{j=1}^n \left(\phi_{num,j}^i \right)^2 \sum_{j=1}^n \left(\phi_{exp,j}^i \right)^2} \quad (7.55)$$

donde $\phi_{xxx,k}$ es el modo k y $\phi_{xxx,k}^i$ es la componente i del modo k , o bien de los resultados numéricos (*num*), o bien de los resultados experimentales (*exp*).

MAC y *COMAC* comparan los vectores que representan los modos de vibración obtenidos. Teniendo en cuenta las propiedades de los modos de vibración, la matriz que resulta al calcular los valores del *MAC*, de dimensiones $n \times n$ donde n es el número de modos de vibración considerados, para todos los modos debe ser de diagonal dominante. Si el

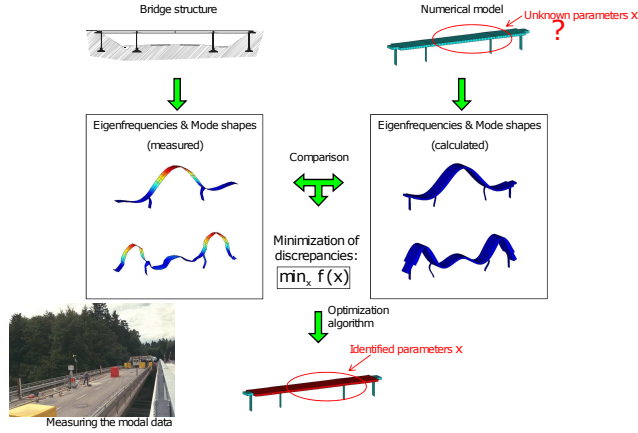


Figura 7.9 Metodología para la actualización de modelos. Fuente: Inverse modelling of civil engineering structures based on operational modal data. Ph.D Thesis. Anne Teughels. Department of Civil Engineering K.U.Leuven. Promotor: prof.dr.ir. Guido De Roeck..

acuerdo es perfecto, los valores de la diagonal deben ser 1, y los valores de fuera de la diagonal 0. Si sólo se obtienen los términos de la diagonal de la matriz, se habla de índice *AutoMAC*.

El índice *MAC* proporciona un valor global de la comparación entre los resultados numéricos y experimentales, pero no indica la zona del modelo en la que la aproximación requiere mejorar. Para ello se usa el *COMAC*. El índice *COMAC* también resulta una matriz, en este caso con una dimensión igual al número de coordenadas modales consideradas (en la práctica, el número de acelerómetros). De igual modo que el *MAC*, el *COMAC* también debe resultar una matriz de diagonal dominante.

La función que se minimiza para obtener las propiedades que presentan incertidumbres es la siguiente:

$$f(\theta) = \frac{1}{2} \sum_k (r_k(\theta))^2 \quad (7.56)$$

donde pueden entrar dentro del proceso de minimización los siguientes parámetros:

1. Diferencia entre frecuencias naturales

$$r_f(\theta) = \frac{\omega_{num,j}(\theta) - \omega_{exp,j}}{\omega_{exp,j}} \quad (7.57)$$

$\omega_{num,j}(\theta)$ es la frecuencia natural j obtenida numéricamente y $\omega_{exp,j}$ es la correspondiente frecuencia experimental.

2. Diferencia entre modos de vibración

$$r_s(\theta) = \frac{\phi_{num,j}^l(\theta) - \phi_{exp,j}^l}{\phi_{exp,j}^l} \quad (7.58)$$

$\phi_{num,j}^l(\theta)$ es la componente l del modo de vibración j obtenido numéricamente y $\phi_{exp,j}^l$ es la correspondiente componente del modo j medido.

3. Diferencia normalizada entre modos de vibración

$$r_m(\theta) = \sqrt{\frac{1 - MAC(\phi_{num,j}, \phi_{exp,i})}{MAC(\phi_{num,j}, \phi_{exp,i})}} \quad (7.59)$$

con la posibilidad de ponderar cada uno de los términos de $r_k(\theta)$ según su importancia.

7.5 Superposición modal

En la sección anterior se ha caracterizado el comportamiento dinámico de una estructura mediante los parámetros modales de ésta, es decir, frecuencias naturales y modos de vibración. Los modos de vibración se obtienen de la solución de un problema de autovalores y, por tanto, forman una base ortogonal que permiten expresar los desplazamientos de una estructura como una combinación lineal de los modos de vibración:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= Y_1(t)\phi_1(\mathbf{x}) + Y_2(t)\phi_2(\mathbf{x}) + \cdots + Y_i(t)\phi_i(\mathbf{x}) + \cdots + Y_N(t)\phi_N(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{i=1}^N Y_i(t)\phi_i(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x})\mathbf{Y}(t) \end{aligned} \quad (7.60)$$

donde, $\Phi = [\phi_1 | \phi_2 | \cdots | \phi_i | \cdots | \phi_N]$ es la matriz de modos que permite relacionar los desplazamientos de la estructura con el vector de *coordenadas modales* $\mathbf{Y} = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_i, \dots, Y_N\}^T$.

Las componentes del vector de coordenadas modales $\mathbf{Y}$ se pueden determinar a partir de los desplazamientos de la estructura, multiplicando la Ecuación (7.60) por $\phi_i^T \mathbf{M}$:

$$\begin{aligned} \phi_i^T \mathbf{M} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \phi_i^T \mathbf{M} Y_1(t) \phi_1(\mathbf{x}) + \phi_i^T \mathbf{M} Y_2(t) \phi_2(\mathbf{x}) + \cdots + \phi_i^T \mathbf{M} Y_i(t) \phi_i(\mathbf{x}) + \cdots \\ &+ \phi_i^T \mathbf{M} Y_N(t) \phi_N(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (7.61)$$

Los términos de la Ecuación (7.61), de acuerdo a la condición de ortogonalidad de los modos de vibración, son todos nulos excepto el término asociado a la masa modal m_i , obteniéndose que:

$$\phi_i^T \mathbf{M} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \phi_i^T \mathbf{M} Y_i(t) \phi_i(\mathbf{x}) = m_i Y_i(t) \quad (7.62)$$

y, por tanto:

$$Y_i(t) = \frac{\phi_i^T \mathbf{M} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{m_i} \quad (7.63)$$

La expresión de la coordenada modal $Y_i(t)$ definida por la Ecuación (7.63) permite conocer la contribución del modo de vibración ϕ_i a la respuesta total de la estructura $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. En general, el objeto de la superposición modal no consistirá en determinar estas contribuciones conocida la respuesta de la estructura, sino en conocer los desplazamientos $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ a partir de la Ecuación (7.60).

La ecuación de equilibrio en vibración forzada para un sistema no amortiguado establece que:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (7.64)$$

Sustituyendo la expresión de los desplazamientos definida por la Ecuación (7.60), y sus derivadas temporales, en la ecuación de equilibrio se obtiene:

$$\mathbf{M}\Phi(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{Y}}(t) + \mathbf{K}\Phi(\mathbf{x})\mathbf{Y}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (7.65)$$

Esta expresión de la ecuación de equilibrio puede formularse como un sistema desacoplado de N ecuaciones multiplicando por ϕ_i^T :

$$\phi_i^T \mathbf{M}\Phi(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{Y}}(t) + \phi_i^T \mathbf{K}\Phi(\mathbf{x})\mathbf{Y}(t) = \phi_i^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (7.66)$$

y, considerando la condición de ortogonalidad de los modos de vibración, se puede reescribir como:

$$m_i \ddot{Y}_i(t) + k_i Y_i(t) = f_i(t) \quad (7.67)$$

donde, la expresión anterior define la ecuación de equilibrio de un sistema de un grado de libertad cuyas propiedades son la masa y la rigidez modal, y la incógnita es la evolución temporal de la coordenada modal $Y_i(t)$. Este procedimiento se puede generalizar para todos los modos de vibración obteniéndose un sistema desacoplado de N ecuaciones con N incógnitas, en el que cada ecuación representa a un sistema de un grado de libertad:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{Y}_1(t) + k_1 Y_1(t) &= f_1(t) \\ m_2 \ddot{Y}_2(t) + k_2 Y_2(t) &= f_2(t) \\ \dots & \\ m_i \ddot{Y}_i(t) + k_i Y_i(t) &= f_i(t) \\ \dots & \\ m_N \ddot{Y}_N(t) + k_N Y_N(t) &= f_N(t) \end{aligned} \quad (7.68)$$

y, de forma matricial se expresa como:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} m_1 & & & & \\ & m_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & m_i & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & m_N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{Y}_1(t) \\ \ddot{Y}_2(t) \\ \vdots \\ \ddot{Y}_i(t) \\ \vdots \\ \ddot{Y}_N(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & & & & \\ & k_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & k_i & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & k_N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \\ \vdots \\ Y_i(t) \\ \vdots \\ Y_N(t) \end{Bmatrix} \\
 &= \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_i(t) \\ \vdots \\ f_N(t) \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{7.69}$$

El sistema de N ecuaciones diferenciales desacopladas con N incógnitas es más sencillo de resolver que el sistema completo definido por la Ecuación (7.64), ya que cada ecuación diferencial se resuelve independientemente de las otras. Además, en condiciones normales, la respuesta de una estructura se puede aproximar por un número de modos de vibración reducido, por lo que, en general, el número de sistemas que se resuelven mediante superposición modal son más reducidos que en el caso de la solución completa.

7.5.1 Amortiguamiento

En el apartado anterior se ha resuelto la ecuación de equilibrio de una estructura aplicando superposición modal, lo que posibilita simplificar la resolución de un sistema de N ecuaciones diferenciales acopladas en otro sistema ecuaciones del mismo tamaño pero que están desacopladas.

La Ecuación (7.67) se puede extender para considerar el efecto del amortiguamiento de la estructura si se asume que los modos de vibración también son ortogonales respecto a la matriz de amortiguamiento $\mathbf{C}$, es decir, se puede obtener un amortiguamiento modal tal que $c_i = \phi_i^T \mathbf{C} \phi_i$. Esta aproximación no se cumple en general, aunque es posible obtener una matriz de amortiguamiento proporcional a las matrices de masa y rigidez que sí cumple con la condición de ortogonalidad como se verá en este capítulo.

En este caso, la Ecuación (7.67) se reescribe de la siguiente forma:

$$m_i \ddot{Y}_i(t) + c_i \dot{Y}_i(t) + k_i Y_i(t) = f_i(t) \tag{7.70}$$

o también como:

$$\ddot{Y}_i(t) + 2\zeta_i \omega_i \dot{Y}_i(t) + \omega_i^2 Y_i(t) = f_i(t)/m_i \tag{7.71}$$

donde, la expresión anterior representa la ecuación de equilibrio del modo de vibración ϕ_i en coordenadas modales. Esta expresión es similar a la Ecuación (6.24) definida para el sistema de un grado de libertad, donde $\zeta_i = c_i/2\omega_i m_i$ se define como el factor de amortiguamiento modal viscoso. La definición del factor de amortiguamiento modal resulta ventajosa, ya que en muchas ocasiones es posible determinar este factor experimentalmente en una estructura.

La solución de la Ecuación (7.71) puede expresarse mediante la integral de Duhamel como:

$$Y_i(t) = \frac{1}{m_i \omega_{Di}} \int_0^t f_i(\tau) \exp(-\zeta_i \omega_i(t - \tau)) \sin(\omega_{Di}(t - \tau)) d\tau \quad (7.72)$$

o, de forma similar:

$$Y_i(t) = \int_0^t f_i(\tau) h_i(t - \tau) d\tau \quad (7.73)$$

donde $h_i(t - \tau)$ es la respuesta temporal del sistema de un grado de libertad producida por un impulso que sigue una delta de Dirac $\delta(t - \tau)$ en el instante de tiempo τ :

$$h_i(t - \tau) = \frac{1}{m_i \omega_{Di}} \exp(-\zeta_i \omega_i(t - \tau)) \sin(\omega_{Di}(t - \tau)) \quad (7.74)$$

La expresión anterior se denomina la *función de respuesta al impulso* (FRI). La introducción de esta función permite expresar la fuerza que actúa sobre el sistema como una superposición de impulsos de amplitud variable desfasado temporalmente $(t - \tau)$, asumiendo que entre cada impulso hay un intervalo de tiempo $\Delta\tau$:

$$f_i(t) = \sum_{\tau < t} f_i(\tau) \Delta\tau \delta(t - \tau) \quad (7.75)$$

Entonces, la respuesta del sistema se expresa aplicando el principio de superposición para cada impulso como:

$$Y_i(t) = \sum_{\tau < t} f_i(\tau) \Delta\tau h_i(t - \tau) \quad (7.76)$$

La respuesta del sistema se escribe de forma integral cuando intervalo de tiempo $\Delta\tau$ tiende a cero, obteniéndose la definición de la integral de Duhamel (Ecuación (7.73)).

Por tanto, el cálculo de la FRI tiene un interés importante en el análisis dinámico de una estructura aplicando la técnica de superposición modal. La implementación en MATLAB de esta función se encuentra en el Código 7.2. Esta función se usará posteriormente en algunos ejemplos de este capítulo.

Hasta ahora, en este apartado, se ha asumido que las condiciones iniciales de la estructura son nulas. Si existen condiciones iniciales no nulas, la respuesta se puede obtener como la superposición del sistema en vibración forzada y la producida por la condiciones iniciales. En el apartado 6.4 se obtuvo la respuesta de un sistema de un grado de libertad en vibración

libre con condiciones iniciales. Esta solución permite definir la respuesta del sistema como:

$$Y_i(t) = \left[Y_{i0} \cos(\omega_{Di}t) + \left(\frac{\dot{Y}_{i0} + Y_{i0}\zeta_i\omega_i}{\omega_{Di}} \right) \sin(\omega_{Di}t) \right] e^{-\zeta_i\omega_i t} \quad (7.77)$$

siendo:

$$Y_{i0} = \frac{\phi_i^T \mathbf{Mu}(0)}{m_i} \quad (7.78a)$$

$$\dot{Y}_{i0} = \frac{\phi_i^T \mathbf{M}\dot{\mathbf{u}}(0)}{m_i} \quad (7.78b)$$

La respuesta total del sistema se obtiene sumando la Ecuación (7.77) a la Ecuación (7.72).

Código 7.2 Función `fri.m` (MATLAB) para calcular la Función de Respuesta un Impulso de un sistema de un grado de libertad.

```
function h=fri(m,w,z,t)

% h: función respuesta impulso
% m: masa
% w: frecuencia natural
% z: factor amortiguamiento
% t: vector tiempo

wD=w*sqrt(1-z^2);
h=1/(m*wD)*exp(-z*w*t).*sin(wD*t);
```

Ejemplo 7.5.1 Calcular la respuesta de un sistema de un grado de libertad de masa $m = 1$ kg, frecuencia natural $\omega = 2\pi$ rad/s y factor de amortiguamiento $\zeta = 0.02$, que está solicitado por un escalón de fuerza definido por $f(t) = H(10T - t)$, $t \geq 0$, donde T es el periodo fundamental del sistema.

Solución. La respuesta temporal de un sistema de un grado de libertad se puede calcular mediante la integral de Duhamel según la Ecuación (7.72). La integral de Duhamel es una convolución que establece la siguiente relación para el paso de tiempo $t_n = n\Delta t$ de acuerdo a la Ecuación (7.76):

$$u_n = \sum_{m=1}^n f_m \Delta t h_{n-m+1} \quad (7.79)$$

Por ejemplo,

$$\begin{aligned}
 u_1 &= (f_1 h_1) \Delta t \\
 u_2 &= (f_1 h_2 + f_2 h_1) \Delta t \\
 u_3 &= (f_1 h_3 + f_2 h_2 + f_3 h_1) \Delta t \\
 &\dots \\
 u_n &= (f_1 h_n + f_2 h_{n-1} + \dots + f_{n-1} h_2 + f_n h_1) \Delta t
 \end{aligned}$$

En este problema, la solución se va a calcular para un tiempo máximo igual a $20T$, siendo $T = 2\pi/\omega$ el periodo fundamental del sistema. De esta forma, se podrá estudiar la evolución temporal del sistema durante un número de ciclos suficiente. El paso de tiempo Δt se selecciona para que la respuesta se evalúe al menos 20 veces por periodo, es decir, $\Delta t = T/20$ y, de este modo, se asegura una representación adecuada de los desplazamientos del sistema en cada periodo de oscilación.

La función escalón de Heaviside se define como:

$$H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

En la Figura 7.10.(a) se representa la evolución temporal de la FRI. La respuesta del sistema alcanza la máxima amplitud en el primer ciclo y en cada periodo sucesivo se atenúa por el efecto del amortiguamiento. La solución al escalón de fuerza presenta, en primer lugar, un régimen transitorio en el que el sistema vibra entorno a la posición de equilibrio estático dada por $u_{sta} = 1/m\omega^2 = 1/k = 0.025\text{ m}$ y, una vez cesa la acción de la carga, se produce una nueva perturbación que hace que el sistema vibre entorno a cero.

En el Código 7.3 se muestra la rutina escrita en MATLAB que se ha empleado en el cálculo de la respuesta del sistema. Esta rutina llama a la función `fri.m` (Código 7.2).

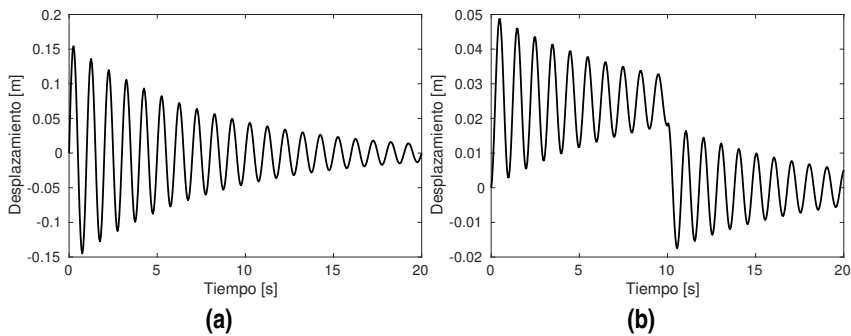


Figura 7.10 (a) Función de respuesta a un impulso y (b) respuesta de un sistema de un grado de libertad producida por un escalón de fuerza.

Código 7.3 Listado de comandos de MATLAB para calcular la función de respuesta al impulso y la FRF de un sistema de un grado de libertad.

```
% parámetros
m=1; w=2*pi; zeta=0.02;

% vector tiempo
T=2*pi/w; dt=T/20; t=0:dt:20*T;
N=length(t);

% función respuesta impulso
h=fri(m,w,zeta,t);

% respuesta vibración forzada
p=zeros(1,N); p(t<=10*T)=1;

% integral Duhamel
Y=zeros(1,N);
for i=1:N
    Y(i)=sum(p(1:i).*h(i:-1:1)).*dt;
end
```

Ejemplo 7.5.2 Calcular la evolución temporal del desplazamiento de la planta superior de la estructura del Ejemplo 7.4.1 producida por una fuerza $F(t) = \{1, 2, 3\}^T H(2-t)N$. Considerar un factor de amortiguamiento $\zeta = 0.02$ para todos los modos de vibración.

Solución. El análisis modal de la estructura del Ejemplo 7.4.1 dio como resultados unas frecuencias naturales $\omega_n = \{15.41, 42.96, 61.68\}^T$ rad/s y unos modos de vibración normalizados a la matriz de masa:

$$\Phi = \begin{bmatrix} -0.0045 & 0.0100 & -0.0079 \\ -0.0081 & 0.0042 & 0.0100 \\ -0.0101 & -0.0083 & -0.0048 \end{bmatrix}$$

La masa modal para todos los modos es $m_i = \phi_i^T \mathbf{M} \phi_i = 1$ y la rigidez modal se calcula fácilmente como $k_i = m_i \omega_i^2 = \omega_i^2$.

El desplazamiento de la planta superior se calcula siguiendo el siguiente procedimiento para cada modo de vibración: *i*) cálculo de la función de respuesta al impulso $h_i(t)$; *ii*) cálculo del término de fuerza modal $f_i = \phi_i^T F$; *iii*) solución del sistema de un grado de libertad asociado a la coordenada modal $Y_i(t)$; y *iv*) superposición del término $\phi_i(\mathbf{x})Y_i(t)$ al vector de desplazamientos $\mathbf{u}_i(\mathbf{x}, t)$. Este procedimiento se puede programar fácilmente en MATLAB adaptando el Código 7.3.

En la Figura 7.11 se representa la evolución temporal de las coordenada modales de la estructura. Los resultados calculados muestran que la amplitud de la coordenada es menor a medida que aumenta el orden del modo de vibración y, que así mismo, se amortigua más rápido para modos de orden superior a causa de la frecuencia natural asociada. Esto se hace evidente al estudiar el desplazamiento de la planta superior de la estructura (Figura 7.12), en el que la respuesta sigue una evolución temporal con un periodo característico asociado al primer modo de vibración.

Para hacer un análisis transitorio mediante superposición modal en ANSYS hay que resolver, en primer lugar, un análisis modal de la estructura, extrayendo todos los modos que contribuyen significativamente en la respuesta del sistema. Posteriormente, los modos extraídos se usarán para calcular la respuesta de la estructura. El amortiguamiento se especifica mediante la orden DMPRAT si es constante para todos los modos de vibración o se pueden utilizar otras alternativas como las que se recogen en el manual de ayuda del programa. El paso de tiempo y el tiempo final se especifican utilizando los comandos DELTIM y TIME, respectivamente. En el Código 7.4 se recogen el listado de órdenes para resolver este ejemplo.

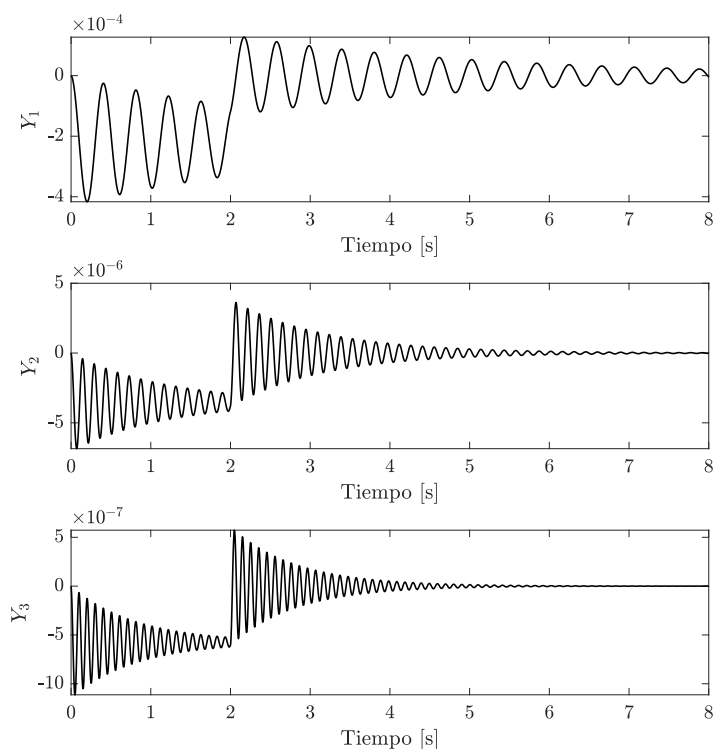


Figura 7.11 Evolución temporal de las coordenada modales de la estructura.

Código 7.4 Listado de comandos de ANSYS para realizar el análisis dinámico mediante superposición modal de una edificación de tres plantas.

```
/prep7
! tipo de elemento
et ,1, link 11
et ,2, mass21
! propiedades pilar
r ,1,6.3717 e+06,,571.4800
```

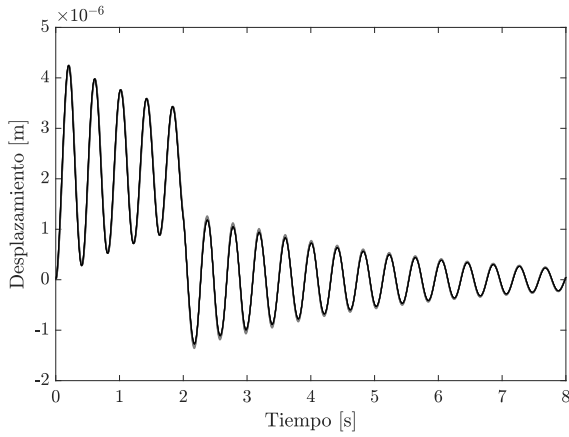


Figura 7.12 Evolución temporal del desplazamiento de la planta superior de la estructura.

```

! masa forjado
r,2,4900
! elementos
n,1,,
n,2,1,
type,1
real,1
e,1,2
type,2
real,2
e,2
egen, 3, 1, 1, 2, , , , , 1
! condiciones de contorno
d, all, uy, , , , , uz
d,1,ux

/solu
antype,modal          ! análisis modal
modopt,lanb,3
mxpand,3,,,yes
outpr,basic,1
solve
finish
! Análisis transitorio
/solu
antype,trans
trnopt,msup,3  ! superposición modal
deltim,0.0051  ! paso de tiempo
dmprat, 0.02
kbc,1          ! condiciones iniciales
solve
time,2         ! fuerza en t=2 s
f,2,fx,1
f,3,fx,2
f,4,fx,3
solve
    
```

```

time,8      ! fuerza en t=8 s
fdele , all
solve
finish
! postproceso
/post26
file , , rdsp
nsol ,2,4, u,x,u3
plvar ,2,

```

7.6 Análisis modal espectral

En la Sección 6.8 se ha estudiado la respuesta de un sistema de un grado de libertad producida por la excitación de la base descomponiendo los desplazamientos totales $u_t(t)$ en la superposición de los desplazamientos de la base $u_s(t)$ y los desplazamientos producidos por la deformación del sistema $u(t)$. En esta sección se extiende el análisis al caso de una estructura con N grados de libertad.

En este caso, los desplazamientos totales de la estructura se expresan de forma similar al caso de un grado de libertad:

$$\mathbf{u}_t(\mathbf{x},t) = \mathbf{u}_s(\mathbf{x},t) + \mathbf{u}(\mathbf{x},t) \quad (7.81)$$

donde $\mathbf{u}_t(\mathbf{x},t)$ es el vector de desplazamientos totales, $\mathbf{u}_s(\mathbf{x},t)$ son los desplazamientos de la base y $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ son los desplazamientos asociados a la deformada de la estructura. Se considera que en el análisis sísmico no hay dependencia espacial de los desplazamientos de la base debido a la distancia existente entre el foco del terremoto y la dimensión característica de las edificaciones. Por tanto, los desplazamientos de la base pueden reescribirse como $\mathbf{u}_s(\mathbf{x},t) = \mathbf{u}_s(t)$.

Sustituyendo la descomposición de los desplazamientos dada por la Ecuación (7.81) en la ecuación de equilibrio (Ecuación (7.3)), y teniendo en cuenta que los desplazamientos de la base provocan un movimiento de sólido rígido no producen fuerzas elásticas ni fuerzas disipativas relacionadas con el amortiguamiento del sistema, se obtiene la siguiente expresión de la ecuación de equilibrio:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = -\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_s(t) \quad (7.82)$$

Esta ecuación es una generalización de la Ecuación (6.63) para un sistema de N grados de libertad.

La resolución de la Ecuación (7.82) se estudia mediante superposición modal utilizando la expresión de los desplazamientos en coordenadas modales (Ecuación (7.60)):

$$\mathbf{M}\Phi(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{Y}}(t) + \mathbf{C}\Phi(\mathbf{x})\dot{\mathbf{Y}}(t) + \mathbf{K}\Phi(\mathbf{x})\mathbf{Y}(t) = -\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_s(t) \quad (7.83)$$

Para obtener un sistema desacoplado de ecuaciones análogo al descrito en la Sección 7.5, la ecuación anterior se multiplica por la forma del modo de vibración ϕ_i^T , obteniéndose:

$$\phi_i^T \mathbf{M} \Phi \ddot{\mathbf{Y}} + \phi_i^T \mathbf{C} \Phi \dot{\mathbf{Y}} + \phi_i^T \mathbf{K} \Phi \mathbf{Y} = -\phi_i^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_s \quad (7.84)$$

En esta expresión se anulan todos los productos $\phi_i^T \mathbf{M} \phi_j$ y $\phi_i^T \mathbf{K} \phi_j$ si $i \neq j$, de acuerdo a la condición de ortogonalidad de los modos de vibración respecto a las matrices de masa y rigidez. Además, se asume de nuevo que la matriz de amortiguamiento puede obtenerse de forma que sea aplicable la ortogonalidad de los modos, es decir, $\phi_i^T \mathbf{C} \phi_j = 0$ si $i \neq j$.

Entonces, para el modo de vibración i se obtiene la siguiente expresión:

$$m_i \ddot{Y}_i + c_i \dot{Y}_i + k_i Y_i = -\phi_i^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_s \quad (7.85)$$

Esta expresión se reescribe de forma similar a la Ecuación (7.71) dividiendo por la masa modal m_i y sustituyendo las definiciones del factor de amortiguamiento ζ_i y de la frecuencia natural ω_i para el modo de vibración ϕ_i :

$$\ddot{Y}_i + 2\zeta_i \omega_i \dot{Y}_i + \omega_i^2 Y_i = \frac{-\phi_i^T \mathbf{M}}{m_i} \ddot{\mathbf{u}}_s \quad (7.86)$$

La aceleración de la base se puede descomponer mediante un vector de influencia $\mathbf{d}$ de ceros y unos que define los grados de libertad de la estructura sobre los que actúa el sismo:

$$\ddot{\mathbf{u}}_s = \mathbf{d}(\mathbf{x}) \ddot{u}_s \quad (7.87)$$

Este vector tiene N componentes, y contiene valores unidad en las posiciones de todos los grados de libertad donde actúa la aceleración de la base, siendo nulas el resto de posiciones.

Utilizando esta notación, la Ecuación (7.86) se reescribe como:

$$\ddot{Y}_i + 2\zeta_i \omega_i \dot{Y}_i + \omega_i^2 Y_i = \frac{-\phi_i^T \mathbf{M} \mathbf{d}}{m_i} \ddot{u}_s \quad (7.88)$$

y, también se expresa mediante la siguiente relación:

$$\ddot{Y}_i + 2\zeta_i \omega_i \dot{Y}_i + \omega_i^2 Y_i = -\frac{\gamma_i}{m_i} \ddot{u}_s \quad (7.89)$$

donde, $\gamma_i = \phi_i^T \mathbf{M} \mathbf{d}$ se define como el factor de participación del modo i en las dirección dada por el vector $\mathbf{d}$. El factor de participación modal define cómo contribuyen los modos de vibración a la respuesta total de la estructura. Por ejemplo, si el movimiento de la estructura a una determinada frecuencia natural es normal a la dirección en la que actúa la excitación, entonces el factor de participación de ese modo será nulo. En el Ejemplo 7.4.1 se han calculado los factores de participación de una estructura.

La solución de la Ecuación (7.89) viene dada por la integral de Duhamel (Ecuación (6.65)):

$$Y_i(t) = -\frac{1}{m_i \omega_{Di}} \int_0^t \gamma_i \ddot{u}_s(\tau) \sin(\omega_{Di}(t-\tau)) e^{-\zeta_i \omega_{Di}(t-\tau)} d\tau \quad (7.90)$$

De esta forma, se calculan las coordenadas modales de la estructura para, posteriormente, obtener el vector de desplazamientos como combinación lineal de los modos de vibración.

Sin embargo, el objetivo del análisis modal espectral no es el cálculo de la evolución temporal de los desplazamientos, o cualquier magnitud derivada de éstos, sino la evaluación de la respuesta máxima que se produce durante un sismo. Por ejemplo, el nivel máximo de los esfuerzos permite evaluar la integridad de la estructura durante la acción del sismo.

La respuesta total máxima no puede obtenerse, en general, simplemente sumando los máximos modales, ya que estos máximos generalmente no se suceden en el mismo instante de tiempo. Por ejemplo, cuando un modo alcanza su respuesta máxima en un instante, el resto de respuestas modales pueden experimentar niveles de vibración menores que sus máximos individuales. La superposición de los valores espectrales modales proporciona un límite superior a la respuesta total, pero generalmente se sobrestima este máximo en una cantidad significativa.

Existen diferentes métodos para determinar la respuesta máxima de una estructura producida por la acción de un sismo. El método más simple que se emplea es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados (SRSS siglas en inglés de *Square Root of the Sum of the Squares*):

$$R = \left(\sum_{i=1}^N R_i^2 \right)^{1/2} \quad (7.91)$$

donde, R representa la variable a calcular (desplazamientos, esfuerzos, etc.) y R_i el valor máximo en el modo de vibración ϕ_i . Este método está aceptado por la Norma Construcción Sismorresistente NCSE-02.

Esta estimación es válida si los periodos de la estructura difieren en más de un 10% entre sí. Sin embargo, si las frecuencias de los modos que contribuyen significativamente a la respuesta de la estructuras son próximas entre sí, el método SRSS puede proporcionar malos resultados. En estos casos, pueden emplearse otros métodos para estimar la respuesta máxima como la combinación cuadrática completa (CQC siglas en inglés de *Complete Quadratic Combination*).

Teniendo en cuenta esta estimación, el desplazamiento máximo de la estructura se puede estimar como:

$$\max(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) = \left(\sum_{i=1}^N \max(Y_i(t) \phi_i(\mathbf{x}))^2 \right)^{1/2} \quad (7.92)$$

En esta expresión, el máximo de la contribución de cada modo está dado por el máximo de la coordenada modal $Y_i(t)$ en valor absoluto. Entonces, de acuerdo a la Ecuación (7.90)

se tiene que:

$$\begin{aligned}\max(Y_i(t)\phi_i(\mathbf{x})) &= \phi_i(\mathbf{x}) \frac{\gamma_i}{m_i} \max \left(\frac{1}{\omega_{Di}} \int_0^t \gamma_i \ddot{u}_s(\tau) \sin(\omega_{Di}(t-\tau)) e^{-\zeta_i \omega_i(t-\tau)} d\tau \right) \\ &= \phi_i(\mathbf{x}) \frac{\gamma_i}{m_i} S_d(\zeta_i, \omega_i)\end{aligned}\quad (7.93)$$

donde $S_d(\zeta_i, \omega_i)$ es el espectro de la respuesta correspondiente al amortiguamiento y a la frecuencia natural del i -ésimo modo de vibración de la estructura.

Por tanto, el desplazamiento máximo de la estructura producido por la acción del sismo es:

$$\max(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) = \left(\sum_{i=1}^N \left(\phi_i(\mathbf{x}) \frac{\gamma_i}{m_i} S_d(\zeta_i, \omega_i) \right)^2 \right)^{1/2} \quad (7.94)$$

Esta expresión se simplifica si la forma de los modos de vibración se normaliza a la matriz de masa, de forma que $m_i = \phi_i^T \mathbf{M} \phi_i = 1$. Entonces, el desplazamiento máximo está dado por:

$$\max(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) = \left(\sum_{i=1}^N (\phi_i(\mathbf{x}) \gamma_i S_d(\zeta_i, \omega_i))^2 \right)^{1/2} \quad (7.95)$$

Los programas de elementos finitos, como ANSYS, normalizan los modos de vibración tanto a la amplitud máxima unidad como a la matriz de masa. Sin embargo, cuando los resultados del análisis modal se van a usar posteriormente en un análisis transitorio mediante superposición modal o en un análisis modal espectral, es necesario calcular los modos de vibración normalizados a la matriz de masa para aprovechar las ventajas que simplifican la formulación de estos métodos.

7.6.1 Norma de Construcción Sismorresistente: Parte general y edificación (NSCE-02)

La "Norma de Construcción Sismorresistente: Parte general y edificación (NSCE-02)"¹ tiene como objeto proporcionar los criterios que han de seguirse dentro del territorio español para la consideración de la acción sísmica. El ámbito de aplicación de esta normativa se extiende a todos los proyectos y obras de construcción en la edificación. En la memoria de todos los proyectos debe incluirse un apartado de "Acciones sísmicas", en el que se recoger los valores y las hipótesis adoptados en la evaluación de las acciones en la estructura.

En esta normativa la acción sísmica de un determinado lugar está definida por un mapa de peligrosidad sísmica. Este mapa proporciona un valor de la aceleración horizontal del terreno denominado aceleración sísmica básica a_b y del coeficiente de contribución K , que tiene en cuenta la influencia de los distintos tipos de terremotos esperados en un determinado lugar.

La aceleración máxima a la que se encuentra sometido un sistema de un grado de libertad está definida por la pseudo-aceleración $S_{pa} = a_b \alpha(T)$, siendo $\alpha(T)$ el espectro

¹ https://www.mitma.gob.es/recursos_mfom/0820200.pdf

de respuesta elástica normalizado en función del periodo T para las aceleraciones en la dirección horizontal, calculado para un sistema de un grado de libertad considerando un factor de amortiguamiento $\zeta = 0.05$. La expresión del espectro de la respuesta es la siguiente:

$$\alpha(T) = \begin{cases} 1 + 1.5T/T_A & \text{si } T < T_A \\ 2.5 & \text{si } T_A \leq T \leq T_B \\ KC/T & \text{si } T > T_B \end{cases} \quad (7.96)$$

donde, C es el coeficiente del terreno que considera las características del terreno y de la cimentación de la estructura. Los periodos característicos de la respuesta están dados por $T_A = KC/10$ y $T_B = KC/2.5$. El espectro de la respuesta elástica se modifica con un factor de corrección $v = (5/\zeta)^{0.4}$ para $T \geq T_A$ si el factor de amortiguamiento es distinto de $\zeta = 0.05$.

El Código 7.5 permite calcular el espectro de la respuesta particularizado para un coeficiente de contribución $K = 1.3$. Así mismo, se ha considerado un terreno tipo III correspondiente a un suelo granular de compacidad media, o a un suelo cohesivo de consistencia firme a muy firme, adoptándose un valor del coeficiente de terreno $C = 1.6$. En la Figura 7.13 se representa el espectro de la respuesta obtenido.

Código 7.5 Listado de comandos de MATLAB para obtener el espectro de respuesta elástica según la NCSE-02.

```
T0=0.001:0.05:4;
% periodo de evaluación
T0=logspace(log10(T0(1)), log10(T0(end)), length(T0)*10); %interpolación

%amortiguamiento
damp=0.02; % [-]

% Datos del espectro según la NCSE02
K = 1.3; % coeficiente de contribución
g= 9.80665; % [m/s^2]
ab = 0.07*g; % [m/s^2]
rho=1; % importancia

C = 1.6; % terreno

componente=1; % 1: horizontal 2: vertical

if rho*ab/g<=0.1
    S=C/1.25;
elseif 0.1<rho*ab/g<=0.4
    S=C/1.25+3.33*(rho*ab/g-0.1)*(1-C/1.25);
elseif rho*ab/g>0.4
    S=1;
end

zeta=damp; % amortiguamiento
Omega=(5/(zeta*100))^(0.4); % factor de corrección amortiguamiento
```

```

ac=ab*rho*S; % aceleración de calculo [m/s^2]

componente=1; % 1: horizontal 2: vertical

TA = K*C/10; % periodo [s]
TB = K*C/2.5; % periodo [s]

alphaT=zeros(length(T0),1) ;

for ifreq =1:length(T0)
    if T0(ifreq)<TA
        alphaT(ifreq) = 1+1.5*T0(ifreq)/TA;
    elseif T0(ifreq)>=TA && T0(ifreq)<=TB
        alphaT(ifreq) = 2.5;
    elseif T0(ifreq)>TB
        alphaT(ifreq) = K*C/T0(ifreq);
    end
end

PSA0 = ac*alphaT*Omega; % pseudo-aceleración [m/s^2]

if componente==2
    PSA0 = PSA0*0.7;
end

figure
plot(T0,PSA0,'-ok')
xlabel('Periodo [s]')
ylabel('PSA [m/s^2]')

figure
plot(fliplr(1/T0),flipud(PSA0),'-ok')
xlim([0 100])
xlabel('Frecuencia [Hz]')
ylabel('PSA [m/s^2]')

```

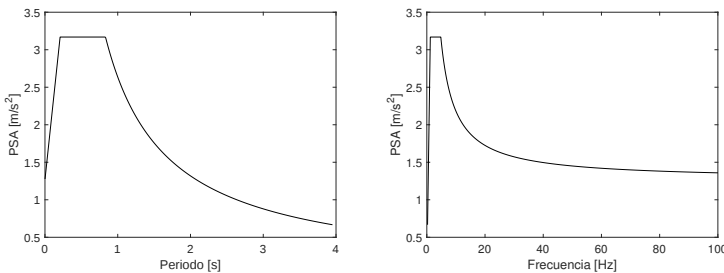


Figura 7.13 Espectro de respuesta elástica para $K = 1.3$, $C = 1.6$ y $\zeta = 2\%$.

La NCSE-02 indica que el número mínimo a considerar en un análisis espectral está determinado por la contribución de éstos a la respuesta de la estructura. Los modos que contribuyen significativamente se determina por la masa modal efectiva M_{ei} . Esta norma

establece que es necesario considerar, al menos, los r -primeros modos de vibración que movilizan el 90 % de la masa total del sistema, es decir, los r -primeros modos que cumplen la siguiente condición:

$$\sum_{i=1}^r M_{ei} \leq \mathbf{d}^T \mathbf{M} \mathbf{d} \quad (7.97)$$

Ejemplo 7.6.1 Calcular el desplazamiento máximo y el cortante máximo que se producen en la estructura de la Figura 7.6 cuando actúa un sismo caracterizado por el espectro de la respuesta representado en la Figura 7.13 con una aceleración de la base $a_b = 0.1 \text{ g}$. Comparar la solución del problema con los resultados numéricos obtenidos con el Código 7.7 de ANSYS.

Solución. El análisis modal de la estructura del Ejemplo 7.4.1 dio como resultados unas frecuencias naturales $\omega_n = \{15.41, 42.96, 61.68\}^T \text{ rad/s}$ y unos modos de vibración normalizados a la matriz de masa:

$$\Phi = \begin{bmatrix} -0.0045 & 0.0100 & -0.0079 \\ -0.0081 & 0.0042 & 0.0100 \\ -0.0101 & -0.0083 & -0.0048 \end{bmatrix}$$

siendo, por tanto, la masa modal para todos los modos es $m_i = \phi_i^T \mathbf{M} \phi_i = 1$.

Además, el factor de participación modal es $\gamma = \Phi^T \mathbf{M} \mathbf{d} = \{-121.49, 34.56, -13.18\}^T$, donde el vector $\mathbf{d} = \{1, 1, 1\}^T$ expresa que el sismo producirá movimientos en los tres grados de libertad de la estructura.

Los periodos fundamentales son $T_n = \{0.41, 0.15, 0.10\} \text{ s}$. El espectro de la respuesta en los periodos de la estructura es $\alpha(T_n) = \{3.61, 2.88, 2.25\}$, y la pseudo-aceleración espectral asociada es $S_{pa}(\zeta, T_n) = a_b \alpha(T_n) \text{ g}$.

El desplazamiento máximo de la estructura de acuerdo a la Ecuación (7.95) es:

$$\begin{aligned} \max(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) &= \left(\sum_{i=1}^N (\phi_i(\mathbf{x}) \gamma_i S_d(\zeta_i, \omega_i))^2 \right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{i=1}^N \left(\phi_i(\mathbf{x}) \gamma_i \frac{S_{pa}(\zeta_i, \omega_i)}{\omega_i^2} \right)^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

De esta forma, el desplazamiento máximo para todos los grados de libertad producido por el sismo es: $\max(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) = \{0.0084, 0.0150, 0.0186\}^T \text{ m}$.

Sin embargo, si se sigue la recomendación de la NCSE-02 para la combinación de los modos en un análisis espectral, es suficiente con considerar la contribución del primer modo de vibración, ya que acumula el 92 % de la masa total efectiva como se muestra en la Tabla 7.1. En este caso, el desplazamiento máximo producido por la acción del sismo es: $\max(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) = \{0.0084, 0.0150, 0.0186\}^T \text{ m}$. Como se puede observar, la solución obtenida es la misma que en el caso anterior con la precisión usada aquí en la presentación

de los resultados. Por tanto, la recomendación de esta norma proporciona resultados precisos con una reducción del esfuerzo computacional al reducir la contribución del número que es necesario considerar para calcular la respuesta de la estructura.

Alternativamente, el Código 7.6 permite calcular el espectro de la respuesta según la Norma de Construcción Sismorresistente: Puentes (NCSP-07).

Código 7.6 Listado de comandos de MATLAB para obtener el espectro de respuesta elástica según la NCSP-07.

```
T0=0.001:0.05:4;
% periodo de evaluación
T0=logspace(log10(T0(1)), log10(T0(end)), length(T0)*10); % interpolación

% amortiguamiento
damp=0.02; % [-]

% Datos del espectro según la NCSP07
K = 1; % coeficiente de contribución
g= 9.80665; % [m/s^2]
ab = 0.07*g; % [m/s^2]

rhoi=1; % factor de importancia

retorno=500; % periodo de retorno
rhoii=(retorno/500)^0.4;

rho=rhoi*rhoii; % riesgo

C = 1.0; % terreno
sismo=2; % 1: frecuente 2: ultimo
componente=1; % 1: horizontal 2: vertical

zeta=damp; % amortiguamiento
if zeta>1/100
    nu=(5/(zeta*100))^(0.4);
    if nu<0.55
        nu=0.55;
    end
end

if rho*ab/g<=0.1
    S=C/1.25;
elseif 0.1<rho*ab/g<=0.4
    S=C/1.25+3.33*(rho*ab/g-0.1)*(1-C/1.25);
elseif rho*ab/g>0.4
    S=1;
end

if sismo==1
    TA = K*C/20; % periodo
    TB = K*C/5; % periodo
    TC = K*(1+0.5*C); % periodo
elseif sismo==2
    TA = K*C/10; % periodo
```

```

    TB = K*C/2.5;                % periodo
    TC = K*(2+C);                % periodo
end

ac=ab*rho*S;                    % aceleración de calculo [m/s^2]

alphaT=zeros(length(T0),1) ;

for ifreq=1:length(T0)
    if T0(ifreq)<TA
        alphaT(ifreq) = 1+T0(ifreq)/TA*(2.5*nu-1);
    elseif T0(ifreq)>=TA && T0(ifreq)<=TB
        alphaT(ifreq) = 2.5*nu;
    elseif T0(ifreq)>=TB && T0(ifreq)<=TC
        alphaT(ifreq) = 2.5*nu*TB/T0(ifreq);
    elseif T0(ifreq)>TC
        alphaT(ifreq) = 2.5*nu*TB*TC/(T0(ifreq))^2;
    end
end

PSA0 = ac*alphaT;               % pseudo-aceleración [m/s^2]

if componente==2
    PSA0 = PSA0*0.7;
end

figure
plot(T0,PSA0,'-ok')
xlabel('Periodo [s]')
ylabel('PSA [m/s^2]')

figure
plot(fliplr(1./T0),flipud(PSA0),'-ok')
xlim([0 100])
xlabel('Frecuencia [Hz]')
ylabel('PSA [m/s^2]')

```

El análisis espectral en el programa ANSYS parte, como en el análisis mediante superposición modal, de la solución de un análisis modal. El Código 7.7 comparte las órdenes de los Códigos 7.1 y 7.4 en la modelización de la estructura y en la solución del análisis modal. La solución del análisis espectral requiere definir la dirección en la que actúa el sismo (x , y o z), cómo se define el espectro de la respuesta (S_d , S_{pv} o S_{pa}), y un tabla de valores discretos del espectro frente a la frecuencia. En este ejemplo, se ha definido el espectro de la respuesta como se recoge en la Tabla 7.2.

La solución de este análisis proporciona un valor del desplazamiento máximo $\max(\mathbf{u}(\mathbf{x},t)) = \{0.0083, 0.0150, 0.0186\}^T$ m, que coincide con la solución obtenida anteriormente.

Código 7.7 Listado de comandos de Ansys para el análisis modal espectral de una estructura.

Tabla 7.2 Valores discretos de la pseudo-aceleración espectral en función de la frecuencia y del periodo.

f [Hz]	0.3	0.4	0.6	1.2	4.8	100
T [s]	3.33	2.50	1.67	0.83	0.21	0.01
S_{pa} [m/s ²]	0.90	1.20	1.80	3.60	3.60	1.13

```
/prep7
! tipo de elemento
et ,1, link11
et ,2, mass21
! propiedades pilar
r ,1,6.3717e+06,,571.4800
! masa forjado
r ,2,4900
! elementos
n ,1,,
n ,2,1,
type,1
real ,1
e,1,2
type,2
real ,2
e,2
egen, 3, 1, 1, 2, , , , , 1
! condiciones de contorno
d, all, uy, , , , , uz
d,1,ux

/solu
antype,modal          ! análisis modal
modopt,lanb,3
mxpand,3,,,yes
outpr ,basic,1
solve
finish

/solu
antype,spectr          ! análisis espectral
spopt,sprs             ! espectro único para toda la estructura
sed,1                  ! eje x global como dirección del espectro
svtyp,2                ! espectro de respuesta de aceleración sísmica
freq ,0.3,0.4,0.6,1.2,4.8,100      ! puntos de frecuencia para sv
sv ,,,3.33,2.50,1.67,0.83,0.21,0.01    ! valores del espectro asociados con puntos de frecuencia
srss ,0.15, disp        ! especifica el método SRSS de combinación
solve
finish

/post1
set , list
/inp ,,mcom
prnsol,dof             ! solución nodal
finish
```

7.7 Análisis transitorio

La resolución de un problema dinámico mediante superposición modal está limitada a análisis de sistemas lineales. La superposición modal es una técnica que permite estudiar el comportamiento de una estructura a partir de la combinación de los modos que contribuyen significativamente a la respuesta, siendo el coste computacional del análisis normalmente bajo. Sin embargo, cuando la estructura puede experimentar un comportamiento no-lineal no es posible emplear este tipo de método.

Los procedimientos generales para estudiar la respuesta de una estructura están basados en métodos numéricos de integración temporal paso-a-paso. La respuesta temporal de una estructura se calcula en un número discreto de instantes temporales equiespaciados entre sí un incremento de tiempo Δt . Los métodos de integración temporal se basan comúnmente en la familia de métodos Newmark- β . A continuación, se muestran las bases de estos métodos.

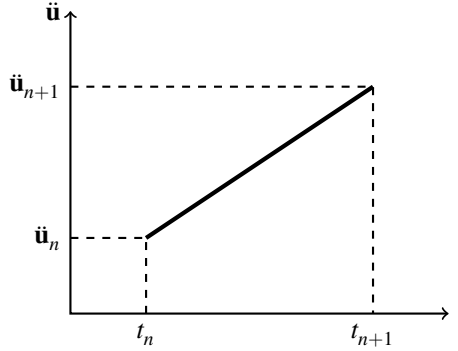


Figura 7.14 Evolución de la aceleración en un intervalo de tiempo.

La ecuación de equilibrio de una estructura en el paso de tiempo $t_{n+1} = (n+1)\Delta t$ puede expresarse a partir de los valores de la aceleración, de la velocidad, del desplazamiento y de la fuerza en ese instante, como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_{n+1} + \mathbf{K}\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1} \quad (7.98)$$

La resolución de la ecuación anterior se basa en la aproximación de la velocidad en el paso de tiempo $n+1$ utilizando una integración lineal de las aceleraciones en el intervalo de tiempo $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ (Figura 7.14)²:

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \dot{\mathbf{u}}_n + \frac{1}{2} (\ddot{\mathbf{u}}_n + \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}) \Delta t \quad (7.99)$$

² La regla de integración del trapecio expresa que $\int_a^b f(x) dx \simeq (b-a)(f(a) + f(b))/2$.

Del mismo modo, el desplazamiento en el paso de tiempo $n + 1$ se aproxima integrando la velocidad en ese intervalo de tiempo:

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{u}}_n + \dot{\mathbf{u}}_{n+1}) \Delta t \quad (7.100)$$

Sustituyendo en esta expresión la definición de la velocidad dada por la Ecuación (7.99) se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{n+1} &= \mathbf{u}_n + \frac{1}{2} \left(\dot{\mathbf{u}}_n + \dot{\mathbf{u}}_n + \frac{1}{2} (\ddot{\mathbf{u}}_n + \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}) \Delta t \right) \Delta t \\ &= \mathbf{u}_n + \dot{\mathbf{u}}_n \Delta t + (\ddot{\mathbf{u}}_n + \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}) \left(\frac{\Delta t}{2} \right)^2 \end{aligned} \quad (7.101)$$

Despejando de esta ecuación el término de la aceleración en el paso de tiempo $n + 1$ se obtiene:

$$\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} = \frac{1}{\Delta t^2/4} (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) - \frac{1}{\Delta t/4} \dot{\mathbf{u}}_n - \ddot{\mathbf{u}}_n \quad (7.102)$$

Ahora, sustituyendo la Ecuación (7.102) en la Ecuación (7.99) se llega a la siguiente expresión de la velocidad:

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \frac{2}{\Delta t} (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) - \dot{\mathbf{u}}_n \quad (7.103)$$

Estas expresiones puede escribirse de forma más compacta si se definen las constantes $a_0 = (2/\Delta t)^2$, $a_1 = 2/\Delta t$ y $a_2 = 4/\Delta t$:

$$\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} = a_0 (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) - a_2 \dot{\mathbf{u}}_n - \ddot{\mathbf{u}}_n \quad (7.104a)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = a_1 (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) - \dot{\mathbf{u}}_n \quad (7.104b)$$

donde, la velocidad y la aceleración en el paso de tiempo actual t_{n+1} están definidas por el desplazamiento en ese mismo instante de tiempo, y por la influencia del paso anterior t_n .

Sustituyendo ambas expresiones en la ecuación de equilibrio (Ecuación (7.98)) se tiene que:

$$\mathbf{M} (a_0 (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) - a_2 \dot{\mathbf{u}}_n - \ddot{\mathbf{u}}_n) + \mathbf{C} (a_1 (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) - \dot{\mathbf{u}}_n) + \mathbf{K} \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1} \quad (7.105)$$

En esta ecuación la única incógnita es el desplazamiento $\mathbf{u}_{n+1}$, obteniéndose el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{C} + \mathbf{K}) \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{M} (a_0 \mathbf{u}_n + a_2 \dot{\mathbf{u}}_n + \ddot{\mathbf{u}}_n) + \mathbf{C} (a_1 \mathbf{u}_n + \dot{\mathbf{u}}_n) + \mathbf{F}_{n+1} \quad (7.106)$$

y, de forma abreviada:

$$\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{u}_{n+1} = \tilde{\mathbf{F}}_{n+1} \quad (7.107)$$

donde, $\tilde{\mathbf{K}}$ se denomina la matriz de rigidez dinámica y $\tilde{\mathbf{F}}_{n+1}$ el vector de fuerzas en el paso de tiempo $n+1$ que, además de la fuerza en este instante de tiempo, tiene en cuenta la influencia del paso de tiempo anterior.

El algoritmo de resolución del método de Newmark- β procede calculando el valor de los desplazamientos en el paso de tiempo $n+1$ a partir de esta última ecuación, con la subsecuente actualización de la aceleración y de la velocidad mediante las Ecuaciones (7.109a) y (7.109b), respectivamente.

La generalización del método de Newmark- β está dada por las siguientes definiciones de la velocidad y del desplazamiento en el paso de tiempo $n+1$:

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \dot{\mathbf{u}}_n + \frac{1}{2} ((1-\delta)\ddot{\mathbf{u}}_n + \delta\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}) \Delta t \quad (7.108a)$$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \dot{\mathbf{u}}_n \Delta t + \left(\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{\mathbf{u}}_n + \alpha \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \right) \Delta t^2 \quad (7.108b)$$

donde α y δ son constantes de integración del método.

Las expresiones de la aceleración y de la velocidad que se obtienen a partir de estas aproximaciones son:

$$\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} = a_0 (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) - a_2 \dot{\mathbf{u}}_n - a_3 \ddot{\mathbf{u}}_n \quad (7.109a)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = a_1 (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) - a_4 \dot{\mathbf{u}}_n - a_5 \ddot{\mathbf{u}}_n \quad (7.109b)$$

Ahora, la ecuación de equilibrio de la estructura en el paso de tiempo $n+1$ es:

$$(a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{C} + \mathbf{K}) \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{M}(a_0 \mathbf{u}_n + a_2 \dot{\mathbf{u}}_n + a_3 \ddot{\mathbf{u}}_n) + \mathbf{C}(a_1 \mathbf{u}_n + a_4 \dot{\mathbf{u}}_n + a_5 \ddot{\mathbf{u}}_n) + \mathbf{F}_{n+1} \quad (7.110)$$

donde las constantes del método son:

$$\begin{array}{lll} a_0 = 1/\alpha \Delta t & a_1 = \delta/\alpha \Delta t & a_2 = 1/\alpha \Delta t \\ a_3 = 1/2\alpha - 1 & a_4 = \delta/\alpha - 1 & a_5 = (\Delta t/2)(\delta/\alpha - 2) \end{array}$$

La estabilidad del método de Newmark- β esta determinada por la selección de los valores de las constantes de integración α y δ . Puede demostrarse que el método resulta incondicionalmente estable si $\delta \geq 1/2$ y $\alpha \geq 1/4(1/2 + \delta)^2$. El valor de las constante utilizado en la deducción de la Ecuación (7.106) es $\alpha = 1/4$ y $\delta = 1/2$.

Ejemplo 7.7.1 Resolver el Ejemplo 7.5.2 mediante el método Newmark- β empleando las constantes de integración $\alpha = 1/4$ y $\delta = 1/2$. Comparar la solución obtenida en ambos casos.

Solución. Para resolver este ejemplo se ha implementado el método Newmark- β en MATLAB. Los datos de partida de las matrices de masa y rigidez, amortiguamiento y paso de tiempo son los empleados en los Ejemplos 7.4.1, 7.5.2 y 7.4.2. En el Código 7.8 se muestra la rutina implementada.

En la Figura 7.15 se muestra la comparación de los resultados obtenidos utilizando el método de integración temporal Newmark- β y el análisis por superposición modal. La solución obtenida en ambos casos es muy parecida, y las pequeñas diferencias que se pueden encontrar se deben al modelo de amortiguamiento empleado en cada caso.

En este ejemplo, el tiempo de cómputo del método de Newmark- β es, aproximadamente, diez veces superior al del análisis mediante superposición modal. Por tanto, el uso de éste método sólo está aconsejado en aquellos análisis en los que no se pueda aplicar la técnica de superposición modal.

En el Código 7.9 se recogen las órdenes necesarias para realizar este análisis en ANSYS. El procedimiento es similar al análisis transitorio mediante superposición modal eliminando el análisis modal, que en este caso no es necesario realizar. También, a diferencia de la técnica de superposición modal, el amortiguamiento de la estructura se define proporcional a las matrices de masa y rigidez como $\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}$ mediante las órdenes ALPHAD y BETAD.

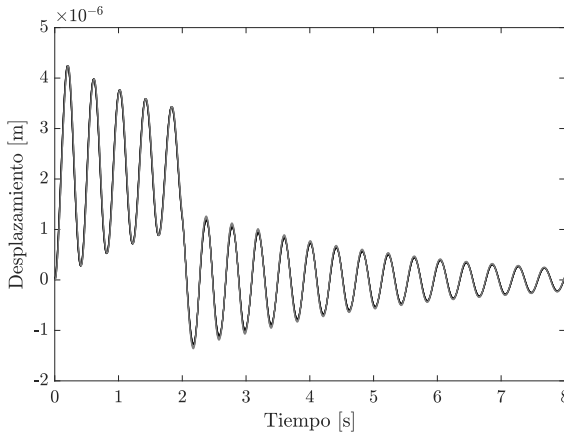


Figura 7.15 Evolución temporal del desplazamiento de la planta superior de la estructura: (línea negra) superposición modal y (línea gris) método de integración Newmark- β .

Código 7.8 Listado de comandos de MATLAB para calcular la la solución del Ejemplo 7.5.2 mediante el método Newmark- β .

```

% matriz de rigidez y masa
K=1e7*[1.2743 -0.6372 0;
-0.6372 1.2743 -0.6372;
0 -0.6372 0.6372];

M=1e3*[5.4715 0 0;
0 5.4715 0;
0 0 5.1857];

% matriz de amortiguamiento proporcional
alpha0=0.4931;
alpha1=5.1892e-04;
C=alpha0*M+alpha1*K;

% paso de tiempo
dt=0.0051; N=1602;

% declaración de variables
u=zeros(3,N+1);
v=zeros(3,N+1);
a=zeros(3,N+1);

% vector fuerza
F=zeros(1,N+1); F(t<=2)=1;
F=[1 2 3]'*F;

% constantes método de Newmark
a0=(2/dt)^2; a1=2/dt; a2=4/dt;

% bucle de integración
for n=1:N
    Ftil=M*(a0*u(:,n)+a2*v(:,n)+a(:,n))+C*(a1*u(:,n)+v(:,n))+F(:,n+1);
    Ktil=a0*M+a1*C+K;
    u(:,n+1)=Ktil\Ftil;
    a(:,n+1)=a0*(u(:,n+1)-u(:,n))-a2*v(:,n)-a(:,n);
    v(:,n+1)=a1*(u(:,n+1)-u(:,n))-v(:,n);
end

```

Código 7.9 Listado de comandos de ANSYS para calcular la la solución del Ejemplo 7.5.2 mediante el método Newmark- β .

```

/prep7
! tipo de elemento
et ,1, link 11
et ,2, mass21
! propiedades pilar
r ,1,6.3717e+06,,571.4800
! masa forjado
r ,2,4900
! elementos
n ,1,,
n ,2,1,
type,1

```

```

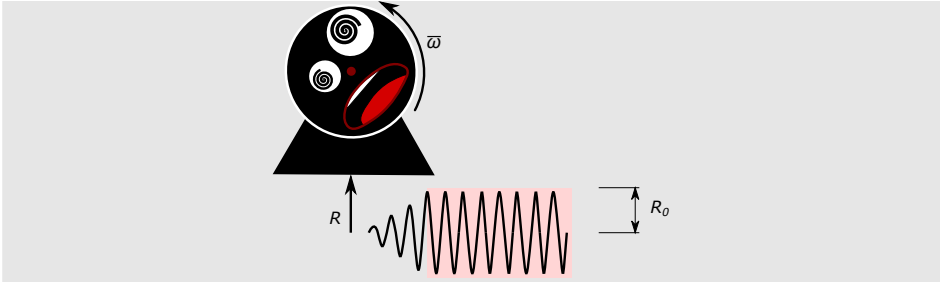
real ,1
e,1,2
type,2
real ,2
e,2
egen, 3, 1, 1, 2, , , , , , 1
! condiciones de contorno
d, all, uy, , , , , uz
d,1,ux
! análisis transitorio
/solu
antype,trans
trnpt,full ! integración completa
deltim,0.0051 ! paso de tiempo
! amortiguamiento proporcional
alphad,0.4931
betad,5.1892e-04
time,2 ! fuerza en t=2 s
f,2,fx,1
f,3,fx,2
f,4,fx,3
solve
time,8 ! fuerza en t=8 s
fdele,all
solve
finish
! postproceso
/post26
file ,,,rdsp
nsol ,2,4,u,x,u3
plvar ,2,

```

7.8 Análisis armónico

El típico ejemplo de rotor desequilibrado

Considera un rotor desequilibrado girando alrededor de un punto fijo como el que se muestra en la figura inferior. Un buen ejemplo, algo más realista, es un disco con un agujero que gira con una velocidad angular $\bar{\omega}$.



Debido al desequilibrio del disco se produce una reacción R en la base del rotor, cuya amplitud está determinada por el tamaño del agujero. Durante el arranque el rotor aumenta la velocidad hasta alcanzar el régimen permanente de giro. Una vez alcanzado el régimen de giro el valor de la reacción está definido por $R(t) = R_0 \sin(\bar{\omega}t)$. En la representación se ha sombreado el valor de la reacción en el régimen permanente de giro.

La simple inspección de la figura anterior muestra que una vez alcanzado el régimen de giro, el valor de la reacción está determinado por la amplitud R_0 y por la frecuencia de giro $\bar{\omega}$. Por tanto, si el interés del análisis es cuantificar, por ejemplo, la evolución temporal del movimiento sólo será necesario determinar la amplitud máxima U_0 , ya que la evolución temporal estará dada por $u(t) = U_0 \sin(\bar{\omega}t)$.

El objetivo en un análisis armónico es determinar la amplitud del movimiento producido por una fuerza que sigue una evolución $F(t) = F_0 \sin(\bar{\omega}t)$. La validez de este tipo de análisis está restringida al régimen permanente de vibración.

El análisis armónico es un procedimiento para determinar la respuesta en régimen permanente de una estructura en régimen lineal que se encuentra excitada por un conjunto de cargas que varían sinusoidalmente con el tiempo $\mathbf{p}(t) = \mathbf{P}(i\bar{\omega}) \exp(i\bar{\omega}t + \phi)$. El análisis armónico está restringido a: (i) todas las cargas deben ser armónicas, (ii) todas las cargas deben tener la misma frecuencia de excitación $\bar{\omega}$, (iii) no se permiten no-linealidades y (iv) no se calculan efectos transitorios. En este tipo de análisis es útil resolver distintos problemas armónicos en un rango de frecuencias de excitación $\bar{\omega}$ que permita representar, por ejemplo, la amplitud de los desplazamientos respecto a la frecuencia. En esta representación, se identificarán picos en la respuesta en frecuencias correspondientes a las frecuencias de resonancia de la estructura.

Los desplazamiento de una estructura sometida a unas acciones armónicas como la descrita serán de la forma $\mathbf{u}(t) = \mathbf{U}(i\bar{\omega}) \exp(i\bar{\omega}t + \psi)$. Así mismo, la velocidad y la aceleración de la estructura puede expresarse como $\dot{\mathbf{u}}(t) = i\bar{\omega}\mathbf{U}(i\bar{\omega}) \exp(i\bar{\omega}t + \psi)$ y $\ddot{\mathbf{u}}(t) = -\bar{\omega}^2\mathbf{U}(i\bar{\omega}) \exp(i\bar{\omega}t + \psi)$, respectivamente. Entonces, la Ecuación (7.3) puede escribirse como:

$$-\bar{\omega}^2\mathbf{M}\mathbf{U}(i\bar{\omega})e^{i\bar{\omega}t+\psi} + i\bar{\omega}\mathbf{C}\mathbf{U}(i\bar{\omega})e^{i\bar{\omega}t+\psi} + \mathbf{K}\mathbf{U}(i\bar{\omega})e^{i\bar{\omega}t+\psi} = \mathbf{P}(i\bar{\omega})e^{i\bar{\omega}t+\phi} \quad (7.111)$$

Simplificando la variación temporal e incluyendo implícitamente los desfases de los desplazamiento y de las fuerzas dados por ϕ y ψ , respectivamente, se obtiene la siguiente

ecuación:

$$(-\bar{\omega}^2 \mathbf{M} + i\bar{\omega} \mathbf{C} + \mathbf{K}) \mathbf{U}(i\bar{\omega}) = \mathbf{P}(i\bar{\omega}) \quad (7.112)$$

La solución de la Ecuación (7.112) proporciona la amplitud de la respuesta de la estructura cuando es solicitada por una frecuencia $\bar{\omega}$. La respuesta de la estructura tiene una variación en el tiempo según $e^{i\bar{\omega}t}$:

$$\mathbf{U}(i\bar{\omega}) = \frac{\mathbf{P}(i\bar{\omega})}{(-\bar{\omega}^2 \mathbf{M} + i\bar{\omega} \mathbf{C} + \mathbf{K})} \quad (7.113)$$

Si se resuelven todas las frecuencias de interés se obtienen las amplitudes para cada grado de libertad de la estructura. Un ejemplo se presenta en la Figura 7.16. Las amplificaciones de la respuesta tienen lugar cuando la frecuencia de excitación coincide con alguna de las frecuencias naturales de la estructura. La respuesta en el dominio del tiempo se puede

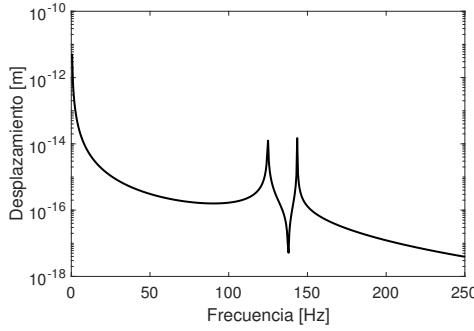


Figura 7.16 Amplitudes máximas de la respuesta de un grado de libertad de una estructura cuando es solicitada por una serie de cargas armónicas.

obtener mediante una transformada inversa de Fourier.

En el análisis armónico de una estructura pueden aplicarse técnicas de superposición modal. Como punto de partida en el razonamiento se considera la ecuación de equilibrio del modo i -ésimo expresada en coordenadas normales (Ecuación (7.71)):

$$\ddot{Y}_i(t) + 2\zeta_i \omega_i \dot{Y}_i(t) + \omega_i^2 Y_i(t) = p_i(t)/m_i \quad (7.114)$$

Esta ecuación se puede reescribir teniendo en cuenta que $Y_i(t) = Y_i(i\bar{\omega}) \exp(i\bar{\omega}t)$ y que $p_i(t) = p_i(i\bar{\omega}) \exp(i\bar{\omega}t)$. La derivación temporal de la coordenada normal expresa que $\dot{Y}_i(t) = i\bar{\omega} Y_i(i\bar{\omega}) \exp(i\bar{\omega}t)$ y $\ddot{Y}_i(t) = -\bar{\omega}^2 Y_i(i\bar{\omega}) \exp(i\bar{\omega}t)$. Entonces,

$$(-\bar{\omega}^2 + 2\zeta_i \omega_i i\bar{\omega} + \omega_i^2) Y_i(i\bar{\omega}) \exp(i\bar{\omega}t) = P_i(i\bar{\omega}) \exp(i\bar{\omega}t)/m_i \quad (7.115)$$

En esta expresión, eliminando el término exponencial y despejando la amplitud del movimiento, se obtiene:

$$Y_i(i\bar{\omega}) = \frac{P_i(i\bar{\omega})}{m_i (-\bar{\omega}^2 + 2\zeta_i \omega_i i\bar{\omega} + \omega_i^2)} \quad (7.116)$$

O bien,

$$\begin{aligned}
 Y_i(i\bar{\omega}) &= \frac{P_i(i\bar{\omega})}{m_i \omega_i^2 (-\bar{\omega}^2 / \omega_i^2 + 2\zeta_i i \bar{\omega} / \omega_i + 1)} \\
 &= \frac{P_i(i\bar{\omega})}{m_i \omega_i^2 (-\beta_i^2 + 2\zeta_i i \beta_i + 1)} \\
 &= \frac{P_i(i\bar{\omega})}{m_i \omega_i^2 ((1 - \beta_i^2) + i(2\zeta_i \beta_i))}
 \end{aligned} \tag{7.117}$$

donde $\beta_i = \bar{\omega} / \omega_i$.

La condición de resonancia se produce cuando $\beta_i = 1$ para un sistema no amortiguado, obteniéndose una amplitud $|Y_i(i\bar{\omega})| \rightarrow \infty$. Para sistemas amortiguados la amplitud del modo i -ésimo está determinada por el factor de amortiguamiento modal, como se describe en la respuesta de un sistema de un grado de libertad representada en la Figura 6.10.(a).

Finalmente, la respuesta total de la estructura se obtendrá mediante la superposición de la respuesta de los N modos que contribuyen significativamente:

$$\begin{aligned}
 U(i\bar{\omega}) &= Y_1(i\bar{\omega})\phi_1 + Y_2(i\bar{\omega})\phi_2 + \cdots + Y_i(i\bar{\omega})\phi_i + \cdots + Y_N(i\bar{\omega})\phi_N \\
 &= \sum_{i=1}^N Y_i(i\bar{\omega})\phi_i
 \end{aligned} \tag{7.118}$$

En la Ecuación (7.117) es importante observar que el amortiguamiento de la respuesta depende de la frecuencia natural de cada modo. El análisis experimental de una estructura revela que no existe esta dependencia, poniendo de manifiesto que la amplitud del movimiento en cada ciclo es independiente de la frecuencia. Este fenómeno se puede modelizar utilizando una rigidez modal compleja de la siguiente forma:

$$\hat{k}_i = k_i(1 + i2\zeta_i) \tag{7.119}$$

Teniendo en cuenta esta definición la ecuación de equilibrio desacoplada del modo i -ésimo es la siguiente:

$$m_i \ddot{Y}_i(t) + \hat{k}_i Y_i(t) = p_i(t) \tag{7.120}$$

La rigidez modal se define de acuerdo a la condición de ortogonalidad de los modos de vibración respecto a las matrices de masa y rigidez como $k_i = \omega_i^2 m_i$, obteniéndose:

$$m_i \ddot{Y}_i(t) + \omega_i^2 m_i (1 + i2\zeta_i) Y_i(t) = p_i(t) \tag{7.121}$$

Sustituyendo la expresión de la segunda derivada temporal de $Y_i(t)$, y teniendo en cuenta la evolución armónica de la fuerza y de los desplazamientos se obtiene:

$$(-\bar{\omega}^2 + \omega_i^2(1 + i2\zeta_i)) Y_i(i\bar{\omega}) = P_i(i\bar{\omega}) / m_i \tag{7.122}$$

Y, despejando la amplitud del movimiento se obtiene una expresión equivalente a la Ecuación (7.117) en la que la pérdida de energía por ciclo es independiente de la frecuencia natural ω_i :

$$\begin{aligned} Y_i(i\bar{\omega}) &= \frac{P_i(i\bar{\omega})}{m_i(-\bar{\omega}^2 + \omega_i^2(1 + i2\zeta_i))} \\ &= \frac{P_i(i\bar{\omega})}{m_i\omega_i^2((1 - \beta_i^2) + i(2\zeta_i))} \end{aligned} \quad (7.123)$$

7.8.1 Función de respuesta en frecuencia

En esta sección, en primer lugar, se supone un vector de fuerza $\mathbf{p}(t)$ en el que todas las componentes son nulas excepto el término $p_j(t)$, que se corresponde con una excitación armónica de amplitud unidad y frecuencia $\bar{\omega}$ de la forma $p_j(t) = 1 \exp(i\bar{\omega}t)$. La solución de la Ecuación (7.70) define una función compleja $H_{ij}(i\bar{\omega}) \exp(i\bar{\omega}t)$ que representa la respuesta del grado de libertad i de la estructura cuando actúa la fuerza p_j . Esta función es la *Función de Respuesta en Frecuencia* (FRF).

Si la evolución temporal de la fuerza es una función arbitraria $p_j(t)$, la respuesta de la estructura puede calcularse a partir de la descomposición de la carga en series de Fourier. La transformada de Fourier describe el contenido en frecuencia de la fuerza $p_j(t)$ como:

$$P_j(i\bar{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} p_j(t) \exp(-i\bar{\omega}t) dt \quad (7.124)$$

La respuesta de la estructura se calcula fácilmente realizando la transformada inversa de Fourier:

$$u_{ij}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{ij}(i\bar{\omega}t) P_j(i\bar{\omega}) \exp(i\bar{\omega}t) d\bar{\omega} \quad (7.125)$$

Finalmente, la respuesta total de grado de libertad i ante un estado de cargas $\mathbf{p}(t)$ se calcula como la superposición de las fuerzas que actúan en cada grado de libertad:

$$u_i(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left[\int_{-\infty}^{\infty} H_{ij}(i\bar{\omega}t) P_j(i\bar{\omega}) \exp(i\bar{\omega}t) d\bar{\omega} \right] \quad (7.126)$$

7.8.2 Relación tiempo-frecuencia

Existe una relación entre la función temporal de respuesta a un impulso $h_{ij}(t)$ y la función de respuesta en frecuencia $H_{ij}(i\bar{\omega})$. Para establecer esta relación se define la función $U_{ij}(i\bar{\omega})$ como la transformada de Fourier del desplazamiento $u_{ij}(t)$ dado por la Ecuación (7.73):

$$U_{ij}(i\bar{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_0^t p_j(\tau) h_{ij}(t - \tau) d\tau \right] \exp(-i\bar{\omega}t) dt \quad (7.127)$$

El límite inferior de la integral de convolución que aparece en la expresión anterior puede ampliarse hasta $-\infty$ considerando condiciones iniciales nulas, lo que es equivalente a asumir que $h_{ij}(t) = 0$ para $t < 0$. Asimismo, si se asume que $h_{ij}(t - \tau) = 0$ para $\tau > t$, el límite superior puede extenderse hasta ∞ . Por tanto, esta expresión se reescribe como:

$$U_{ij}(\bar{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} p_j(\tau) h_{ij}(t - \tau) d\tau \right] \exp(-i\bar{\omega}t) dt \quad (7.128)$$

Esta expresión se modifica haciendo el cambio de variable $\theta = t - \tau$ de la siguiente forma:

$$U_{ij}(\bar{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} p_j(\tau) h_{ij}(\theta) d\tau \right] \exp(i\bar{\omega}(\theta + \tau)) d\theta \quad (7.129)$$

Y, equivalentemente:

$$\begin{aligned} U_{ij}(\bar{\omega}) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_j(\tau) \exp(i\bar{\omega}\tau) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} h_{ij}(\theta) \exp(i\bar{\omega}\theta) d\theta \\ &= P_j(\bar{\omega}) \int_{-\infty}^{\infty} h_{ij}(\theta) \exp(i\bar{\omega}\theta) d\theta \\ &= H_{ij}(\bar{\omega}) P_j(\bar{\omega}) \end{aligned} \quad (7.130)$$

En estas expresiones, θ es una falsa variable temporal, ya que solo produce una traslación de la escala temporal. Por tanto, es posible establecer las relaciones que aparece en la ecuación anterior.

Las siguiente definiciones pueden obtenerse de la comparación de las Ecuaciones (7.129) y (7.130):

$$H_{ij}(\bar{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{ij}(t) \exp(-i\bar{\omega}t) dt \quad (7.131a)$$

$$h_{ij}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{ij}(\bar{\omega}) \exp(i\bar{\omega}t) d\bar{\omega} \quad (7.131b)$$

Es decir, la función temporal de respuesta a un impulso $h_{ij}(t)$ y la función de respuesta en frecuencia $H_{ij}(\bar{\omega})$ son pares de la transformada de Fourier.

Ejemplo 7.8.1 Comprobar que las funciones de respuesta a un impulso y de respuesta en frecuencia son pares de la transformada de Fourier. Considerar un sistema de un grado de libertad de masa $m = 1$ kg, frecuencia natural $\omega = 2\pi$ rad/s y factor de amortiguamiento $\zeta = 0.02$.

Solución. Las Ecuaciones (7.131a) y (7.131b) indican que las funciones de respuesta a un impulso y de respuesta en frecuencia son pares de la transformada de Fourier, es decir, que conocida una de estas funciones se puede calcular la otra mediante una transformada

inversa de Fourier. Para comprobar esta propiedad se calcularán ambas funciones para el sistema de un grado de libertad mediante las siguientes expresiones:

$$h(t) = \frac{1}{m\omega} \exp(-\zeta \omega t) \sin(\omega_d(t)) \quad (7.132a)$$

$$H(i\bar{\omega}) = \frac{1}{m\omega^2 ((1 - \beta^2) + i(2\zeta))} \quad (7.132b)$$

La transformada de Fourier de $h(t)$ es la función $\mathcal{F}\{h(t)\} = H(i\bar{\omega})$. Así mismo, la transformada inversa de Fourier es una operación que define que $\mathcal{F}^{-1}\{H(i\bar{\omega})\} = h(t)$.

La transformada rápida de Fourier (FFT) y su aplicación inversa (IFFT) son unos algoritmos de transformación sobre una muestra discreta de datos evaluada en instantes de tiempo equiespaciados. En este ejemplo, se considera una muestra temporal dada por un incremento de tiempo suficiente para asegurar 20 muestras por periodo fundamental: $\Delta t = T/20 = 2\pi/20\omega = 0.05$ s. El análisis se realizará durante un periodo de $20T$ o, equivalentemente, sobre $N = T/\Delta t = 400$ muestras.

El paso de tiempo seleccionado define una frecuencia de muestreo $f_s = 1/\Delta t = 20$ Hz, lo que significa que se tomarán 20 muestras por segundo. El Teorema de Nyquist demuestra que la máxima frecuencia que puede identificarse en una señal temporal discreta es $f_{max} = f_s/2$. La aplicación de la FFT resulta en un número de muestras en el dominio de la frecuencia de la misma longitud que la muestra temporal. Por tanto, el incremento de frecuencia estará definido por $\Delta f = f_s/N$.

La rutina implementada en el Código 7.10 sirve para calcular la FFT y la IFFT de las funciones de respuesta a un impulso y de respuesta en frecuencia. En la Figura 7.17 se muestra el resultado de éstas aplicaciones. El grado de acuerdo entre las funciones de respuesta y la aplicación transformada está condicionado por la longitud de la muestra. La correlación entre ambos resultados mejora cuando se extiende el análisis a un número mayor de ciclos. Por ejemplo, en la Figura 7.18 se observa un buen acuerdo para una muestra de longitud $1000T$.

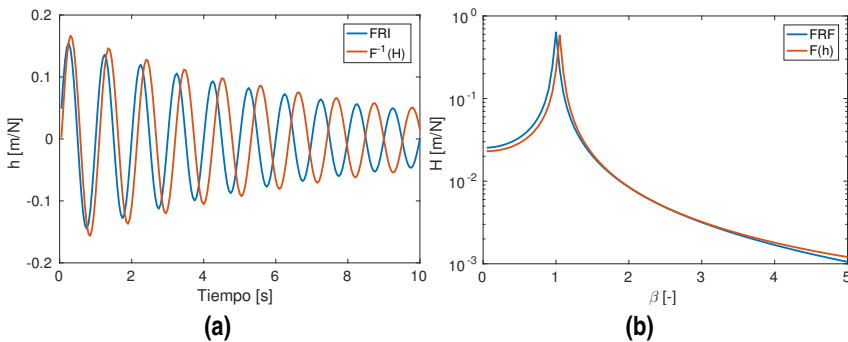


Figura 7.17 Pares de la transformada de Fourier: (a) Función de respuesta a un impulso y (b) función de respuesta en frecuencia. Longitud de la muestra temporal $20T$.

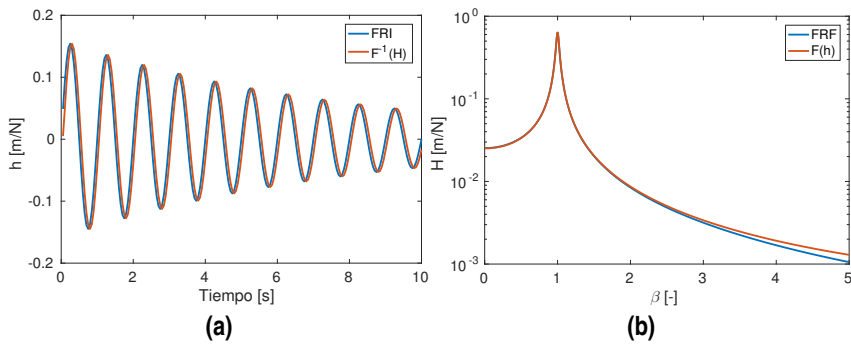


Figura 7.18 Pares de la transformada de Fourier: (a) Función de respuesta a un impulso y (b) función de respuesta en frecuencia. Longitud de la muestra temporal 1000T.

Código 7.10 Listado de comandos de MATLAB para calcular la función de respuesta al impulso y la FRF de un sistema de un grado de libertad.

```
% parámetros
m=1;
w=2*pi;
zeta=0.02;

%% función respuesta impulso

% tiempo
T=2*pi/w;
dt=T/20;
t=0:dt:100*T;
N=length(t);

%
h=1/(m*w)*exp(-zeta*w*t).*sin(w*t);

%% FRF

% frecuencias
fs=dt^-1;
w_=(fs/N:fs/N:fs)*2*pi;
beta=w_/w;
H=1./(m*w^2*(1-beta.^2+2*i*zeta*beta));

%% Transformada Fourier
H_=fft(h)/fs;
h_=ifft(H,'symmetric')*fs;

%% figuras
figure
```

```

plot(t, h, t, h_)
xlim([0 10])
xlabel('Tiempo [s]')
ylabel('Desplazamiento [m]')
title('Función respuesta impulso')
legend('FRI', 'ifft FRF')

figure
semilogy(beta, abs(H), beta, abs(H_))
xlim([0 fs * 0.5])
xlabel('\beta [-]')
ylabel('H [m/N]')
title('Función respuesta frecuencia')
legend('FRF', 'FFT FRI')

```

Ejemplo 7.8.2 En este ejemplo se estudia el comportamiento dinámico de un sistema de dos grados de libertad que se puede usar como medida de mitigación de vibraciones. En la Figura 7.19 se representa el sistema que se va a analizar. El objetivo de esta medida es la reducción del nivel de vibraciones de un sistema de un grado de libertad sobre el que actúa una fuerza armónica $p(t) = P(i\bar{\omega}) \sin(\bar{\omega}t)$. Por ejemplo, esta situación se corresponde con una máquina rotativa y su cimentación. La reducción de vibraciones se consigue instalando un dispositivo que se denomina *Amortiguador de Masa Sintonizado* (TMD³). Un TMD consiste en una masa suspendida que se modeliza mediante un segundo sistema de un grado de libertad con propiedades m_a , k_a y c_a .

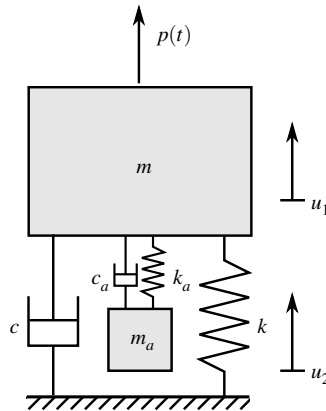


Figura 7.19 Representación de un sistema de un grado de libertad con TMD.

Solución. La solución de este ejemplo contempla, en primer lugar, el cálculo de la FRF del sistema sin medida de mitigación y, posteriormente, el análisis del efecto del TMD en la respuesta. Las propiedades del sistema de un grado de libertad se corresponden con las del ejemplo anterior: masa $m = 1$ kg, frecuencia natural $\omega = 2\pi$ rad/s y factor de amortiguamiento $\zeta = 0.02$.

³ Acrónimo del término en inglés *Tuned Mass Damper*

La FRF se obtiene a partir de la Ecuación (7.113) con una fuerza de amplitud unidad, $P(i\omega) = 1 \text{ N}$. La rigidez y el amortiguamiento de la cimentación se calculan como $k = \omega^2 m$ y $c = \zeta 2\omega m$. La FRF se calcula en un rango de frecuencias máximo de 64 Hz en $N = 2048$ pasos.

Las propiedades del amortiguador se seleccionan de forma que la frecuencia de resonancia sea $\omega_a = \omega$ y que el factor de amortiguamiento sea diez veces mayor, $\zeta_a = 10\zeta$. Por ejemplo, si se toma $m_a = 0.1 \text{ kg}$ los valores de rigidez y amortiguamiento son $k_a = m_a \omega^2$ y $c_a = 10\zeta 2m_a \omega$. Es necesario definir las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez del sistema con TMD para calcular la FRF:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m_a \end{pmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} k + k_a & -k_a \\ -k_a & k_a \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c + c_a & -c_a \\ -c_a & c_a \end{pmatrix}$$

En la Figura 7.20.(a) se muestra la FRF antes y después de instalar el TMD. La FRF del sistema sin aislamiento muestra un pico a la frecuencia de resonancia. El efecto del TMD elimina esa resonancia, pero aparecen dos nuevas frecuencias de resonancia. Aunque este efecto puede parecer perjudicial, el elevado amortiguamiento del TMD hace que estas resonancias sean de una magnitud inferior a la que se producía en el sistema original. En la Figura 7.20.(b) se muestra la función de respuesta al impulso calculada como la transformada inversa de la FRF. En esta figura se observa el efecto mitigador del TMD.

Los Códigos 7.11 y 7.12 recogen el listado de comandos de MATLAB y ANSYS para analizar el problema.

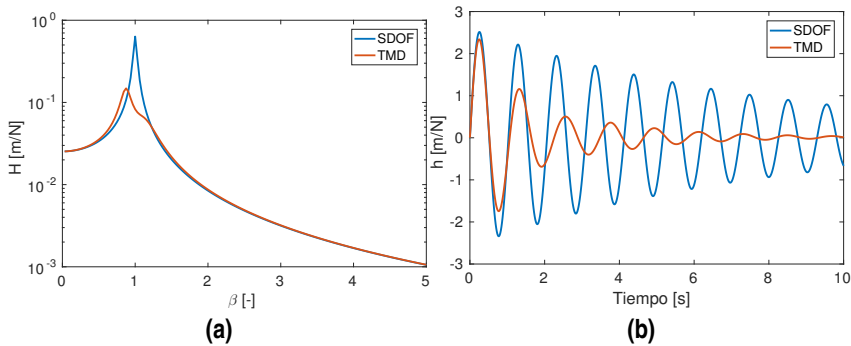


Figura 7.20 (a) Función de respuesta en frecuencia y (b) función de respuesta a un impulso de un sistema de un grado de libertad con TMD.

Código 7.11 Listado de comandos de MATLAB para calcular la FRF de un Amortiguador de Masa Sintonizado.

```
% propiedades sdof
m=1;
```

```

w=2*pi;
zeta=0.01;

% propiedades TMD
m_a=0.1;
zeta_a=10*zeta;

% frecuencias
Fmax = 64;           % frecuencia muestreo
N = 2048;           % no. muestras
w_ = 2*pi*(Fmax/N:Fmax/N:Fmax); % vector frecuencias
beta=w_/w;          % frecuencia adimensional

%% FRF sdof
k=w^2*m;
c=zeta*2*w*m;
H=1./(-w_^2*m+1i*w_*c+k);

%% FRF TMD
w_a=w;
ka=w_a^2*m_a;
ca=zeta_a*2*w_a*m_a;

M=diag([m m_a]);
K=[k+ka -ka; -ka ka];
C=[c+ca -ca; -ca ca];
p=[1 0]';

Ht=zeros(2,N);
for i=1:N           % bucle frecuencias
    Ht(:,i)=(-w_(i).^2*M+1i*w_(i)*C+K)\p;
end

% representación
figure
semilogy(beta,abs(H),beta,abs(Ht(1,:)))
xlabel('\beta [-]')
ylabel('H [m/N]')
legend('SDOF','TMD')

%% respuesta temporal
T = 1/Fmax;           % periodo muestreo
t = (0:N-1)*T;       % vector tiempo

u = ifft(H)*N;
ut = ifft(Ht,[],2)*N;

% representación
figure
plot(t,u,t,ut(1,:))
xlabel('Tiempo [s]')
ylabel('h [m/N]')
legend('SDOF','TMD')

```

Código 7.12 Listado de comandos de ANSYS para calcular la FRF de un Amortiguador de Masa Sintonizado.

```

/prep7
et ,1, combin 14,,,2
et ,2, mass 21,,,4

r ,1,39.5,0.25      ! propiedades k,c
r ,2,3.95,0.25      ! propiedades ka, ca
r ,3,1              ! masa m
r ,4,0.1            ! masa ma

n,1
n,2,1
n,3,2

! elementos muelle-amortiguador
type,1
real ,1
e,1,2
real ,2
e,2,3

! elementos masa
type,2
real ,3
e,2          ! sistema lgdl
real ,4
e,3          ! tmd

! condiciones de contorno
d,1, all
d,2, uy ,,,3
f ,2, fx,1
finish

/solu
antype,harmic          ! análisis armónico
hropt , full           ! análisis completo
hrout , off            ! resultados : amplitud y fase
nsubst,2048            ! no. frecuencias
harfrq ,0.64           ! rango frecuencia
solve
finish

/post26
nsol ,2,2, u,x,ux1     ! desplazamiento ux
plvar ,2,3             ! representa ux
finish

```

7.9 Problemas propuestos

- 7.1** Definir los siguientes conceptos: *i*) espectro de la respuesta, *ii*) pseudo-velocidad espectral y *iii*) pseudo-aceleración espectral. ¿Cuál es la relación entre estos conceptos? Así mismo, si se considera una función de pseudo-aceleración espectral definida por $S_{pa}(\zeta, \omega) = 1 \text{ m/s}^2$, representar el espectro de la respuesta y la pseudo-velocidad espectral en función del periodo.
- 7.2** Modificar el Código 6.1 en el que se implementa la integral de convolución de Duhamel para calcular el espectro de la respuesta, la pseudo-velocidad espectral y la pseudo-aceleración espectral de los sistemas de un grado de libertad definidos por los periodos fundamentales en el intervalo $0 \leq T \leq 3 \text{ s}$ y con los factores de amortiguamiento $\zeta = \{0, 0.02, 0.20, 0.40\}$.
- 7.3** Calcular la matriz de masa consistente de un elemento que trabaja a esfuerzo axial de dos nodos, en el caso particular en el que el área de la sección transversal $A = h(x)b$ es un rectángulo de altura variable, siendo ésta $h(x) = h_0(1 + x/L)$. La densidad del material y longitud la del elemento son ρ y L , respectivamente.
- 7.4** Calcular las frecuencias naturales y modos de vibración de una estructura de seis plantas con las propiedades del Ejemplo 7.4.1. Calcular el periodo característico, el factor de participación, la masa modal efectiva y la ratio con la masa total para cada modo de la estructura. Representar los modos de vibración. Comprobar que se cumple la condición de ortogonalidad y calcular la masa y la rigidez modal de cada modo.
- 7.5** Modificar el Código 7.1 de ANSYS para realizar el análisis modal de una estructura de seis plantas con las propiedades del Ejemplo 7.4.1. Representar los modos de vibración normalizados a la matriz de masa y a la máxima componente unidad⁴ como se explica en el Sección 7.4.
- 7.6** Comparar las solución del Ejemplo 7.5.2 cuando se consideran uno, dos y tres modos para calcular el desplazamiento de la planta superior de la estructura mediante superposición modal. Escribir una rutina de MATLAB basada en el Código 7.3 para resolver este problema.
- 7.7** Calcular el desplazamiento máximo de una estructura de seis plantas con las propiedades del Ejemplo 7.4.1 producido por un sismo definido por el espectro de la respuesta elástica de la Figura 7.13. Comparar el resultado calculado con el que se obtiene siguiendo la recomendación de la NCSE-02 para combinar los modos de vibración.
- 7.8** Calcular la evolución temporal de la componente horizontal del desplazamiento del forjado superior de la edificación de seis plantas del Problema 7.4 producido por una racha de viento. La acción del viento se define como una carga uniformemente distribuida $q(t) = 1.4H(10 - t) \text{ kN/m}$ que actúa en la dirección horizontal sobre la estructura. Modificar el Código 7.9 de ANSYS para realizar el análisis transitorio de la estructura. Justificar el valor del incremento de tiempo seleccionado y la estimación de las constantes de proporcionalidad del modelo de amortiguamiento de Rayleigh con $\zeta = 2\%$.

⁴ Consultar las opciones de análisis modal definidas mediante el comando MODOPT

8 Teoría de placas

8.1 Introducción

Las placas son elementos estructurales que se caracterizan por tener una dimensión, el espesor, mucho menor que las otras dos. Matemáticamente se puede expresar este hecho como: $\delta = L/t \gg 1$, siendo L una longitud característica (ancho o largo), t el espesor y δ se define como el coeficiente de esbeltez de la placa. Las placas pueden clasificarse como placas delgadas ($\delta \geq 100$), moderadamente delgadas ($20 \leq \delta < 100$), gruesas ($3 \leq \delta < 20$), y muy gruesas ($\delta < 3$). Las teorías clásicas de placas permiten estudiar placas delgadas (teoría de Kirchhoff) y placas gruesas (teoría de Reissner-Mindlin). Sin embargo, estas teorías no permiten estudiar las placas de grandes espesores, siendo necesario emplear conceptos de la teoría de la elasticidad tridimensional.

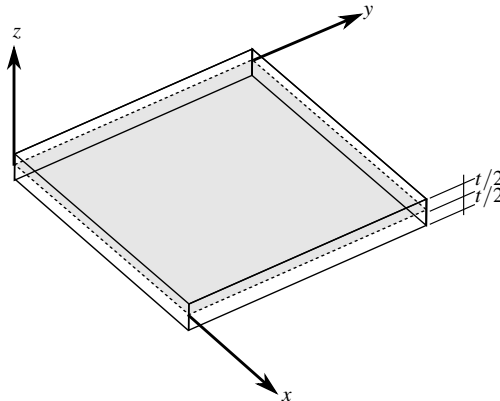


Figura 8.1 Geometría de la placa.

En este capítulo se estudia la teoría general de placas desarrollando las ecuaciones de equilibrio que gobiernan el problema. En primer lugar se desarrollan las expresiones que definen los desplazamiento, las deformaciones y las tensiones, así como los esfuerzos que

aparecen en este tipo de elemento estructural, para obtener las ecuaciones de equilibrio que gobiernan la respuesta de la estructura. Posteriormente, se particularizan las expresiones obtenidas para placas delgadas. Finalmente, se presenta el enfoque del método de los elementos finitos para el análisis de placas.

8.2 Campo de desplazamientos

El desarrollo de las teorías de placas se basa en las siguientes hipótesis: i) la estructura presenta un comportamiento elástico y lineal, con pequeños desplazamientos y pequeñas deformaciones; ii) el espesor de la placa no se modifica debido a la deformación, es decir, no existe un acortamiento o alargamiento de la normal a la superficie de la placa; iii) la consideración anterior conlleva que las deformaciones y las tensiones normales al plano medio de la placa son nulas. La validez de esta tercera hipótesis se restringe a los puntos de la placa que no se encuentran solicitados por acciones externas, ya que en las zonas de aplicación de la carga existirán tensiones normales a la superficie de la placa. Sin embargo, en estos casos las tensiones normales asociadas a la flexión son mayores debido a que la placa desarrolla su capacidad portante principalmente mediante esfuerzos de flexión.

El campo de desplazamientos de una placa se define por los desplazamientos u , v y w de acuerdo a los ejes coordenados x , y y z , respectivamente, y por las rotaciones θ_x y θ_y (Figura 8.2). Los desplazamientos en un punto de la placa se descomponen en aquellos relacionados con un problema elástico de tensión plana, asociados a las componentes $u_0(x,y,z=0)$ y $v_0(x,y,z=0)$, y los desplazamientos producidos por la flexión de la placa, que determinan el desplazamiento transversal w y las rotaciones θ_x y θ_y del plano medio de la placa ($z=0$):

$$u(x,y,z) = u_0(x,y) - z\theta_x(x,y) \quad (8.1a)$$

$$v(x,y,z) = v_0(x,y) - z\theta_y(x,y) \quad (8.1b)$$

$$w(x,y,z) = w(x,y) \quad (8.1c)$$

El campo de desplazamientos dado por las Ecuaciones (8.1a-8.1c) presenta como variables independientes del problema de flexión de la placa las componentes w , θ_x y θ_y . Los desplazamientos en un punto de la placa $u(x,y,z)$ y $v(x,y,z)$ se calculan a partir del valor las rotaciones $\theta_x(x,y)$ y $\theta_y(x,y)$, y de la distancia z al plano medio (Figura 8.3). Los desplazamientos transversales $w(x,y)$ son uniformes en el espesor de la placa en un determinado punto de acuerdo a la segunda hipótesis realizada.

Las componentes $u_0(x,y,z=0)$ y $v_0(x,y,z=0)$ se pueden calcular fácilmente como se indica en la Sección 8.10.

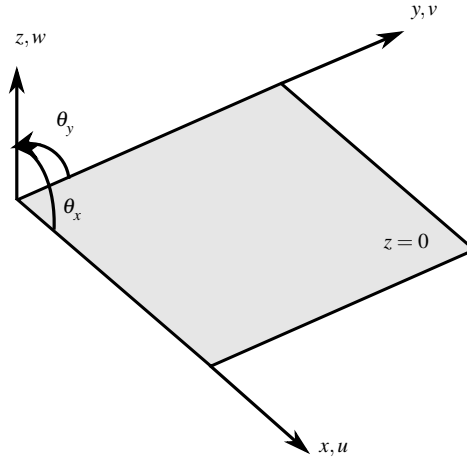


Figura 8.2 Definición del campo de desplazamientos en una placa.

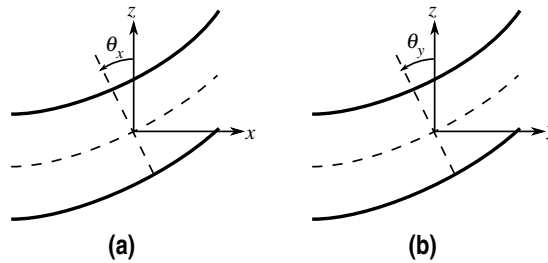


Figura 8.3 Definición del giro.

8.3 Tensor de deformaciones

El estado de deformaciones en una placa se define a partir de la relación cinemática entre las deformaciones y los desplazamientos. De esta forma se obtiene que:

$$\boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}]^T = \left[\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right]^T \quad (8.2)$$

Derivando la definición de los desplazamientos dada por las Ecuaciones (8.1a-8.1c) se llega a las expresiones que relacionan las deformaciones y los desplazamientos de la placa:

$$\epsilon_x(x,y,z) = -z \frac{\partial \theta_x(x,y)}{\partial x} \quad (8.3a)$$

$$\epsilon_y(x,y,z) = -z \frac{\partial \theta_y(x,y)}{\partial y} \quad (8.3b)$$

$$\gamma_{xy}(x,y,z) = -z \left(\frac{\partial \theta_x(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y(x,y)}{\partial x} \right) \quad (8.3c)$$

$$\gamma_{xz}(x,y) = -\theta_x(x,y) + \frac{\partial w(x,y)}{\partial x} \quad (8.3d)$$

$$\gamma_{yz}(x,y) = -\theta_y(x,y) + \frac{\partial w(x,y)}{\partial y} \quad (8.3e)$$

La hipótesis que establece que las tensiones normales a la placa son nulas lleva asociado implícitamente que $\epsilon_z = 0$.

Las deformaciones se pueden clasificar en términos relacionados con los efectos de flexión (ϵ_f) y, por otra parte, los producidos por el cortante (ϵ_c):

$$\epsilon(x,y,z) = \begin{bmatrix} \epsilon_f(x,y,z) \\ \epsilon_c(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_x(x,y,z) \\ \epsilon_y(x,y,z) \\ \gamma_{xy}(x,y,z) \\ \gamma_{xz}(x,y) \\ \gamma_{yz}(x,y) \end{bmatrix} \quad (8.4)$$

La deformación de la placa por flexión origina un acortamiento o un alargamiento de la parte superior e inferior de la sección (Figura 8.4.a), mientras que la deformación por cortante produce una distorsión de la sección (Figura 8.4.b). En el primer caso se produce un giro conjunto de la sección y de la línea media. Sin embargo, en el segundo caso, los giros de la línea media y de la normal son independientes.

8.4 Tensor de tensiones

El estado tensional que se genera en una placa (Figura 8.4) cuando actúa un conjunto de acciones externas puede definirse a partir de las deformaciones y de la matriz de comportamiento del material $\mathbf{D}$:

$$\sigma = \mathbf{D}\epsilon \quad (8.5)$$

La Ecuación (8.6) representa la matriz de comportamiento identificando los términos relacionados con la deformación por flexión y con la deformación por cortante:

$$\mathbf{D} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{D}_f & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{D}_c \end{array} \right] \quad (8.6)$$

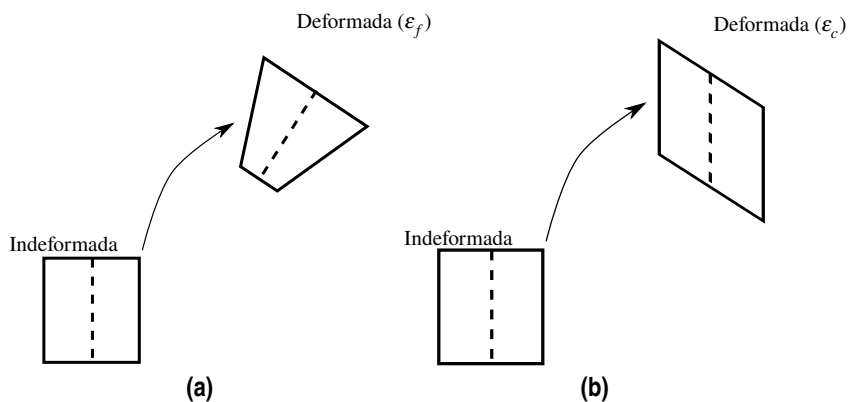


Figura 8.4 Deformación de una sección (a) por flexión (ϵ_f) y (b) por cortante (ϵ_c).

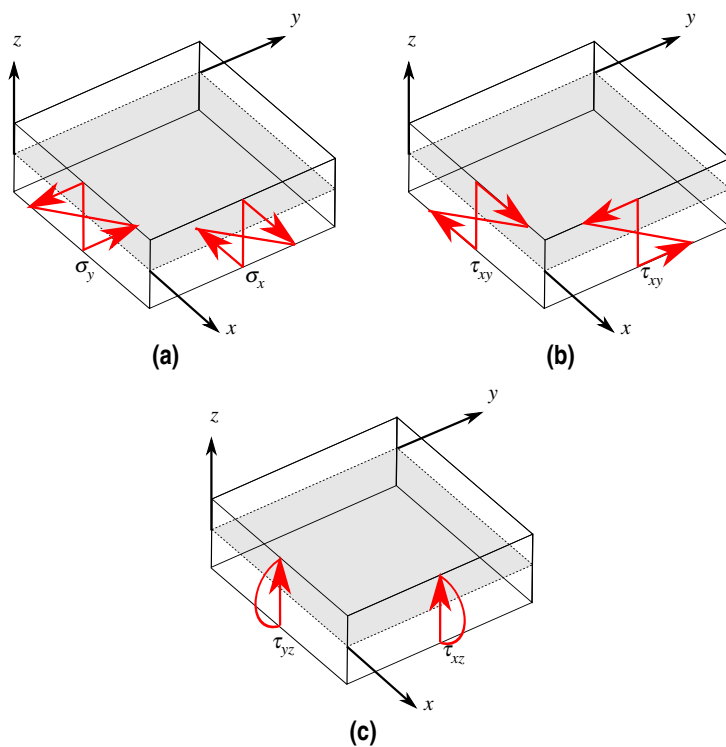


Figura 8.5 Estado tensional en una placa: (a) tensiones normales y (b,c) tensiones tangenciales.

Las definiciones de las submatrices $\mathbf{D}_f$ y $\mathbf{D}_c$ para un material isótropo son las siguientes:

$$\mathbf{D}_f = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_c = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \quad (8.7)$$

donde E denota el módulo elástico, ν es el coeficiente de Poisson y G se corresponde con el módulo de elasticidad transversal.

Las componentes del tensor de tensiones se calculan mediante la ley de comportamiento (Ecuación (8.6)):

$$\sigma_x(x,y,z) = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x(x,y,z) + \nu\varepsilon_y(x,y,z)) \quad (8.8a)$$

$$\sigma_y(x,y,z) = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y(x,y,z) + \nu\varepsilon_x(x,y,z)) \quad (8.8b)$$

$$\tau_{xy}(x,y,z) = G\gamma_{xy}(x,y,z) \quad (8.8c)$$

$$\tau_{xz}(x,y) = G\gamma_{xz}(x,y) \quad (8.8d)$$

$$\tau_{yz}(x,y) = G\gamma_{yz}(x,y) \quad (8.8e)$$

Además de las expresiones anteriores es necesario recordar que la componente normal de la tensión, σ_z , es nula de acuerdo a la tercera hipótesis de la teoría.

Sustituyendo las expresiones de las deformaciones en función de los desplazamientos se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\sigma_x(x,y,z) = -z \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial \theta_x(x,y)}{\partial x} + \nu \frac{\partial \theta_y(x,y)}{\partial y} \right) \quad (8.9a)$$

$$\sigma_y(x,y,z) = -z \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial \theta_y(x,y)}{\partial y} + \nu \frac{\partial \theta_x(x,y)}{\partial x} \right) \quad (8.9b)$$

$$\tau_{xy}(x,y,z) = -zG \left(\frac{\partial \theta_x(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y(x,y)}{\partial x} \right) \quad (8.9c)$$

$$\tau_{xz}(x,y) = G \left(-\theta_x(x,y) + \frac{\partial w(x,y)}{\partial x} \right) \quad (8.9d)$$

$$\tau_{yz}(x,y) = G \left(-\theta_y(x,y) + \frac{\partial w(x,y)}{\partial y} \right) \quad (8.9e)$$

Si se consideran las curvaturas definidas por:

$$\chi_x(x,y) = \frac{\partial \theta_x(x,y)}{\partial x} \quad (8.10a)$$

$$\chi_y(x,y) = \frac{\partial \theta_y(x,y)}{\partial y} \quad (8.10b)$$

$$\chi_{xy}(x,y) = \frac{\partial \theta_x(x,y)}{\partial y} \quad (8.10c)$$

$$\chi_{yx}(x,y) = \frac{\partial \theta_y(x,y)}{\partial x} \quad (8.10d)$$

se obtienen las siguientes expresiones para las componentes del tensor de tensiones asociadas a la flexión de la placa:

$$\sigma_x(x,y,z) = -z \frac{E}{1-\nu^2} (\chi_x(x,y) + \nu \chi_y(x,y)) \quad (8.11a)$$

$$\sigma_y(x,y,z) = -z \frac{E}{1-\nu^2} (\chi_y(x,y) + \nu \chi_x(x,y)) \quad (8.11b)$$

$$\tau_{xy}(x,y,z) = -zG (\chi_{xy}(x,y) + \chi_{yx}(x,y)) \quad (8.11c)$$

8.5 Esfuerzos

El estado tensional de la placa permite definir los esfuerzos representados en la Figura 8.6: i) momentos flectores M_x y M_y producidos por las tensiones normales que actúan sobre el espesor de la sección σ_x y σ_y , respectivamente; ii) momento torsor M_{xy} debido a la tensión tangencial τ_{xy} ; y iii) esfuerzos cortantes Q_x y Q_y definidos por las tensiones tangenciales τ_{xz} y τ_{yz} .

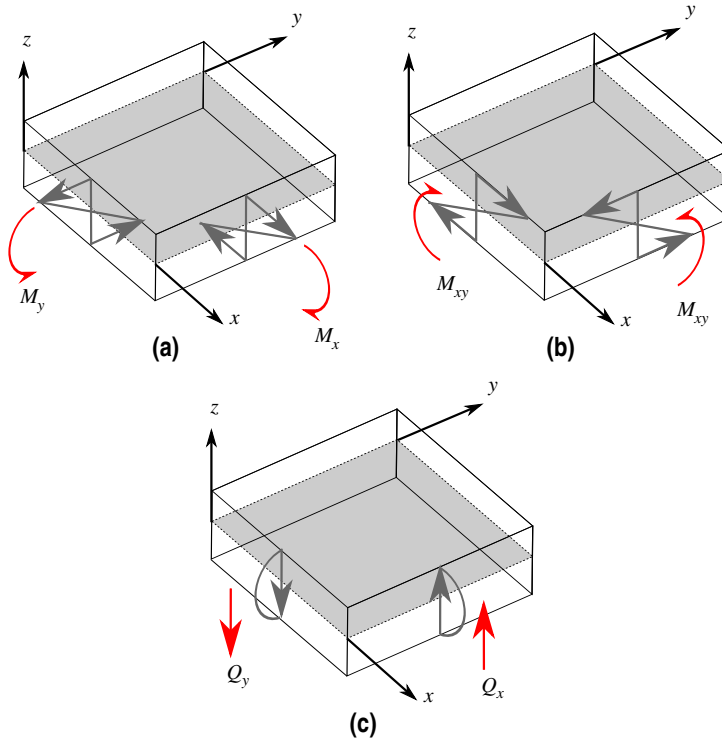


Figura 8.6 Definición de los esfuerzos (a) flectores, (b) torsores y (c) cortantes.

Los esfuerzos generados en una placa se calculan mediante la integración de las tensiones en el espesor de la placa:

$$M_x(x,y,z) = \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_x(x,y,z) dz \quad (8.12a)$$

$$M_y(x,y,z) = \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_y(x,y,z) dz \quad (8.12b)$$

$$M_{xy}(x,y,z) = \int_{-t/2}^{t/2} z \tau_{xy}(x,y,z) dz \quad (8.12c)$$

$$Q_x(x,y) = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz}(x,y) dz \quad (8.12d)$$

$$Q_y(x,y) = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz}(x,y) dz \quad (8.12e)$$

Sustituyendo las definiciones de las deformaciones en función de los desplazamientos en las relaciones anteriores se obtienen las siguientes ecuaciones que relacionan los esfuerzos con el campo de desplazamientos:

$$M_x(x,y) = -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \quad (8.13a)$$

$$M_y(x,y) = -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \quad (8.13b)$$

$$M_{xy}(x,y) = -\frac{G^*t^3}{12} \left(\frac{\partial \theta_x(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y(x,y)}{\partial x} \right) \quad (8.13c)$$

$$Q_x(x,y) = G^*t \left(-\theta_x(x,y) + \frac{\partial w(x,y)}{\partial x} \right) \quad (8.13d)$$

$$Q_y(x,y) = G^*t \left(-\theta_y(x,y) + \frac{\partial w(x,y)}{\partial y} \right) \quad (8.13e)$$

donde G^* es el módulo de rigidez transversal equivalente. Es necesario introducir este valor equivalente ya que la distribución de tensiones tangenciales reales es como la presentada en la Figura 8.6, siendo nula en los bordes de la placa. Sin embargo, según las hipótesis realizadas, las tensiones tangenciales de la teoría de placas $\tau_{xz}(x,y)$ y $\tau_{yz}(x,y)$ son constantes en el espesor. Un valor $G^* = 5/6G$ permite obtener un aproximación adecuada del cálculo de los esfuerzos cortantes en una placa de espesor constante (para otro tipo de placas existen tablas que proporcionan el valor de G^*).

Los momentos pueden expresarse en función de la curvatura de la placa como:

$$M_x(x,y) = -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} (\chi_x(x,y) + \nu\chi_y(x,y)) \quad (8.14a)$$

$$M_y(x,y) = -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} (\chi_y(x,y) + \nu\chi_x(x,y)) \quad (8.14b)$$

$$M_{xy}(x,y) = -\frac{G^*t^3}{12} (\chi_{xy}(x,y) + \chi_{yx}(x,y)) \quad (8.14c)$$

Finalmente, es sencillo obtener el estado tensional una vez que los esfuerzos son conocidos:

$$\sigma_x(x,y,z) = z \frac{M_x(x,y)}{I} \quad (8.15a)$$

$$\sigma_y(x,y,z) = z \frac{M_y(x,y)}{I} \quad (8.15b)$$

$$\tau_{xy}(x,y,z) = z \frac{M_{xy}(x,y)}{I} \quad (8.15c)$$

$$\tau_{xz}^*(x,y) = \frac{Q_x(x,y)}{t} \quad (8.15d)$$

$$\tau_{yz}^*(x,y) = \frac{Q_y(x,y)}{t} \quad (8.15e)$$

donde $I = t^3/12$. El asterisco sobre las tensiones tangenciales τ_{xz} y τ_{yz} hace referencia a la simplificación adoptada que permite considerar la tensión tangencial constante en el espesor.

Es importante indicar que los esfuerzos definidos por las Ecuaciones 8.13a-8.13e son esfuerzos por unidad de longitud. Por ejemplo, el momento $M_x [Nm/m]$ representa una distribución de momentos aplicada en un lado de la placa con x constante. De igual modo, el cortante $Q_y [N/m]$ representa una distribución de fuerzas aplicada en un lado de la placa con y constante.

8.6 Ecuación de equilibrio

En esta sección se deducen las ecuaciones de equilibrio para la resolución de un problema de teoría de placas. Cuando la placa se encuentra sometida a una configuración de cargas externas q debe encontrarse en equilibrio, es decir, la suma de fuerzas y momentos en cualquier parte elemental tienen que ser nula. En una placa es posible establecer tres ecuaciones de equilibrio: i) equilibrio de fuerzas perpendiculares a la placa; ii) equilibrio de momentos alrededor del eje coordenado x ; y iii) equilibrio de momentos en torno al eje y .

En la Figura 8.7 se representan los esfuerzos cortantes y momentos que actúan en un elemento diferencial $dx dy$. Además, se considera que la placa está solicitada por

una distribución de carga uniformemente repartida de valor q que actúa en la dirección transversal.

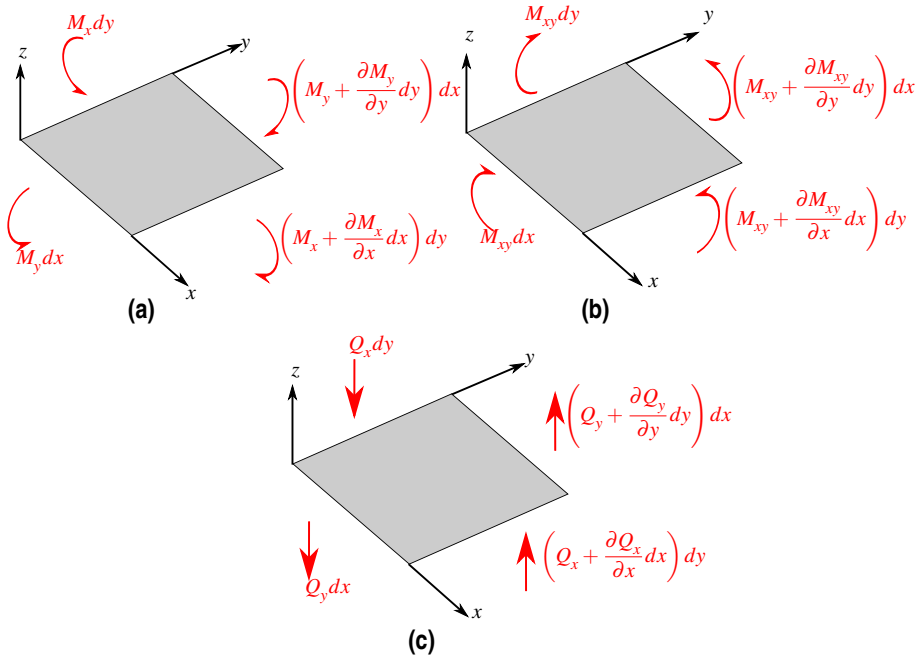


Figura 8.7 Definición de esfuerzos (a) flectores, (b) torsores y (c) cortantes en un elemento diferencial de placa.

El equilibrio de fuerzas verticales permite expresar la relación entre los esfuerzos cortantes y la carga repartida q :

$$\left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx\right) dy - Q_x dy + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy\right) dx - Q_y dx + q dx dy = 0 \quad (8.16)$$

Una vez simplificada la ecuación anterior se obtiene la ecuación de equilibrio de las fuerzas verticales:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0 \quad (8.17)$$

Igualmente, el equilibrio de momentos en torno al eje y en el punto definido por $(dx, dy/2)$ permite escribir la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} & \left(\cancel{M_x} + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx \right) dy - \cancel{M_x} d\bar{y} + \left(\cancel{M_{xy}} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy \right) dx - \cancel{M_{xy}} d\bar{x} \\ & - Q_x dy dx + \underbrace{\left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx \frac{dx}{2}}_{\mathcal{O}^2} - \underbrace{Q_y dx \frac{dx}{2}}_{\mathcal{O}^2} + \underbrace{q dx dy \frac{dx}{2}}_{\mathcal{O}^2} = 0 \end{aligned} \quad (8.18)$$

en la que la resultante de la fuerza repartida q produce un momento $q dx dy dx/2$ asumiendo que actúa sobre el punto central del elemento diferencial. En esta ecuación aparecen términos de orden superior ($\mathcal{O}^2$) que involucran productos de la forma $dx dx$ y que pueden despreciarse respecto al resto de términos. De esta forma, simplificando la ecuación de equilibrio de momentos que actúan alrededor del eje y se obtiene:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \quad (8.19)$$

Análogamente, el equilibrio de momentos que actúan según el eje x proporciona la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} & \left(\cancel{M_y} + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy \right) dx - \cancel{M_y} d\bar{x} + \left(\cancel{M_{xy}} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx \right) dy - \cancel{M_{xy}} d\bar{y} \\ & - Q_y dx dy + \underbrace{\left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy \frac{dy}{2}}_{\mathcal{O}^2} - \underbrace{Q_x dy \frac{dy}{2}}_{\mathcal{O}^2} + \underbrace{q dx dy \frac{y}{2}}_{\mathcal{O}^2} = 0 \end{aligned} \quad (8.20)$$

Una vez simplificada se obtiene la expresión para el equilibrio de momentos en torno al eje coordenado x :

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0 \quad (8.21)$$

Las tres ecuaciones de equilibrio que se han obtenido (Ecuaciones (8.17), (8.19) y (8.21)) pueden combinarse en una sola ecuación. Derivando las Ecuaciones (8.19) y (8.21) respecto a x e y , respectivamente, se obtienen las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial Q_x}{\partial x} = 0 \quad (8.22)$$

$$\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0 \quad (8.23)$$

Sustituyendo ambas expresiones en la ecuación de equilibrio de fuerzas verticales (Ecuación (8.17)) se obtiene:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q \quad (8.24)$$

Finalmente, empleando las expresiones de los momentos M_x , M_y y M_{xy} se llega a la siguiente relación:

$$\begin{aligned} & -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^3 \theta_x}{\partial x^3} + \nu \frac{\partial^3 \theta_y}{\partial x^2 \partial y} \right) - \frac{G^* t^3}{12} \left(\frac{\partial^3 \theta_x}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \theta_y}{\partial x^2 \partial y} \right) \\ & - \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^3 \theta_y}{\partial y^3} + \nu \frac{\partial^3 \theta_x}{\partial x \partial y^2} \right) = -q \end{aligned} \quad (8.25)$$

Esta relación puede reescribirse definiendo $D = Et^3/12(1-\nu^2)$ y teniendo en cuenta que $G = E/2(1+\nu)$:

$$D \left[\frac{\partial^3 \theta_x}{\partial x^3} + \cancel{\nu \frac{\partial^3 \theta_y}{\partial x^2 \partial y}} + (1-\nu) \left(\frac{\partial^3 \theta_x}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \theta_y}{\partial x^2 \partial y} \right) + \frac{\partial^3 \theta_y}{\partial y^3} + \cancel{\nu \frac{\partial^3 \theta_x}{\partial x \partial y^2}} \right] = q \quad (8.26)$$

Simplificando esta expresión se llega a la ecuación de equilibrio de la placa expresada en función de los giros θ_x y θ_y :

$$D \left[\frac{\partial^3 \theta_x}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \theta_x}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \theta_y}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \theta_y}{\partial y^3} \right] = q \quad (8.27)$$

8.7 Teoría de placa delgada o de Kirchhoff

En las secciones anteriores se ha desarrollado la teoría de placas general o de Reissner-Mindlin en la que las variables independientes del campo de desplazamientos son el desplazamiento transversal w , y las rotaciones θ_x y θ_y . Los giros de la placa pueden definirse como la superposición del giro producido por la flexión más la rotación debida a la deformación por cortante (Figura 8.8). La componente del giro por flexión está relacionada con la variación de la flecha de la placa a lo largo de una determinada dirección α , $\theta_\alpha^f = \partial w / \partial \alpha$. Así mismo, el giro producido por el efecto del cortante está definido por la rotación θ_α^c . De esta forma, el giro total viene dado mediante la siguiente expresión:

$$\theta_\alpha = \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \theta_\alpha^c \quad (8.28)$$

donde α representa indistintamente las direcciones definidas por los ejes x e y .

En placas delgadas ($\delta \geq 100$) las tensiones tangenciales τ_{xz} y τ_{yz} son inferiores que las tensiones producidas en el plano de la placa: σ_x , σ_y y τ_{xy} . En este caso, las deformaciones

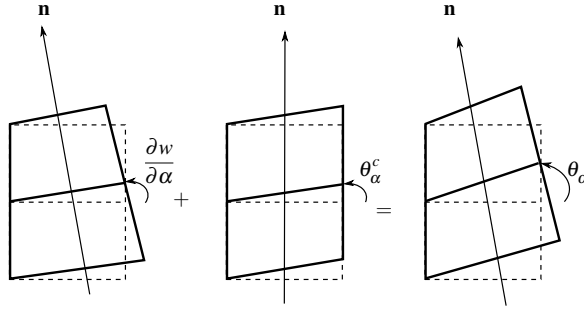


Figura 8.8 Descomposición de la rotación de una placa.

tangenciales γ_{xz} y γ_{yz} también son pequeñas, y la pendiente del plano medio de la placa se puede aproximar con la rotación de la normal. Es decir, las normales al plano medio de la placa en la situación indeformada permanecen normales al plano medio de la placa en la situación deformada (Figura 8.9). Por tanto, los giros de la placa se obtienen directamente a partir de los desplazamientos transversales w :

$$\theta_x(x,y) = \frac{\partial w(x,y)}{\partial x} \quad (8.29a)$$

$$\theta_y(x,y) = \frac{\partial w(x,y)}{\partial y} \quad (8.29b)$$

Teniendo en cuenta estas consideraciones, el campo de desplazamientos definido por las

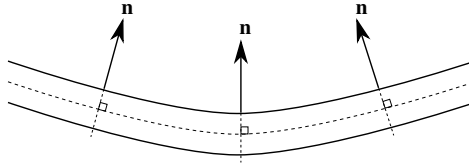


Figura 8.9 Flexión de una placa delgada.

Ecuaciones (8.1a-8.1c) se aproxima como:

$$u(x,y,z) = -z \frac{\partial w(x,y)}{\partial x} \quad (8.30a)$$

$$v(x,y,z) = -z \frac{\partial w(x,y)}{\partial y} \quad (8.30b)$$

$$w(x,y,z) = w(x,y) \quad (8.30c)$$

donde se observa que la única componente independiente de los desplazamientos es $w(x,y)$.

Así mismo, el tensor de deformaciones (Ecuaciones (8.3a-8.3c)) está definido por la deformación por flexión:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x,y,z) = [\boldsymbol{\varepsilon}_f(x,y,z)] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x(x,y,z) \\ \varepsilon_y(x,y,z) \\ \gamma_{xy}(x,y,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (8.31)$$

siendo nulas las componentes γ_{xz} y γ_{yz} .

La definición de las deformaciones de la placa mediante las ecuaciones anteriores permite obtener el estado tensional expresado como una función del desplazamiento transversal:

$$\sigma_x(x,y,z) = -z \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (8.32a)$$

$$\sigma_y(x,y,z) = -z \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (8.32b)$$

$$\tau_{xy}(x,y,z) = -2zG \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (8.32c)$$

$$(8.32d)$$

También, las definiciones de los esfuerzos dadas por las Ecuaciones (8.13a-8.13c) se modifican de la siguiente forma:

$$M_x(x,y) = -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (8.33a)$$

$$M_y(x,y) = -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (8.33b)$$

$$M_{xy}(x,y) = -\frac{G^* t^3}{12} \left(2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (8.33c)$$

Puede comprobarse que los esfuerzos cortantes Q_x y Q_y son nulos de acuerdo a la definición de las rotaciones de la placa dada por las Ecuaciones (8.29a-8.29b). Este resultado se discute posteriormente.

Finalmente, sustituyendo las expresiones de los esfuerzos en la ecuación de equilibrio (Ecuación (8.41)) se obtiene la siguiente expresión:

$$D \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] = q \quad (8.34)$$

O, equivalentemente:

$$\nabla^4 w(x,y) = \frac{q(x,y)}{D} \quad (8.35)$$

El desplazamiento vertical de una placa se obtiene mediante la integración de la ecuación de equilibrio aplicando condiciones de contorno. Una vez que se ha obtenido la solución de esta ecuación se calculan el campo de desplazamiento, las deformaciones, las tensiones y los esfuerzos en la placa de acuerdo a las expresiones presentadas en esta sección.

La hipótesis realizada en la teoría de placa delgada conlleva a que los esfuerzos cortantes Q_x y Q_y sean nulos, ya que no existen tensiones tangenciales, τ_{xz} y τ_{yz} , producidas por la deformación por cortante. Sin embargo, para que se cumpla el equilibrio de fuerzas verticales en la placa estos términos no pueden anularse. El valor de los esfuerzos cortantes puede calcularse una vez que se ha obtenido la solución del problema mediante el equilibrio de momentos definido por las Ecuaciones (8.19) y (8.21):

$$Q_x(x,y) = \frac{\partial M_x(x,y)}{\partial x} + \frac{M_{xy}(x,y)}{\partial y} = -D \left(\frac{\partial^3 w(x,y)}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w(x,y)}{\partial x \partial y^2} \right) \quad (8.36a)$$

$$Q_y(x,y) = \frac{\partial M_y(x,y)}{\partial y} + \frac{M_{xy}(x,y)}{\partial x} = -D \left(\frac{\partial^3 w(x,y)}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w(x,y)}{\partial x^2 \partial y} \right) \quad (8.36b)$$

Así mismo, el valor de las tensiones tangenciales τ_{xz} y τ_{yz} se calcula a partir de equilibrio de tensiones. Por ejemplo, el equilibrio de tensiones en la dirección x permite deducir la expresión de la tensión tangencial τ_{xz} a partir de las componentes σ_x y τ_{xy} :

$$\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + \tau_{xz,z} = 0 \quad (8.37)$$

Integrando esta expresión se obtiene la siguiente definición:

$$\begin{aligned} \tau_{xz}(x,y) &= - \int_{-t/2}^{t/2} (\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y}) dz \\ &= - \int_{-t/2}^{t/2} \left(-z \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial w^3}{\partial x^3} + \nu \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - 2z G^* \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] \right) dz \\ &= - \frac{3}{t} Q_x(x,y) \end{aligned} \quad (8.38)$$

Análogamente, la tensión tangencial τ_{yz} está definida por:

$$\tau_{yz}(x,y) = - \int_{-t/2}^{t/2} (\sigma_{y,y} + \tau_{xy,y}) dz = - \frac{3}{t} Q_y(x,y) \quad (8.39)$$

Resumen de las ecuaciones de equilibrio

En las secciones anteriores se han deducido las ecuaciones de equilibrio que permiten estudiar el problema de la placa. En primer lugar se han obtenido tres ecuaciones de equilibrio para la teoría general de placas (o placa gruesa o teoría de Reissner-Mindlin)

que establecen:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0 \quad (8.40a)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \quad (8.40b)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0 \quad (8.40c)$$

Estas ecuaciones pueden combinarse para obtener una expresión del equilibrio de momentos:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q \quad (8.41)$$

o bien:

$$D \left[\frac{\partial^3 \theta_x}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \theta_x(x,y)}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \theta_y(x,y)}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \theta_y}{\partial y^3} \right] = q \quad (8.42)$$

El comportamiento de la placa está definido por un sistema de tres ecuaciones diferenciales con tres incógnitas: w , θ_x y θ_y .

El problema se simplifica considerablemente si la placa es delgada (teoría de Kirchhoff). Entonces, el sistema de tres ecuaciones se reduce a una sola ecuación en la que la única incógnita es el desplazamiento vertical de la placa:

$$D \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] = q \quad (8.43)$$

La solución de las ecuaciones de equilibrio posibilita el conocimiento del campo de desplazamientos y, posteriormente, las deformaciones, tensiones y esfuerzos de la placa.

8.8 Condiciones de contorno

La integración de las ecuaciones de equilibrio (Ecuaciones (8.17, 8.19 y 8.21) para placa gruesa o la Ecuación (8.34) para placa delgada) requiere definir unas condiciones de contorno que permitan determinar las constantes de integración que aparecen en la resolución del problema. A continuación se presentan las condiciones de contorno más comunes:

Borde empotrado En un borde empotrado (Figura 8.10.a), se cumple que el desplazamiento transversal es nulo, $w = 0$, y que la rotación según la dirección α paralela al borde de la placa es $\theta_\beta = 0$. En el supuesto de que la placa sea delgada la última condición se expresa como $\partial w / \partial \alpha = 0$.

Borde apoyado En este caso, la condición de contorno sobre un borde apoyado (Figura 8.10.b) implica que $w = 0$, y que el momento $M_\beta = 0$. Si el borde es recto la curvatura según una dirección perpendicular β es $\chi_\beta = 0$, siendo entonces esta condición $\partial \theta_\alpha / \partial \beta = 0$. Si la placa es delgada se obtiene que la última condición se expresa como $\partial w^2 / \partial^2 \beta = 0$.

Borde libre Las condiciones de contorno sobre un borde libre implica que los momentos sean nulos, $M_\alpha = 0$ y $M_{\alpha\beta} = 0$, y también que el cortante sea nulo $Q_\alpha = 0$. En este caso el sistema está sobredeterminado al tener definidas tres condiciones de contorno para determinar dos constantes de integración. Sin embargo, es posible reducir las tres condiciones de contorno a dos de manera aproximada si se expresa el momento torsor $M_{\alpha\beta}$ como un par de fuerzas (Figura 8.10.d) y se aplica el equilibrio de fuerzas verticales:

$$V_\alpha = Q_\alpha + \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \beta} = 0 \quad (8.44)$$

donde V_α se define como el *cortante efectivo*. Por tanto, las condiciones de contorno en un borde libre se reducen a $M_\alpha = 0$ y $V_\alpha = 0$.

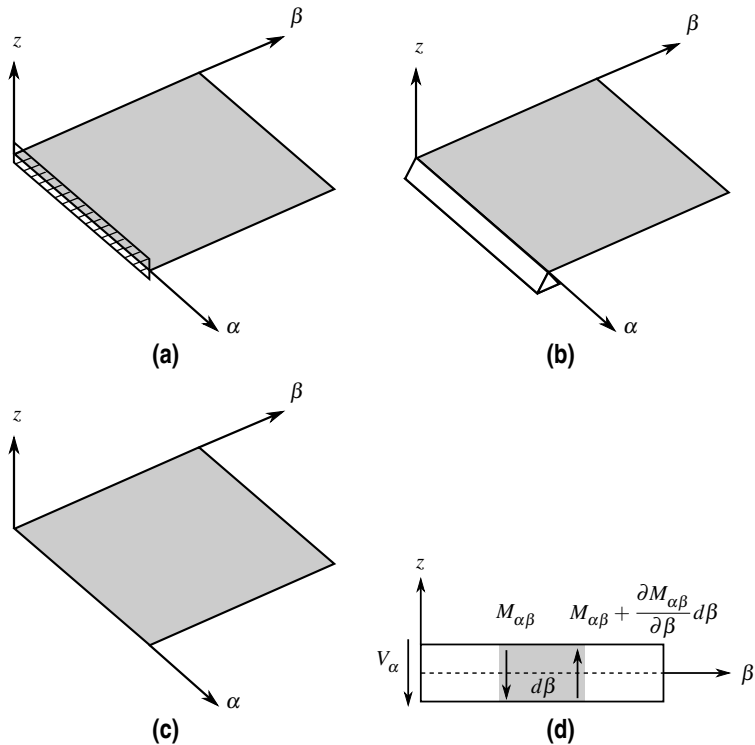


Figura 8.10 Condiciones de contorno en una placa: (a) borde empotrado, (b) borde apoyado y (c) borde libre. (d) Cortante efectivo en un borde libre..

Efecto del cortante efectivo en las esquinas

El cortante efectivo obtenido a partir de la ecuación de equilibrio de momentos (Ecuación (8.19) o (8.21)) establece que:

$$V_{\alpha} = \frac{\partial M_{\alpha}}{\partial \alpha} + 2 \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \beta} \quad (8.45)$$

Esta expresión particularizada para el caso en el que placa sea delgada indica:

$$V_{\alpha} = \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha \partial \beta^2} \quad (8.46)$$

La definición del cortante efectivo conlleva un desequilibrio en las esquinas de una placa de valor $2M_{\alpha\beta}$.

8.9 Validez de la teoría de placas

La formulación de la teoría de placas se basa en el desacoplamiento de los esfuerzos definidos en el plano de la placa (N_x , N_y y N_{xy}) de los efectos de flexión (M_x , M_y , M_{xy} , Q_x y Q_y) cuando sólo actúan cargas transversales q . En esa situación, los esfuerzos en el plano son nulos. En el caso que existan cargas en el plano los esfuerzos se pueden calcular de manera desacoplada.

8.10 Problema de tensión plana

Los esfuerzos en equilibrio que aparecen en el elemento estructural cuando está sometido a fuerzas contenidas en el plano p_x y p_y vienen dados por las siguientes ecuaciones (Figura 8.11).

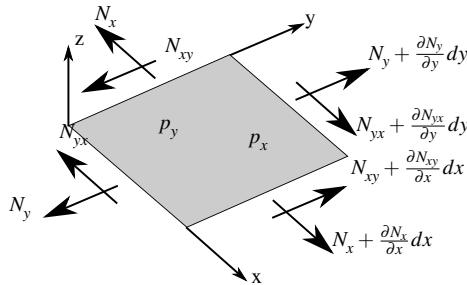


Figura 8.11 Esfuerzos en equilibrio con las fuerzas externas aplicadas en el plano.

El equilibrio de fuerzas en un elemento diferencial $dx dy$ según la dirección x establece:

$$\frac{\partial N_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial N_x}{\partial x} + p_x = 0 \quad (8.47)$$

Análogamente, del equilibrio de fuerzas en la dirección y resulta:

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + p_y = 0 \quad (8.48)$$

Finalmente, el equilibrio de momentos en torno al eje z produce:

$$N_{xy} = N_{yx} \quad (8.49)$$

Los campos de desplazamientos, deformaciones y tensiones en el problema de tensión plana vienen dados por:

$$u(x,y,z) = u_0(x,y) - z\theta_x(x,y) \quad (8.50a)$$

$$v(x,y,z) = v_0(x,y) - z\theta_y(x,y) \quad (8.50b)$$

$$\epsilon_x(x,y,z) = \frac{\partial u_0(x,y)}{\partial x} - z \frac{\partial \theta_x(x,y)}{\partial x} \quad (8.51a)$$

$$\epsilon_y(x,y,z) = \frac{\partial v_0(x,y)}{\partial y} - z \frac{\partial \theta_y(x,y)}{\partial y} \quad (8.51b)$$

$$\sigma_x(x,y,z) = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u_0(x,y)}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_0(x,y)}{\partial y} \right) - z \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial \theta_x(x,y)}{\partial x} + \nu \frac{\partial \theta_y(x,y)}{\partial y} \right) \quad (8.52a)$$

$$\sigma_y(x,y,z) = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v_0(x,y)}{\partial y} + \nu \frac{\partial u_0(x,y)}{\partial x} \right) - z \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial \theta_y(x,y)}{\partial y} + \nu \frac{\partial \theta_x(x,y)}{\partial x} \right) \quad (8.52b)$$

$$\tau_{xy}(x,y,z) = G \left(\frac{\partial u_0(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v_0(x,y)}{\partial x} \right) - zG \left(\frac{\partial \theta_x(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y(x,y)}{\partial x} \right) \quad (8.52c)$$

A partir de la definición de los esfuerzos se obtiene:

$$N_x(x,y,z) = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x(x,y,z) dz = \frac{Et}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u_0(x,y)}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_0(x,y)}{\partial y} \right) \quad (8.53a)$$

$$N_y(x,y,z) = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y(x,y,z) dz = \frac{Et}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v_0(x,y)}{\partial y} + \nu \frac{\partial u_0(x,y)}{\partial x} \right) \quad (8.53b)$$

$$N_{xy}(x,y,z) = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy}(x,y,z) dz = Gt \left(\frac{\partial u_0(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v_0(x,y)}{\partial x} \right) \quad (8.53c)$$

Sustituyendo los esfuerzos dados por las Ecuaciones 8.53a-8.53c en 8.47-8.48 se obtienen los desplazamientos en el plano medio de la placa $u_0(x,y)$ y $v_0(x,y)$.

8.11 Elementos Finitos tipo placa

En este capítulo se desarrolla la formulación de dos elementos finitos tipo placa. El primero sigue la formulación de Kirchhoff y el segundo la teoría de Reissner-Mindlin. En cualquiera de los dos casos la formulación elemental se basa en el principio de los trabajos virtuales (PTV).

El PTV según la teoría general de placas se escribe como:

$$\int_{\Omega_e} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Gamma_e} \delta w q d\Gamma + \sum_{i=1}^p \delta w_i F_i \quad (8.54)$$

donde q son las fuerzas verticales (o momentos) repartidas por unidad de superficie y F las p fuerzas verticales (o momentos) puntuales aplicadas en el elemento. El primer miembro de la Ecuación (8.54) se desarrolla como sigue:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega &= \int_{\Gamma_e} \int_{-t}^{+t} \delta \varepsilon_x \sigma_x dz d\Gamma + \int_{\Gamma_e} \int_{-t}^{+t} \delta \varepsilon_y \sigma_y dz d\Gamma + \int_{\Gamma_e} \int_{-t}^{+t} \delta \gamma_{xy} \tau_{xy} dz d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_e} \int_{-t}^{+t} \delta \gamma_{xz} \tau_{xz} dz d\Gamma + \int_{\Gamma_e} \int_{-t}^{+t} \delta \gamma_{yz} \tau_{yz} dz d\Gamma = \\ &\int_{\Gamma_e} -M_x \delta \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) d\Gamma + \int_{\Gamma_e} -M_y \delta \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) d\Gamma + \int_{\Gamma_e} -M_{xy} \delta \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_e} Q_x \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \right) d\Gamma + \int_{\Gamma_e} Q_y \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \right) d\Gamma \end{aligned} \quad (8.55)$$

La ecuación del PTV resulta:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_e} \left[-M_x \delta \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) - M_y \delta \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) - M_{xy} \delta \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \right] d\Gamma + \\ \int_{\Gamma_e} \left[Q_x \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \right) + Q_y \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \right) \right] d\Gamma = \int_{\Gamma_e} \delta w q d\Gamma + \sum_{i=1}^p \delta w_i F_i \end{aligned} \quad (8.56)$$

o en forma matricial:

$$\int_{\Gamma_e} \delta \boldsymbol{\chi}^T \mathbf{M} d\Gamma = \int_{\Gamma_e} \delta w q d\Gamma + \sum_{i=1}^p \delta w_i F_i \quad (8.57)$$

donde:

$$\boldsymbol{\chi} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\chi}_f \\ \boldsymbol{\varepsilon}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} - \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \end{pmatrix} \quad (8.58)$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_f \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{x,y} \\ Q_x \\ Q_y \end{pmatrix} \quad (8.59)$$

A continuación se considera un elemento placa de lados $2a$ y $2b$, espesor t , de volumen Ω_e y superficie Γ_e .

8.11.1 Formulación del elemento placa: Teoría de Kirchhoff

En esta sección se presenta la formulación del Método de los Elementos Finitos (MEF) para resolver el problema de flexión de placas aplicando la teoría de Kirchhoff o de placa delgada (Sección 8.7). Se resumen, de manera simplificada, las cuatro hipótesis en las que se basa esta teoría clásica de placas:

1. Los desplazamientos del plano medio de la placa $u_0(x,y,z=0)$ y $v_0(x,y,z=0)$ son nulos.
2. El desplazamiento vertical $w(x,y,z)$ sólo depende de las coordenadas x e y , es decir, $w(x,y)$.
3. Las tensiones normales σ_z son despreciables. Esta hipótesis se puede validar a través del análisis del problema de una placa en voladizo sometido a una carga vertical por unidad de superficie de valor $p(x,y) = p$. En este caso, las tensiones normales σ_z son del orden de p . La carga produce un momento M_α Nm/m en el borde empotrado de la placa del orden de pab , estando ese momento relacionado con la tensión normal σ_α a partir de la definición del esfuerzo: $M_\alpha \sim \sigma_\alpha t^2 \sim pab$. De esta ecuación se obtiene: $\sigma_\alpha = pab/t^2 = \sigma_z(ab/t^2)$. Dado que en una placa $a, b \gg t$, se obtiene que $\sigma_\alpha \gg \sigma_z$.
4. Las secciones planas y normales al plano medio de la placa en la situación indeformada permanecen planas y normales al plano medio de la placa en la situación deformada, es decir:

$$\theta_x(x,y) = \frac{\partial w(x,y)}{\partial x} \quad (8.60)$$

$$\theta_y(x,y) = \frac{\partial w(x,y)}{\partial y} \quad (8.61)$$

De acuerdo con las hipótesis anteriores el campo de desplazamientos de un punto cualquiera se puede escribir de acuerdo a las Ecuaciones (8.30a-8.30c).

Particularizando para la Teoría de Kirchhoff o de placa delgada, la expresión del PTV presentada en la Ecuación 8.56 resulta:

$$\int_{\Gamma_e} \left[-M_x \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} \right) - M_y \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial^2 y} \right) - 2M_{xy} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right] d\Gamma = \int_{\Gamma_e} \delta w q d\Gamma + \sum_{i=1}^p \delta w_i F_i \quad (8.62)$$

o, de nuevo, en forma matricial:

$$\int_{\Gamma_e} \delta \boldsymbol{\chi}_f^T \mathbf{M}_f d\Gamma = \int_{\Gamma_e} \delta w q d\Gamma + \sum_{i=1}^p \delta w_i F_i \quad (8.63)$$

En la Ecuación 8.62 la única incógnita que aparece es la flecha w , cuya derivada debe ser continua para que la integral tenga primitiva (aproximación con una función $\mathbb{C}^1$). La continuidad de las primeras derivadas obliga, como en la formulación del elemento finito viga de Euler-Bernoulli (Sección 3.5), a tomar como variables tanto a la flecha w como los giros $\frac{\partial w}{\partial x}$ y $\frac{\partial w}{\partial y}$. El número total de variables por nodo es 3 (w_i , $\frac{\partial w}{\partial x}$ y $\frac{\partial w}{\partial y}$).

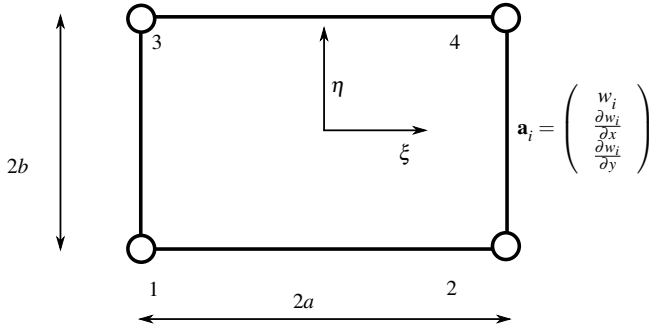


Figura 8.12 Elemento finito placa de Kirchhoff de cuatro nodos.

A continuación se desarrolla la formulación del elemento finito placa de Kirchhoff (placa delgada) de 4 nodos (Figura 8.12). La flecha de la placa se aproxima mediante la

siguiente expresión:

$$w(x,y) = \begin{pmatrix} N_1 \bar{N}_1 \bar{\bar{N}}_1 N_2 \bar{N}_2 \bar{\bar{N}}_2 N_3 \bar{N}_3 \bar{\bar{N}}_3 N_4 \bar{N}_4 \bar{\bar{N}}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \frac{\partial w_1}{\partial x} \\ \frac{\partial w_1}{\partial y} \\ w_2 \\ \frac{\partial w_2}{\partial x} \\ \frac{\partial w_2}{\partial y} \\ w_3 \\ \frac{\partial w_3}{\partial x} \\ \frac{\partial w_3}{\partial y} \\ w_4 \\ \frac{\partial w_4}{\partial x} \\ \frac{\partial w_4}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{N}_1 \mathbf{N}_2 \mathbf{N}_3 \mathbf{N}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_4 \end{pmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{a} \quad (8.64)$$

donde $\mathbf{N}(x,y)$ es una matriz que contiene las funciones de forma y $\mathbf{a}$ un vector que contiene los parámetros nodales.

El número total de variables nodales en el elemento es 12 (3 por nodo), que permiten aproximar la flecha $w(x,y)$ por un polinomio de 12 términos. Teniendo en cuenta las condiciones de polinomio completo e invarianza geométrica, una opción válida es la siguiente aproximación: $w(x,y) = \alpha(1) + \alpha(2)x + \alpha(3)y + \alpha(4)x^2 + \alpha(5)y^2 + \alpha(6)xy + \alpha(7)x^3 + \alpha(8)x^2y + \alpha(9)xy^2 + \alpha(10)y^3 + \alpha(11)x^3y + \alpha(12)xy^3$. Las funciones de forma del elemento placa se obtienen particularizando la aproximación de la flecha en las variables nodales, de manera análoga a lo realizado en la Sección 3.5.

Las coordenadas espaciales x e y se transforman a coordenadas naturales ξ y η . De este modo, todos los elementos finitos placa son cuadrados de lado 2 con centro en $(\xi, \eta) = (0,0)$. La transformación de coordenadas para un elemento rectangular con centro (x_0, y_0) resulta:

$$\xi = \frac{x - x_0}{a} \quad (8.65)$$

$$\eta = \frac{y - y_0}{b} \quad (8.66)$$

Las funciones de forma resultan:

$$N_i = \frac{1}{8} (1 - \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) (2 + \xi_i \xi + \eta_i \eta - \xi^2 - \eta^2) \quad (8.67)$$

$$\bar{N}_i = \frac{a}{8} (\xi^2 - 1) (\xi + \xi_i) (1 + \eta_i \eta) \quad (8.68)$$

$$\bar{\bar{N}}_i = \frac{b}{8} (\eta^2 - 1) (\eta + \eta_i) (1 + \xi_i \xi) \quad (8.69)$$

donde $(\xi_1, \eta_1) = (-1, -1)$, $(\xi_2, \eta_2) = (+1, -1)$, $(\xi_3, \eta_3) = (+1, +1)$ y $(\xi_4, \eta_4) = (-1, +1)$.

Esta aproximación de la flecha fue propuesta inicialmente por Melosh, Zienkiewicz y Cheng. De esta forma la flecha varía a lo largo de un lado $i-j$ con x o y constante según un polinomio completo de tercer orden cuyas constantes pueden ser calculadas a partir de, o bien, $w_i, w_j, \frac{\partial w_i}{\partial x}, \frac{\partial w_j}{\partial x}$, o bien, $w_i, w_j, \frac{\partial w_i}{\partial y}, \frac{\partial w_j}{\partial y}$, con lo que queda garantizada la continuidad de la flecha w en el contorno interelemental. Sin embargo, esta aproximación no garantiza la continuidad de las derivadas primeras (giros), excepto en los nodos, como se ve en el siguiente ejemplo.

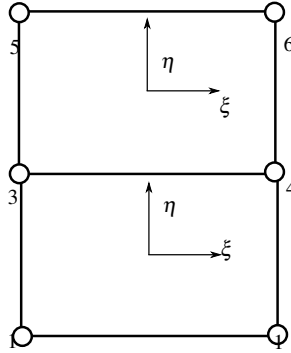


Figura 8.13 Ejemplo de no conformidad.

En la Figura 8.13 se presentan dos elementos finitos de Kirchhoff de 4 nodos que comparten el lado 3-4. En el ejemplo se conoce, como condición de contorno en desplazamientos y giros, que los parámetros nodales en todos los nodos tienen un valor nulo, excepto $\frac{\partial w_5}{\partial x} = 1$. En cada uno de los dos elementos, la flecha se puede obtener mediante la Ecuación (8.64). En el elemento formado por los nodos 1-2-3-4 la flecha y los giros son nulos para cualquier valor de ξ y η . Sin embargo, en el elemento formado por los nodos 3-4-5-6, la flecha viene dada por $w(\xi, \eta) = \bar{N}_3 \frac{\partial w_5}{\partial x} = \bar{N}_3 = (\xi^2 - 1)(\xi - 1)(1 + \eta)/8$. En el contorno interelemental 3-4 ($\eta = -1$) el giro es $\frac{\partial w}{\partial x} = (\xi^2 - 1)(\xi - 1)a/8$ que sigue una variación parabólica claramente diferente a la del elemento 1-2-3-4 en ese mismo lado.

Esto da lugar a un elemento no conforme. No obstante, este elemento cumple el criterio de la parcela si se trata de un cuadrilátero regular, lo cual garantiza la convergencia de la solución numérica a la solución real. Esto deja de cumplirse si el elemento toma formas arbitrarias. Una forma de obtener elementos cuadriláteros conformes según la Teoría de Kirchhoff es introducir $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ como variable nodal.

Introduciendo la aproximación (8.64) en la Ecuación (8.63) del PTV:

$$\int_{\Gamma_e} \mathbf{B}_f^T \mathbf{D}_f \mathbf{B}_f \Gamma \mathbf{a} = \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}_T q d\Gamma + \sum_{i=1}^p F_i \quad (8.70)$$

donde $\mathbf{B}_f$ es la matriz de deformación por flexión dada por:

$$\mathbf{B}_f = - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} \mathbf{N} \quad (8.71)$$

Si se define la matriz de rigidez del elemento placa de Kirchhoff como:

$$\mathbf{K}_f = \int_{\Gamma_e} \mathbf{B}_f^T \mathbf{D}_f \mathbf{B}_f \Gamma \quad (8.72)$$

y el vector de influencia de las cargas aplicadas en el interior del elemento como:

$$\mathbf{Q} = \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}_T q d\Gamma \quad (8.73)$$

se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones para cada elemento finito:

$$\mathbf{K}_f \mathbf{a} = \mathbf{Q} + \mathbf{F} \quad (8.74)$$

Las integrales se llevan a cabo mediante la integración numérica de Gauss-Legendre, una vez se transforman las coordenadas cartesianas a naturales. El programa comercial de elementos finitos ANSYS implementa la formulación de Kirchhoff en el elemento de cuatro nodos SHELL63.

- 8.1** Obtenga los desplazamientos transversales de una placa delgada de dimensiones $a \times b$, con los bordes simplemente apoyada, sujeta a una carga uniformemente distribuida de valor p_0 , empleando la formulación de placa delgada implementada en el programa comercial de elementos finitos ANSYS. Los datos del problema son:

- $a = 5 \text{ m}$
- $b = 5 \text{ m}$
- $t = 0.05 \text{ m}$
- $E = 210 \times 10^9 \text{ N/m}^2$
- $\nu = 0.3$
- $p_0 = 1 \text{ N/m}^2$

Código 8.1 Listado de comando de ANSYS para el análisis de una placa simplemente apoyada de dimensiones $a \times b$.

Solución

! Este ejemplo modeliza el comportamiento de una placa cuadrada de dimensiones $a \times b$ y espesor t

! Se pueden seleccionar las siguientes condiciones de contorno:

! (1) un borde empotrado

```

! (2) dos bordes opuestos apoyados
! (3) dos bordes opuestos empotrados
! (4) todos los bordes simplemente apoyados
! (5) todos los bordes empotrados
! La placa está solicitada por una presión uniforme de valor p0.

```

```

!*-----
! datos
!*-----

!*-----geometría de la placa axb
a=5
b=5
t=0.05
!*-----propiedades del material
you=210e9 ! modulo Young
poi=0.3 ! coeficiente de Poisson
!*-----carga
p0=1
!*-----condiciones de contorno
bc=4
!*-----tamaño del elemento
len=0.2

!*----- pre-proceso
/prep7
!*----- geometría
rectng ,0,a,0,b
!*----- propiedades material
mp,ex,1,you
mp,prxy,1,poi
!*----- tipo de elemento y sección
et,1, shell 63
R,1,t
!*----- presión en la placa
sfa ,1,1, pres ,p0
!*----- condiciones de contorno
*if ,bc,eq,1, then
dl ,1,, all
*elseif ,bc,eq,2
dl ,1,, ux,0
dl ,1,, uy,0
dl ,1,, uz,0
dl ,3,, ux,0
dl ,3,, uy,0
dl ,3,, uz,0
*elseif ,bc,eq,3, then
dl ,1,, all
dl ,3,, all
*elseif ,bc,eq,4, then
dl , all ,, ux,0
dl , all ,, uy,0
dl , all ,, uz,0
*elseif ,bc,eq,5, then
dl , all ,, all
*endif

```

```

!*----- discretización
lesize , all , len
amesh,1
!*----- solución
/sol
antype,0
solve
finish
!*----- post-proceso
/post 1
allsel , all
etable ,mx,smisc,4
etable ,my,smisc,5
etable ,mxy,smisc,6
!No se pueden obtener los cortantes si se emplea el elemento SHELL63

```

8.11.2 Formulación del elemento placa: Teoría de Reissner-Mindlin

En esta sección se presenta la formulación del MEF para resolver el problema de flexión de placas aplicando la teoría de Reissner-Mindlin o de placa gruesa. Las hipótesis en las que se basa esta teoría de placas son:

1. Los desplazamientos del plano medio de la placa $u_0(x,y,z=0)$ y $v_0(x,y,z=0)$ son nulos.
2. El desplazamiento vertical $w(x,y,z)$ sólo depende de las coordenada x e y , es decir, $w(x,y)$.
3. Las tensiones normales σ_z son despreciables.
4. Las secciones planas y normales al plano medio de la placa en la situación indeformada permanecen planas pero no necesariamente normales al plano medio de la placa en la situación deformada, es decir:

$$\theta_x(x,y) = \frac{\partial w(x,y)}{\partial x} + \phi_x \quad (8.75)$$

$$\theta_y(x,y) = \frac{\partial w(x,y)}{\partial y} + \phi_y \quad (8.76)$$

Los giros ϕ_α se deben a la deformación por cortante, es decir, $\phi_\alpha = -\gamma_{\alpha z}$, como se puede deducir a partir de la definición de los desplazamientos:

$$u(x,y,z) = -z\theta_x(x,y) \quad (8.77a)$$

$$v(x,y,z) = -z\theta_y(x,y) \quad (8.77b)$$

$$w(x,y,z) = w(x,y) \quad (8.77c)$$

En este caso, en el PTV (Ecuación (8.56)) aparecen tres variables independientes: w , θ_x y θ_y . Las tres variables se aproximan mediante el MEF con funciones $\mathbb{C}^0$. A continuación

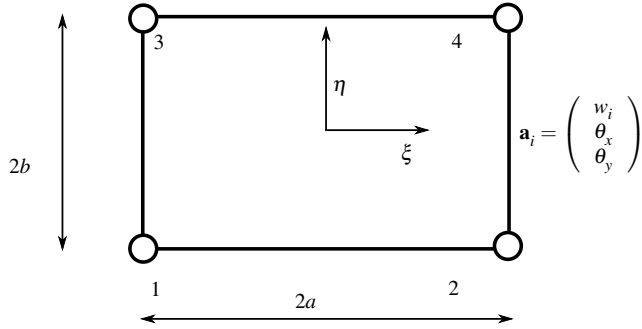


Figura 8.14 Elemento finito placa de Reissner-Mindlin de cuatro nodos.

se desarrolla la formulación del elemento finito placa de Reissner-Mindlin (placa gruesa) de 4 nodos (Figura 8.14). La flecha y los giros del elemento se aproximan mediante la siguiente expresión:

$$\begin{pmatrix} w(x,y) \\ \theta_x(x,y) \\ \theta_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{N}_1 & 0 & 0 & \mathbf{N}_2 & 0 & 0 & \mathbf{N}_3 & 0 & 0 & \mathbf{N}_4 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_1 & 0 & 0 & \mathbf{N}_2 & 0 & 0 & \mathbf{N}_3 & 0 & 0 & \mathbf{N}_4 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{N}_1 & 0 & 0 & \mathbf{N}_2 & 0 & 0 & \mathbf{N}_3 & 0 & 0 & \mathbf{N}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ w_3 \\ \theta_{x3} \\ \theta_{y3} \\ w_4 \\ \theta_{x4} \\ \theta_{y4} \end{pmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{a}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_2 & \mathbf{N}_3 & \mathbf{N}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_4 \end{pmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{a} \quad (8.78)$$

En la formulación del elemento de placa gruesa se emplean las siguientes funciones de forma de clase C^0 definidas en coordenadas naturales:

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) \quad (8.79)$$

Se observa que estas funciones de forma son más sencillas que las utilizadas en la formulación del elemento finito placa de Kirchhoff.

El vector de curvaturas (Ecuación (8.58)) resulta:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\chi} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\chi}_f \\ \boldsymbol{\varepsilon}_c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} - \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^4 \begin{pmatrix} -\frac{\partial N_i}{\partial x} \theta_{xi} \\ -\frac{\partial N_i}{\partial y} \theta_{yi} \\ -\frac{\partial N_i}{\partial y} \theta_{xi} - \frac{\partial N_i}{\partial x} \theta_{yi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} w_i - N_i \theta_{xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} w_i - N_i \theta_{yi} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^4 \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{fi} \\ \mathbf{B}_{ci} \end{pmatrix} \mathbf{a}_i = \\ &\begin{pmatrix} \mathbf{B}_{f1} & \mathbf{B}_{f2} & \mathbf{B}_{f3} & \mathbf{B}_{f4} \\ \mathbf{B}_{c1} & \mathbf{B}_{c2} & \mathbf{B}_{c3} & \mathbf{B}_{c4} \end{pmatrix} \mathbf{a} = \mathbf{B} \mathbf{a} \end{aligned} \quad (8.80)$$

siendo:

$$\mathbf{B}_{fi} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} & -\frac{\partial N_i}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (8.81)$$

$$\mathbf{B}_{ci} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial N_i}{\partial x} & -N_i & 0 \\ -\frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & -N_i \end{pmatrix} \quad (8.82)$$

En la formulación del elemento finito placa de Reissner-Mindlin, el PTV resulta:

$$\left[\int_{\Gamma_e} \mathbf{B}_f^T \mathbf{D}_f \mathbf{B}_f \Gamma + \int_{\Gamma_e} \mathbf{B}_c^T \mathbf{D}_c \mathbf{B}_c \Gamma \right] \mathbf{a} = \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}_T q d\Gamma + \sum_{i=1}^p F_i \quad (8.83)$$

donde aparece una matriz de rigidez asociada a la flexión:

$$\mathbf{K}_f = \int_{\Gamma_e} \mathbf{B}_f^T \mathbf{D}_f \mathbf{B}_f \Gamma \quad (8.84)$$

y otra a la deformación por cortante:

$$\mathbf{K}_c = \int_{\Gamma_e} \mathbf{B}_c^T \mathbf{D}_c \mathbf{B}_c \Gamma \quad (8.85)$$

Las integrales se llevan a cabo mediante la integración numérica de Gauss-Legendre, una vez se transforman las coordenadas cartesianas a naturales. Finalmente se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones para el elemento finito:

$$(\mathbf{K}_f + \mathbf{K}_c) \mathbf{a} = \mathbf{Q} + \mathbf{F} \quad (8.86)$$

Como ocurre en la formulación del elemento finito viga según la Teoría de Timoshenko, en el elemento finito placa de Reissner-Mindlin se bloquea la solución cuando se analizan placas delgadas. El fenómeno de bloqueo se puede explicar de manera análoga a lo desarrollado en la Sección 3.8.1. La Ecuación (8.86) se puede desarrollar, considerando

por sencillez sólo cargas aplicadas en los nodos, como:

$$(\mathbf{K}_f + \mathbf{K}_c) \mathbf{a} = \mathbf{F} \quad (8.87)$$

$$\left(\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \bar{\mathbf{K}}_f + G^* t \bar{\mathbf{K}}_c \right) \mathbf{a} = \mathbf{F} \quad (8.88)$$

$$\left(\bar{\mathbf{K}}_f + \frac{12(1-\nu^2)G^*}{Et^2} \bar{\mathbf{K}}_c \right) \mathbf{a} = \bar{\mathbf{F}} \quad (8.89)$$

De la Ecuación (8.89) se deduce que al disminuir el espesor de la placa ($t \rightarrow 0$), la matriz de rigidez debida a la deformación por cortante se hace predominante frente a la matriz de rigidez por flexión, hasta que en el límite se obtienen unos desplazamientos nodales $\mathbf{a} \rightarrow 0$ debido a que la matriz $\mathbf{K}_c$ obtenida mediante integración numérica exacta es no singular. Del mismo modo que lo realizado en la formulación del elemento barra de Timoshenko (Sección 3.8.2), la técnica de integración reducida permite obtener la singularidad necesaria en la matriz de rigidez $\mathbf{K}_c$ para que no se obtengan desplazamientos nodales nulos cuando se estudian placas esbeltas.

El programa comercial de elementos finitos ANSYS implementa la formulación de Kirchhoff en el elemento de cuatro nodos SHELL181.

- 8.2** La solución analítica para los desplazamientos transversales de una placa delgada de dimensiones $a \times b$, con los bordes simplemente apoyados, sometida a una carga uniformemente distribuida de valor p_0 , está dada por:

$$w(x,y) = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{16p_0}{D\pi mn f_{mn}} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad (8.90)$$

donde $f_{mn} = ((m/a)^2 + (n/b)^2)^2$. El Código 8.2 muestra un listado de comandos implementados en el lenguaje MATLAB para calcular el desplazamiento vertical de la placa.

Se pide:

1. Comprobar que la solución propuesta satisface las condiciones de contorno del problema.
2. Deducir las expresiones de los momentos M_x , M_y , M_{xy} y de los esfuerzos cortantes Q_x y Q_y .
3. Modificar el Código 8.2 para representar la distribución de los esfuerzos en la placa.
4. Comparar los resultados obtenidos con un modelo de elementos finitos en ANSYS (Código 8.3).

Los datos del problema son:

- $a = 5 \text{ m}$
- $b = 5 \text{ m}$

- $t = 0.05 \text{ m}$
- $E = 210 \times 10^9 \text{ N/m}^2$
- $\nu = 0.3$
- $p_0 = 1 \text{ N/m}^2$

Código 8.2 Listado de comando de MATLAB para el análisis de una placa cuadrada apoyada en los bordes.

Solución.

```
% Este ejemplo modeliza el comportamiento de una placa rectangular
% simplemente apoyada de dimensiones axb y espesor t.
% La placa está solicitada por una presión uniforme de valor p0.

%-----
% datos
%-----

%-----geometría de la placa axb
a=5;
b=5;
t=0.05;
%-----propiedades del material
you=210e9; % módulo Young
poi=0.3; % coeficiente de Poisson
%-----carga
p0=1;

%
D=you*t^3/12/(1-poi^2);

% puntos de cálculo
dx=0.05;
dy=0.05;
[x,y] = meshgrid(0:dx:a,0:dy:b);

% desplazamiento
uz=zeros( size(x));

for m=1:2:101
    for n=1:2:101
        fnm=((m/a)^2+(n/b)^2)^2;
        uz=uz+16*p0/(D*pi^6*m*n*fnm)*sin(m*pi*x/a).*sin(n*pi*y/b);
    end
end

% representación uz
mesh(x,y,uz)
xlabel('x [m]')
ylabel('y [m]')
zlabel('Desplazamiento [m]')
```

Código 8.3 Listado de comando de Ansys para el análisis de una placa cuadrada con diferentes condiciones de contorno.

```
! Este ejemplo modeliza el comportamiento de una placa cuadrada de dimensiones axb y espesor t
.
! Se pueden seleccionar las siguientes condiciones de contorno:
! (1) un borde empotrado
! (2) dos bordes opuestos apoyados
! (3) dos bordes opuestos empotrados
! (4) todos los bordes simplemente apoyados
! (5) todos los bordes empotrados
! La placa está solicitada por una presión uniforme de valor p0.

!*-----
! datos
!*-----

!*-----geometría de la placa axb
a=5
b=5
t=0.05
!*-----propiedades del material
you=210e9 ! módulo Young
poi=0.3 ! coeficiente de Poisson
!*-----carga
p0=1
!*-----condiciones de contorno
bc=4
!*-----tamaño del elemento
len=0.2

!*----- pre-proceso
/prep7
!*----- geometría
rectng ,0,a ,0,b
!*----- propiedades material
mp,ex,1,you
mp,prxy,1,poi
!*----- tipo de elemento y sección
et ,1, shell 181
sectype ,1, shell
secdata ,t,1
!*----- presión en la placa
sfa ,1,1, pres ,p0
!*----- condiciones de contorno
*if ,bc,eq,1, then
dl ,1,, all
*elseif ,bc,eq,2
dl ,1,, ux,0
dl ,1,, uy,0
dl ,1,, uz,0
dl ,3,, ux,0
dl ,3,, uy,0
dl ,3,, uz,0
*elseif ,bc,eq,3, then
dl ,1,, all
```

```

dl ,3,, all
* elseif ,bc,eq,4, then
dl , all ,, ux,0
dl , all ,, uy,0
dl , all ,, uz,0
* elseif ,bc,eq,5, then
dl , all ,, all
*endif
!*----- discretización
lesize , all , len
amesh,1
!*----- solución
/sol
antype,0
solve
finish
!*----- post-proceso
/post1
allsel , all
etable ,mx,smisc,4
etable ,my,smisc,5
etable ,mxy,smisc,6
etable ,qx,smisc,7
etable ,qy,smisc,8

```

8.3 Obtenga los esfuerzos del problema de una placa apoyada sobre una serie de vigas.

Código 8.4 Listado de comando de ANSYS para el análisis de una placa cuadrada apoyada sobre vigas.

Solución.

```

/PREP7
!parámetros geométricos
a=10
b=5
o=0

MP,EX,1,20e9
MP,PRXY,1,0.2
MP,DENS,1,2500
!*
ET,1,SHELL181
!*
KEYOPT,1,1,0
KEYOPT,1,3,0
KEYOPT,1,8,0
KEYOPT,1,9,0
KEYOPT,1,10,0
!*
ET,2,BEAM188
!*
HT=0.3

```

```

SECT,1,SHELL,,
SECDATA,HT,1,0.0,3
SECOFFSET,MID
SECCONTROL,,,,,,,,
!*
HB=50E-2
BB=30E-2
HTOTAL=HB/2+HT/2
SECTYPE, 2, BEAM, RECT, , 0
SECOFFSET, USER,-BB/2,HTOTAL
SECDATA,BB,HB,0,0,0,0,0,0,0
SECTYPE, 3, BEAM, RECT, , 0
SECOFFSET, USER,0,HTOTAL
SECDATA,BB,HB,0,0,0,0,0,0,0
!*
CSWPLA,11,0,1,1,

!se crean los KP y las líneas para representar la geometría del tablero
K,1,0,0,0
K,2,a,0,0
K,3,a+o,b,0
K,4,o,b,0

LSTR,1,2
LSTR,2,3
LSTR,3,4
LSTR,1,4

!se crean los KP y las líneas para representar la geometría de las vigas
K,101,0,0,0
K,102,a,0,0
K,103,a+o,b,0
K,104,o,b,0

LSTR,101,102
LSTR,102,103
LSTR,103,104
LSTR,101,104

NDIV=3
LDIV,2,,,NDIV,0
LDIV,4,,,NDIV,0

LDIV,6,,,NDIV,0
LDIV,8,,,NDIV,0

LSTR,6,8
LSTR,10,12

LSTR,5,7
LSTR,9,11

LDELE,13,16,1
LDELE,6
LDELE,8

```

```

AL,17,10,3,12
AL,19,9,17,11
AL,1,2,19,4

ASEL,S,AREA,,1,2,1
AREVERSE,ALL,0
ASEL,ALL
!tamaño de los elementos
LESIZE,ALL,0.5,,,1,,1,
! atributos de mallado a las áreas
AATT,1,,1,11,1
!*
!se malla el tablero
AMESH,ALL
!*
!se dibuja la sección
/ESHAPE,1.0
!*
/ESHAPE,0.0
!
! atributos de mallado a las líneas
!se seleccionan sólo las líneas que forman las vigas
LSEL,S,LINE,,5,7,2
LATT,1,,2,,,,2
!se mallan las vigas
LMESH,ALL
!se seleccionan todas las líneas del modelo
LSEL,ALL
LSEL,S,LINE,,18,20,2
LATT,1,,2,,,,3
!se mallan las vigas
LMESH,ALL
!se seleccionan todas las líneas del modelo
LSEL,ALL
!se dibuja la sección
/ESHAPE,1.0
!se listan los nodos
NWRITE,FENODE,lis
!se trabaja en matlab
!se escriben las ecuaciones de ligadura de gdl obtenidas usando MATLAB
!
CE,1,0,1,UX,1,316,UX,-1,
CE,2,0,1,UY,1,316,UY,-1,
CE,3,0,1,UZ,1,316,UZ,-1,
CE,4,0,2,UX,1,295,UX,-1,
CE,5,0,2,UY,1,295,UY,-1,
CE,6,0,2,UZ,1,295,UZ,-1,
CE,7,0,6,UX,1,296,UX,-1,
CE,8,0,6,UY,1,296,UY,-1,
CE,9,0,6,UZ,1,296,UZ,-1,
CE,10,0,7,UX,1,297,UX,-1,
CE,11,0,7,UY,1,297,UY,-1,
CE,12,0,7,UZ,1,297,UZ,-1,
CE,13,0,8,UX,1,298,UX,-1,
CE,14,0,8,UY,1,298,UY,-1,
CE,15,0,8,UZ,1,298,UZ,-1,

```

CE,16,0,9,UX,1,299,UX,-1,
CE,17,0,9,UY,1,299,UY,-1,
CE,18,0,9,UZ,1,299,UZ,-1,
CE,19,0,10,UX,1,300,UX,-1,
CE,20,0,10,UY,1,300,UY,-1,
CE,21,0,10,UZ,1,300,UZ,-1,
CE,22,0,11,UX,1,301,UX,-1,
CE,23,0,11,UY,1,301,UY,-1,
CE,24,0,11,UZ,1,301,UZ,-1,
CE,25,0,12,UX,1,302,UX,-1,
CE,26,0,12,UY,1,302,UY,-1,
CE,27,0,12,UZ,1,302,UZ,-1,
CE,28,0,13,UX,1,303,UX,-1,
CE,29,0,13,UY,1,303,UY,-1,
CE,30,0,13,UZ,1,303,UZ,-1,
CE,31,0,14,UX,1,304,UX,-1,
CE,32,0,14,UY,1,304,UY,-1,
CE,33,0,14,UZ,1,304,UZ,-1,
CE,34,0,15,UX,1,305,UX,-1,
CE,35,0,15,UY,1,305,UY,-1,
CE,36,0,15,UZ,1,305,UZ,-1,
CE,37,0,16,UX,1,306,UX,-1,
CE,38,0,16,UY,1,306,UY,-1,
CE,39,0,16,UZ,1,306,UZ,-1,
CE,40,0,17,UX,1,307,UX,-1,
CE,41,0,17,UY,1,307,UY,-1,
CE,42,0,17,UZ,1,307,UZ,-1,
CE,43,0,18,UX,1,308,UX,-1,
CE,44,0,18,UY,1,308,UY,-1,
CE,45,0,18,UZ,1,308,UZ,-1,
CE,46,0,19,UX,1,309,UX,-1,
CE,47,0,19,UY,1,309,UY,-1,
CE,48,0,19,UZ,1,309,UZ,-1,
CE,49,0,20,UX,1,310,UX,-1,
CE,50,0,20,UY,1,310,UY,-1,
CE,51,0,20,UZ,1,310,UZ,-1,
CE,52,0,21,UX,1,311,UX,-1,
CE,53,0,21,UY,1,311,UY,-1,
CE,54,0,21,UZ,1,311,UZ,-1,
CE,55,0,22,UX,1,312,UX,-1,
CE,56,0,22,UY,1,312,UY,-1,
CE,57,0,22,UZ,1,312,UZ,-1,
CE,58,0,23,UX,1,313,UX,-1,
CE,59,0,23,UY,1,313,UY,-1,
CE,60,0,23,UZ,1,313,UZ,-1,
CE,61,0,24,UX,1,314,UX,-1,
CE,62,0,24,UY,1,314,UY,-1,
CE,63,0,24,UZ,1,314,UZ,-1,
CE,64,0,25,UX,1,315,UX,-1,
CE,65,0,25,UY,1,315,UY,-1,
CE,66,0,25,UZ,1,315,UZ,-1,
CE,67,0,26,UX,1,317,UX,-1,
CE,68,0,26,UY,1,317,UY,-1,
CE,69,0,26,UZ,1,317,UZ,-1,
CE,70,0,30,UX,1,318,UX,-1,
CE,71,0,30,UY,1,318,UY,-1,

CE,72,0,30,UZ,1,318,UZ,-1,
 CE,73,0,31,UX,1,319,UX,-1,
 CE,74,0,31,UY,1,319,UY,-1,
 CE,75,0,31,UZ,1,319,UZ,-1,
 CE,76,0,32,UX,1,320,UX,-1,
 CE,77,0,32,UY,1,320,UY,-1,
 CE,78,0,32,UZ,1,320,UZ,-1,
 CE,79,0,33,UX,1,321,UX,-1,
 CE,80,0,33,UY,1,321,UY,-1,
 CE,81,0,33,UZ,1,321,UZ,-1,
 CE,82,0,34,UX,1,322,UX,-1,
 CE,83,0,34,UY,1,322,UY,-1,
 CE,84,0,34,UZ,1,322,UZ,-1,
 CE,85,0,35,UX,1,323,UX,-1,
 CE,86,0,35,UY,1,323,UY,-1,
 CE,87,0,35,UZ,1,323,UZ,-1,
 CE,88,0,36,UX,1,324,UX,-1,
 CE,89,0,36,UY,1,324,UY,-1,
 CE,90,0,36,UZ,1,324,UZ,-1,
 CE,91,0,37,UX,1,325,UX,-1,
 CE,92,0,37,UY,1,325,UY,-1,
 CE,93,0,37,UZ,1,325,UZ,-1,
 CE,94,0,38,UX,1,326,UX,-1,
 CE,95,0,38,UY,1,326,UY,-1,
 CE,96,0,38,UZ,1,326,UZ,-1,
 CE,97,0,39,UX,1,327,UX,-1,
 CE,98,0,39,UY,1,327,UY,-1,
 CE,99,0,39,UZ,1,327,UZ,-1,
 CE,100,0,40,UX,1,328,UX,-1,
 CE,101,0,40,UY,1,328,UY,-1,
 CE,102,0,40,UZ,1,328,UZ,-1,
 CE,103,0,41,UX,1,329,UX,-1,
 CE,104,0,41,UY,1,329,UY,-1,
 CE,105,0,41,UZ,1,329,UZ,-1,
 CE,106,0,42,UX,1,330,UX,-1,
 CE,107,0,42,UY,1,330,UY,-1,
 CE,108,0,42,UZ,1,330,UZ,-1,
 CE,109,0,43,UX,1,331,UX,-1,
 CE,110,0,43,UY,1,331,UY,-1,
 CE,111,0,43,UZ,1,331,UZ,-1,
 CE,112,0,44,UX,1,332,UX,-1,
 CE,113,0,44,UY,1,332,UY,-1,
 CE,114,0,44,UZ,1,332,UZ,-1,
 CE,115,0,45,UX,1,333,UX,-1,
 CE,116,0,45,UY,1,333,UY,-1,
 CE,117,0,45,UZ,1,333,UZ,-1,
 CE,118,0,46,UX,1,334,UX,-1,
 CE,119,0,46,UY,1,334,UY,-1,
 CE,120,0,46,UZ,1,334,UZ,-1,
 CE,121,0,47,UX,1,335,UX,-1,
 CE,122,0,47,UY,1,335,UY,-1,
 CE,123,0,47,UZ,1,335,UZ,-1,
 CE,124,0,48,UX,1,336,UX,-1,
 CE,125,0,48,UY,1,336,UY,-1,
 CE,126,0,48,UZ,1,336,UZ,-1,
 CE,127,0,106,UX,1,337,UX,-1,

CE,128,0,106,UY,1,337,UY,-1,
CE,129,0,106,UZ,1,337,UZ,-1,
CE,130,0,110,UX,1,338,UX,-1,
CE,131,0,110,UY,1,338,UY,-1,
CE,132,0,110,UZ,1,338,UZ,-1,
CE,133,0,114,UX,1,339,UX,-1,
CE,134,0,114,UY,1,339,UY,-1,
CE,135,0,114,UZ,1,339,UZ,-1,
CE,136,0,115,UX,1,340,UX,-1,
CE,137,0,115,UY,1,340,UY,-1,
CE,138,0,115,UZ,1,340,UZ,-1,
CE,139,0,116,UX,1,341,UX,-1,
CE,140,0,116,UY,1,341,UY,-1,
CE,141,0,116,UZ,1,341,UZ,-1,
CE,142,0,117,UX,1,342,UX,-1,
CE,143,0,117,UY,1,342,UY,-1,
CE,144,0,117,UZ,1,342,UZ,-1,
CE,145,0,118,UX,1,343,UX,-1,
CE,146,0,118,UY,1,343,UY,-1,
CE,147,0,118,UZ,1,343,UZ,-1,
CE,148,0,119,UX,1,344,UX,-1,
CE,149,0,119,UY,1,344,UY,-1,
CE,150,0,119,UZ,1,344,UZ,-1,
CE,151,0,120,UX,1,345,UX,-1,
CE,152,0,120,UY,1,345,UY,-1,
CE,153,0,120,UZ,1,345,UZ,-1,
CE,154,0,121,UX,1,346,UX,-1,
CE,155,0,121,UY,1,346,UY,-1,
CE,156,0,121,UZ,1,346,UZ,-1,
CE,157,0,122,UX,1,347,UX,-1,
CE,158,0,122,UY,1,347,UY,-1,
CE,159,0,122,UZ,1,347,UZ,-1,
CE,160,0,123,UX,1,348,UX,-1,
CE,161,0,123,UY,1,348,UY,-1,
CE,162,0,123,UZ,1,348,UZ,-1,
CE,163,0,124,UX,1,349,UX,-1,
CE,164,0,124,UY,1,349,UY,-1,
CE,165,0,124,UZ,1,349,UZ,-1,
CE,166,0,125,UX,1,350,UX,-1,
CE,167,0,125,UY,1,350,UY,-1,
CE,168,0,125,UZ,1,350,UZ,-1,
CE,169,0,126,UX,1,351,UX,-1,
CE,170,0,126,UY,1,351,UY,-1,
CE,171,0,126,UZ,1,351,UZ,-1,
CE,172,0,127,UX,1,352,UX,-1,
CE,173,0,127,UY,1,352,UY,-1,
CE,174,0,127,UZ,1,352,UZ,-1,
CE,175,0,128,UX,1,353,UX,-1,
CE,176,0,128,UY,1,353,UY,-1,
CE,177,0,128,UZ,1,353,UZ,-1,
CE,178,0,129,UX,1,354,UX,-1,
CE,179,0,129,UY,1,354,UY,-1,
CE,180,0,129,UZ,1,354,UZ,-1,
CE,181,0,130,UX,1,355,UX,-1,
CE,182,0,130,UY,1,355,UY,-1,
CE,183,0,130,UZ,1,355,UZ,-1,

CE,184,0,131,UX,1,356,UX,-1,
 CE,185,0,131,UY,1,356,UY,-1,
 CE,186,0,131,UZ,1,356,UZ,-1,
 CE,187,0,132,UX,1,357,UX,-1,
 CE,188,0,132,UY,1,357,UY,-1,
 CE,189,0,132,UZ,1,357,UZ,-1,
 CE,190,0,190,UX,1,274,UX,-1,
 CE,191,0,190,UY,1,274,UY,-1,
 CE,192,0,190,UZ,1,274,UZ,-1,
 CE,193,0,191,UX,1,275,UX,-1,
 CE,194,0,191,UY,1,275,UY,-1,
 CE,195,0,191,UZ,1,275,UZ,-1,
 CE,196,0,192,UX,1,276,UX,-1,
 CE,197,0,192,UY,1,276,UY,-1,
 CE,198,0,192,UZ,1,276,UZ,-1,
 CE,199,0,193,UX,1,277,UX,-1,
 CE,200,0,193,UY,1,277,UY,-1,
 CE,201,0,193,UZ,1,277,UZ,-1,
 CE,202,0,194,UX,1,278,UX,-1,
 CE,203,0,194,UY,1,278,UY,-1,
 CE,204,0,194,UZ,1,278,UZ,-1,
 CE,205,0,195,UX,1,279,UX,-1,
 CE,206,0,195,UY,1,279,UY,-1,
 CE,207,0,195,UZ,1,279,UZ,-1,
 CE,208,0,196,UX,1,280,UX,-1,
 CE,209,0,196,UY,1,280,UY,-1,
 CE,210,0,196,UZ,1,280,UZ,-1,
 CE,211,0,197,UX,1,281,UX,-1,
 CE,212,0,197,UY,1,281,UY,-1,
 CE,213,0,197,UZ,1,281,UZ,-1,
 CE,214,0,198,UX,1,282,UX,-1,
 CE,215,0,198,UY,1,282,UY,-1,
 CE,216,0,198,UZ,1,282,UZ,-1,
 CE,217,0,199,UX,1,283,UX,-1,
 CE,218,0,199,UY,1,283,UY,-1,
 CE,219,0,199,UZ,1,283,UZ,-1,
 CE,220,0,200,UX,1,284,UX,-1,
 CE,221,0,200,UY,1,284,UY,-1,
 CE,222,0,200,UZ,1,284,UZ,-1,
 CE,223,0,201,UX,1,285,UX,-1,
 CE,224,0,201,UY,1,285,UY,-1,
 CE,225,0,201,UZ,1,285,UZ,-1,
 CE,226,0,202,UX,1,286,UX,-1,
 CE,227,0,202,UY,1,286,UY,-1,
 CE,228,0,202,UZ,1,286,UZ,-1,
 CE,229,0,203,UX,1,287,UX,-1,
 CE,230,0,203,UY,1,287,UY,-1,
 CE,231,0,203,UZ,1,287,UZ,-1,
 CE,232,0,204,UX,1,288,UX,-1,
 CE,233,0,204,UY,1,288,UY,-1,
 CE,234,0,204,UZ,1,288,UZ,-1,
 CE,235,0,205,UX,1,289,UX,-1,
 CE,236,0,205,UY,1,289,UY,-1,
 CE,237,0,205,UZ,1,289,UZ,-1,
 CE,238,0,206,UX,1,290,UX,-1,
 CE,239,0,206,UY,1,290,UY,-1,

```

CE,240,0,206,UZ,1,290,UZ,-1,
CE,241,0,207,UX,1,291,UX,-1,
CE,242,0,207,UY,1,291,UY,-1,
CE,243,0,207,UZ,1,291,UZ,-1,
CE,244,0,208,UX,1,292,UX,-1,
CE,245,0,208,UY,1,292,UY,-1,
CE,246,0,208,UZ,1,292,UZ,-1,
CE,247,0,209,UX,1,293,UX,-1,
CE,248,0,209,UY,1,293,UY,-1,
CE,249,0,209,UZ,1,293,UZ,-1,
CE,250,0,210,UX,1,294,UX,-1,
CE,251,0,210,UY,1,294,UY,-1,
CE,252,0,210,UZ,1,294,UZ,-1,
!
!
!
/SOL
!*
ANTYPE,0
/STATUS,SOLU
!*
SFA,ALL,1,PRES,-1000
!
DL,2, ,Ux,
DL,2, ,Uy,
DL,2, ,Uz,
DL,4, ,Ux,
DL,4, ,Uy,
DL,4, ,Uz,
DL,9, ,Ux,
DL,9, ,Uy,
DL,9, ,Uz,
DL,10, ,Ux,
DL,10, ,Uy,
DL,10, ,Uz,
DL,11, ,Ux,
DL,11, ,Uy,
DL,11, ,Uz,
DL,12, ,Ux,
DL,12, ,Uy,
DL,12, ,Uz,
!*
!Se impiden los desplazamientos y los giros de torsión en los extremos de la vigas
DK,101, , , ,0,UX,UY,UZ,ROTX, , ,
DK,102, , , ,0,UX,UY,UZ,ROTX, , ,
DK,103, , , ,0,UX,UY,UZ,ROTX, , ,
DK,104, , , ,0,UX,UY,UZ,ROTX, , ,
DK,9, , , ,0,UX,UY,UZ,ROTX, , ,
DK,10, , , ,0,UX,UY,UZ,ROTX, , ,
DK,11, , , ,0,UX,UY,UZ,ROTX, , ,
DK,12, , , ,0,UX,UY,UZ,ROTX, , ,
!
SOLVE
FINISH
!*
/POST1

```

```
/ESHAPE,0.0
PLDISP,1
!*
ETABLE,Mx,SMISC, 4
ETABLE,My,SMISC, 5
ETABLE,Mxy,SMISC, 6
ETABLE,Qx,SMISC, 7
ETABLE,Qy,SMISC, 8

ETABLE,MIV,SMISC, 3
ETABLE,MJV,SMISC, 16
!*
PRRSOL,FZ
!*
ESEL,S,TYPE,,1
PLETAB,MX,NOAV
!*
ESEL,S,TYPE,,2
PLLS,MIV,MJV,1,0

ETABLE,MIV2,SMISC, 2
ETABLE,MJV2,SMISC, 15
```


9 Teoría de láminas

9.1 Introducción

Las estructuras pueden clasificarse de acuerdo a su forma. En este sentido, un elemento estructural que presenta una dimensión considerablemente mayor que las otras dos dimensiones se corresponde con una viga, un cable o un pilar. En este caso, cuando la forma del elemento es curva la estructura formaría un arco o un cable en suspensión, en el que la capacidad portante está condicionada por la curvatura propia de este elemento y por la tipología de las acciones que soporta. La capacidad de un elemento, recto o curvo, para resistir fuerzas axiales es mayor que para soportar esfuerzos cortantes y flectores.

Así mismo, los elementos bi-dimensionales planos tienen una capacidad portante mayor para resistir cargas axiales coplanarias que acciones transversales. Por ejemplo, un muro (una laja sometida a tensión plana) tiene mayor resistencia que un forjado (una placa). En este último caso, si las dimensiones de la placa son grandes el espesor necesario puede llegar a ser elevado, e incluso no sería posible cubrir una superficie grande sin pilares intermedios o vigas de rigidización. En estos casos, se han empleado el elemento con geometría curva que posibilitan solventar este tipo de situaciones.

Un estructura bi-dimensional con superficie curva se define como una lámina (Figura 9.1). El comportamiento de una lámina es similar al de un arco, proporcionando la curvatura de la lámina la capacidad de resistir acciones perpendiculares a ésta únicamente mediante esfuerzos en su plano. Las estructuras laminares se encuentran en cubiertas, depósitos de presión, chimeneas, bóvedas, entre otros casos.

La geometría y las dimensiones de una lámina deben definirse matemáticamente para establecer las ecuaciones de equilibrio de gobiernan el comportamiento de la estructura. La geometría puede definirse a partir del plano medio de la lámina en cada punto y, a partir de este, el espesor se define como la distancia normal a plano medio entre la superficie superior e inferior de la lámina. Las estructuras laminares presentan diferentes formas entre las que se encuentran las láminas de revolución (bóvedas, depósitos esféricos, etc.) y las láminas de traslación (bóvedas cañón). Además, existen otro tipo de estructuras laminares complejas cuya geometría no puede describirse de forma analítica. Las ecuaciones de equilibrio de la lámina, y las relaciones tensión-deformación, proporcionan un método de



Figura 9.1 (a) Capilla Lomas de Cuernavaca y (b) Mercado de Algeciras.

análisis aplicable a algunas de las tipologías que se han mencionado anteriormente. Las ecuaciones de equilibrio se plantean sobre un elemento diferencial de lámina a partir de las fuerzas externas y de los esfuerzos internos.

En este capítulo, en primer lugar, se presentan las definiciones de los esfuerzos y de las tensiones en la teoría general de láminas. Posteriormente, se obtienen las ecuaciones de equilibrio en el caso particular de láminas de revolución en la teoría de la membrana.

9.2 Teoría general de láminas

El sistema de fuerzas y momentos que actúa sobre un elemento diferencial de lámina pueden describirse como la resultante de tensiones que actúan sobre el espesor t . En la Figura 9.2 se representan los esfuerzos por unidad de longitud en un elemento diferencial de lámina definido mediante los radios de curvatura r_θ y r_φ , y el sistema de referencia de coordenadas curvilíneas θ y φ .

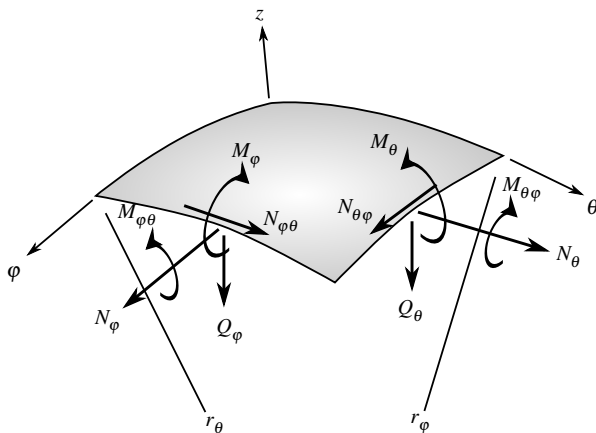


Figura 9.2 Definición de los esfuerzos en una lámina.

Las fuerzas axiales se obtienen mediante la integración de las componentes de las tensiones definidas en el plano de la sección (σ_φ , σ_θ , $\tau_{\varphi\theta}$ y $\tau_{\theta\varphi}$):

$$N_\varphi(\varphi, \theta, z) = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_\varphi \left(1 + \frac{z}{r_\theta} \right) dz \quad (9.1a)$$

$$N_\theta(\varphi, \theta, z) = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_\theta \left(1 + \frac{z}{r_\varphi} \right) dz \quad (9.1b)$$

$$N_{\varphi\theta}(\varphi, \theta, z) = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{\varphi\theta} \left(1 + \frac{z}{r_\theta} \right) dz \quad (9.1c)$$

$$N_{\theta\varphi}(\varphi, \theta, z) = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{\theta\varphi} \left(1 + \frac{z}{r_\varphi} \right) dz \quad (9.1d)$$

donde los términos $(1 + z/r_\theta)$ y $(1 + z/r_\varphi)$ representan el espesor de la lámina teniendo en cuenta la curvatura de la geometría para integrar las tensiones. Los esfuerzos se expresan por unidad de longitud. En estas expresiones aparecen las fuerzas $N_{\varphi\theta}$ y $N_{\theta\varphi}$ que, aunque la simetría del tensor de tensiones establece que $\tau_{\varphi\theta} = \tau_{\theta\varphi}$, son diferentes debido a que la curvatura la lámina es en general diferente en las direcciones θ y φ , es decir $r_\theta \neq r_\varphi$.

Del mismo modo, los momentos y cortantes que aparecen en el elemento se definen como:

$$M_\varphi(\varphi, \theta, z) = \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_\varphi \left(1 + \frac{z}{r_\theta} \right) dz \quad (9.2a)$$

$$M_\theta(\varphi, \theta, z) = \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_\theta \left(1 + \frac{z}{r_\varphi} \right) dz \quad (9.2b)$$

$$M_{\varphi\theta}(\varphi, \theta, z) = \int_{-t/2}^{t/2} z \tau_{\varphi\theta} \left(1 + \frac{z}{r_\theta} \right) dz \quad (9.2c)$$

$$M_{\theta\varphi}(\varphi, \theta, z) = \int_{-t/2}^{t/2} z \tau_{\theta\varphi} \left(1 + \frac{z}{r_\varphi} \right) dz \quad (9.2d)$$

$$Q_\varphi(\varphi, \theta, z) = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{\varphi z} \left(1 + \frac{z}{r_\theta} \right) dz \quad (9.3a)$$

$$Q_\theta(\varphi, \theta, z) = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{\theta z} \left(1 + \frac{z}{r_\varphi} \right) dz \quad (9.3b)$$

En general, el espesor de la lámina es mucho menor que los radios de curvatura r_θ y r_φ y, por tanto, los términos z/r_θ y z/r_φ pueden despreciarse en las expresiones de los esfuerzos respecto a la unidad. En este supuesto, dado que $\tau_{\varphi\theta} = \tau_{\theta\varphi}$ se obtiene que $N_{\varphi\theta} = N_{\theta\varphi}$ y $M_{\varphi\theta} = M_{\theta\varphi}$.

El estado tensional en una lámina puede deducirse a partir de los esfuerzos mediante las siguientes expresiones:

$$\sigma_{\varphi}(\varphi, \theta, z) = \frac{N_{\varphi}}{t} + z \frac{12M_{\varphi}}{t^3} \quad (9.4a)$$

$$\sigma_{\theta}(\varphi, \theta, z) = \frac{N_{\theta}}{t} + z \frac{12M_{\theta}}{t^3} \quad (9.4b)$$

$$\tau_{\varphi\theta}(\varphi, \theta, z) = \frac{1}{t} N_{\varphi\theta} \quad (9.4c)$$

Las componentes $\tau_{\varphi z}$ y $\tau_{\theta z}$ pueden calcularse asumiendo una distribución constante en el espesor de las tensiones tangenciales, de forma similar a la teoría de placas. Por tanto, se obtiene:

$$\tau_{\varphi z}(\varphi, \theta, z) = \frac{6Q_{\varphi}}{5t} \left(1 - \left(\frac{2z}{t} \right)^2 \right) \quad (9.5a)$$

$$\tau_{\theta z}(\varphi, \theta, z) = \frac{6Q_{\theta}}{5t} \left(1 - \left(\frac{2z}{t} \right)^2 \right) \quad (9.5b)$$

En la formulación de la teoría de láminas se asumen las hipótesis de pequeños desplazamientos y comportamiento elástico y lineal. Además, las hipótesis de placa delgada también son aplicables, es decir, que las secciones planas en la situación indeformada permanecen planas en la situación deformada y que la deformación por cortante puede despreciarse.

9.3 Teoría de la membrana: láminas de revolución

El desarrollo de las ecuaciones de equilibrio de una lámina y su resolución se simplifica considerablemente mediante la teoría de la membrana, en la que se desprecian los esfuerzos cortantes, flectores y torsores. Esta simplificación se fundamenta en la preferencia de las láminas a resistir unas determinadas acciones únicamente mediante esfuerzos axiales, empleando la mínima energía necesaria.

En esta sección se estudian láminas con geometría de revolución. Una superficie de revolución se crea mediante la rotación de una curva alrededor de un eje, considerando que ambos están contenidos en un mismo plano. La curva que genera la superficie de revolución se denomina *meridiano*. El eje de rotación se corresponde con el eje de la lámina. Y, las líneas que se originan por la intersección entre la superficie de revolución y un plano perpendicular al eje de la lámina, se denominan *paralelos*.

Un ejemplo de lámina de revolución es un casquete esférico como el mostrado en la Figura 9.3. El vector de posición de un punto sobre la superficie de la lámina se define a partir de la intersección de un meridiano, identificado por el ángulo θ , y de un paralelo, dado por el ángulo φ .

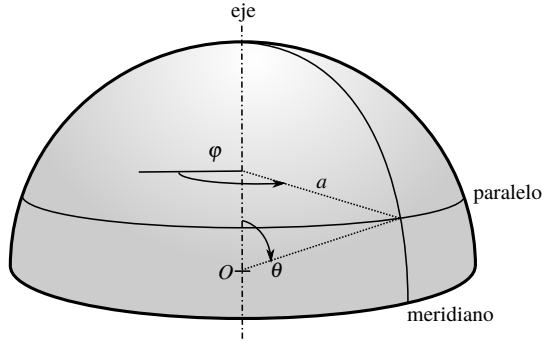


Figura 9.3 Geometría de un casquete esférico.

9.3.1 Ecuaciones de Equilibrio

Las ecuaciones de equilibrio de una lámina se obtienen a partir del equilibrio de fuerzas de un elemento diferencial de la lámina. En la Figura 9.4 se muestra el elemento diferencial $d\theta d\varphi$ definido mediante el radio de curvatura r_θ , el ángulo meridional θ y el radio del paralelo a . Las dimensiones del elemento son $ad\varphi$, $r_\theta d\theta$ y $(a + da)d\varphi$.

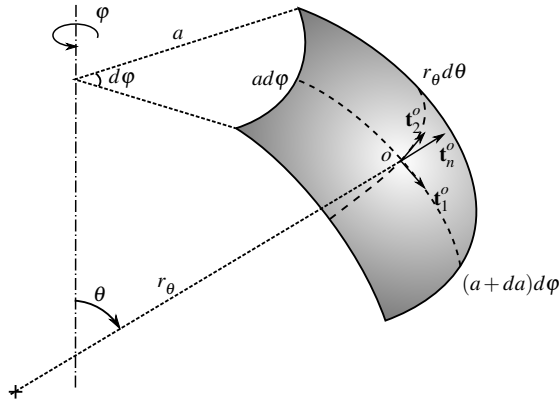


Figura 9.4 Elemento diferencial de una lámina de revolución.

El desarrollo de la ecuaciones de equilibrio se sistematiza considerando un sistema de referencia definido en el punto O por los siguientes vectores unitarios: i) $\mathbf{t}_1^o$ tangente al meridiano; ii) $\mathbf{t}_2^o$ tangente al paralelo; y iii) $\mathbf{t}_n^o$ normal a la superficie del elemento diferencial. La definición de estos vectores permite definir una base cartesiana $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$ dada por:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}} = \cos(\theta) \cos(\varphi) \mathbf{t}_1^o - \sin(\varphi) \mathbf{t}_2^o + \sin \theta \cos(\varphi) \mathbf{t}_n^o \\ \hat{\mathbf{y}} = \cos(\theta) \sin(\varphi) \mathbf{t}_1^o + \cos(\varphi) \mathbf{t}_2^o + \sin \theta \sin(\varphi) \mathbf{t}_n^o \\ \hat{\mathbf{z}} = -\sin \theta \mathbf{t}_1^o + \cos(\theta) \mathbf{t}_n^o \end{cases} \quad (9.6)$$

Teniendo en cuenta la expresión anterior se obtiene que:

$$\begin{cases} \mathbf{t}_1^o = \cos(\theta) \cos(\varphi) \hat{\mathbf{i}} + \cos(\theta) \sin(\varphi) \hat{\mathbf{j}} - \sin(\theta) \hat{\mathbf{k}} \\ \mathbf{t}_2^o = -\sin(\varphi) \hat{\mathbf{i}} + \cos(\varphi) \hat{\mathbf{j}} \\ \mathbf{t}_n^o = \sin(\theta) \cos(\varphi) \hat{\mathbf{i}} + \sin(\theta) \sin(\varphi) \hat{\mathbf{j}} + \cos(\theta) \hat{\mathbf{k}} \end{cases} \quad (9.7)$$

donde $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$ son los vectores unitarios asociados a la base $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$. La base de coordenadas esféricas se puede definir haciendo coincidir $\mathbf{t}_2^o$ con el vector $\hat{\mathbf{j}}$, es decir, asumiendo que $\varphi = 0$:

$$\begin{cases} \mathbf{t}_1^o = \cos(\theta) \hat{\mathbf{i}} - \sin(\theta) \hat{\mathbf{k}} \\ \mathbf{t}_2^o = \hat{\mathbf{j}} \\ \mathbf{t}_n^o = \sin(\theta) \hat{\mathbf{i}} + \cos(\theta) \hat{\mathbf{k}} \end{cases} \quad (9.8)$$

En la Figura 9.5 se representan las fuerzas externas (p_θ , p_φ y p_n) que actúan sobre el elemento diferencial y los esfuerzos que las equilibran. Las ecuaciones de equilibrio se obtienen imponiendo el equilibrio de fuerzas en la dirección meridional $\mathbf{t}_1^o$, en la dirección del paralelo $\mathbf{t}_2^o$ y en la dirección normal $\mathbf{t}_n^o$, además del equilibrio de momento según $\mathbf{t}_n^o$.

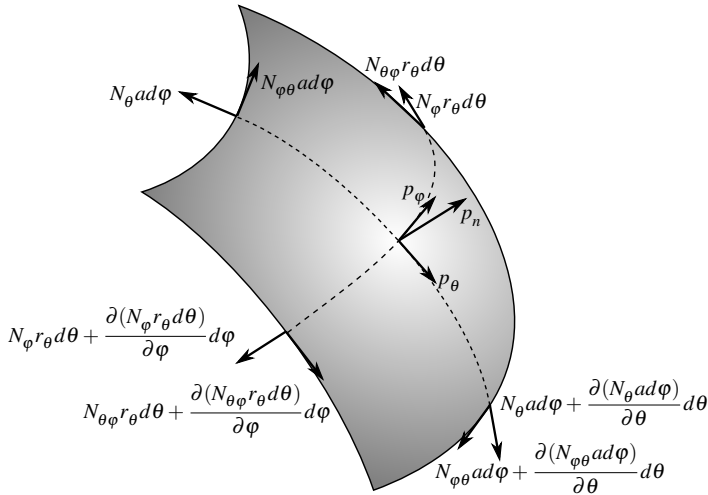


Figura 9.5 Definición de fuerzas en un elemento diferencial de la lámina.

Para deducir las ecuaciones de equilibrio de forma sistemática se pueden definir unos vectores unitarios tangentes al meridiano y al paralelo en los puntos donde actúan los esfuerzos internos de la lámina (Figura 9.6). Los vectores unitarios definidos en el punto φ^- se obtienen particularizando las expresiones dada por la Ecuación (9.7) con $\varphi = -d\varphi/2$:

$$\begin{cases} \mathbf{t}_1^{\varphi^-} = \cos(\theta) \cos\left(-\frac{d\varphi}{2}\right) \hat{\mathbf{i}} + \cos(\theta) \sin\left(-\frac{d\varphi}{2}\right) \hat{\mathbf{j}} - \sin(\theta) \hat{\mathbf{k}} \\ \mathbf{t}_2^{\varphi^-} = -\sin\left(-\frac{d\varphi}{2}\right) \hat{\mathbf{i}} + \cos\left(-\frac{d\varphi}{2}\right) \hat{\mathbf{j}} \end{cases} \quad (9.9)$$

La definición anterior se simplifica considerando las aproximaciones trigonométricas

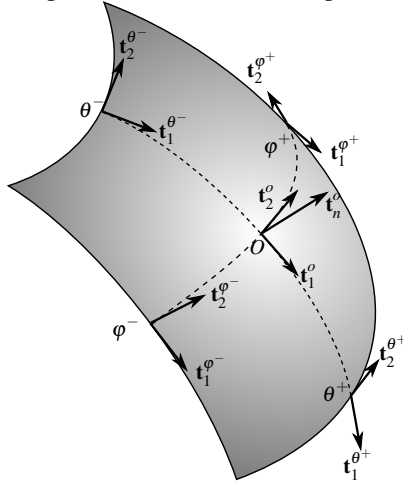


Figura 9.6 Definición de los cosenos directores.

para ángulos pequeños¹:

$$\begin{cases} \mathbf{t}_1^{\varphi^-} = \cos(\theta)\hat{\mathbf{i}} - \cos(\theta)\frac{d\varphi}{2}\hat{\mathbf{j}} - \sin(\theta)\hat{\mathbf{k}} \\ \mathbf{t}_2^{\varphi^-} = \frac{d\varphi}{2}\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} \end{cases} \quad (9.10)$$

Análogamente, los vectores tangentes en el punto φ^+ se definen considerando que $\varphi = d\varphi/2$:

$$\begin{cases} \mathbf{t}_1^{\varphi^+} = \cos(\theta)\hat{\mathbf{i}} + \cos(\theta)\frac{d\varphi}{2}\hat{\mathbf{j}} - \sin(\theta)\hat{\mathbf{k}} \\ \mathbf{t}_2^{\varphi^+} = -\frac{d\varphi}{2}\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} \end{cases} \quad (9.11)$$

Los vectores tangenciales en los puntos del elemento asociados a variaciones positivas del ángulo meridional, $\theta^+ = \theta + d\theta/2$, se definen como:

$$\begin{cases} \mathbf{t}_1^{\theta^+} = \cos\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right)\cos(\varphi)\hat{\mathbf{i}} + \cos\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right)\sin(\varphi)\hat{\mathbf{j}} - \sin\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right)\hat{\mathbf{k}} \\ \mathbf{t}_2^{\theta^+} = -\sin(\varphi)\hat{\mathbf{i}} + \cos(\varphi)\hat{\mathbf{j}} \end{cases} \quad (9.12)$$

¹ $\sin(d\varphi/2) \simeq d\varphi/2$, $\cos(d\varphi/2) \simeq 1$

La expresión anterior se modifica como ^{2 3}:

$$\begin{cases} \mathbf{t}_1^{\theta^+} = \left(\cos(\theta) - \sin(\theta) \frac{d\theta}{2} \right) \hat{\mathbf{i}} - \left(\sin(\theta) + \cos(\theta) \frac{d\theta}{2} \right) \hat{\mathbf{k}} \\ \mathbf{t}_2^{\theta^+} = \hat{\mathbf{j}} \end{cases} \quad (9.13)$$

Del mismo modo, los vectores en el ángulo meridional $\theta^- = \theta - d\theta/2$ están definidos por:

$$\begin{cases} \mathbf{t}_1^{\theta^-} = \left(\cos(\theta) + \sin(\theta) \frac{d\theta}{2} \right) \hat{\mathbf{i}} - \left(\sin(\theta) - \cos(\theta) \frac{d\theta}{2} \right) \hat{\mathbf{k}} \\ \mathbf{t}_2^{\theta^-} = \hat{\mathbf{j}} \end{cases} \quad (9.14)$$

Las definiciones de los vectores unitarios permite expresar las direcciones de los esfuerzos en el elemento diferencial de la lámina. El equilibrio de fuerzas se realizará utilizando las proyecciones de estos vectores sobre la base $(\mathbf{t}_1^o, \mathbf{t}_2^o, \mathbf{t}_n^o)$. La proyección de un vector $\mathbf{v}$ sobre el vector $\mathbf{u}$ está definida por:

$$\text{proy}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|} \mathbf{u} \quad (9.15)$$

En primer lugar, se deduce la ecuación equilibrio de momentos según $\mathbf{t}_n^o$ en el punto O . Se puede comprobar que los vectores $\mathbf{t}_2^{\theta^+}$ y $\mathbf{t}_2^{\theta^-}$ son paralelos a $\mathbf{t}_2^{o 4 5}$, y que los vectores $\mathbf{t}_1^{\theta^+}$ y $\mathbf{t}_1^{\theta^-}$ también son paralelos a $\mathbf{t}_1^{o 6 7}$. Así mismo, los vectores $\mathbf{t}_1^{\theta^+}$ y $\mathbf{t}_1^{\theta^-}$, y $\mathbf{t}_2^{\theta^+}$ y $\mathbf{t}_2^{\theta^-}$, son paralelos a $\mathbf{t}_1^{o 8 9}$ y a $\mathbf{t}_2^{o 10 11}$, respectivamente, por lo que los esfuerzos definidos según estas direcciones no producirán momentos.

² $\sin(\theta \pm d\theta/2) = \sin(\theta) \cos(d\theta/2) \pm \cos(\theta) \sin(d\theta/2) \simeq \sin(\theta) \pm \cos(\theta) d\theta/2$

³ $\cos(\theta \pm d\theta/2) = \cos(\theta) \cos(d\theta/2) \mp \sin(\theta) \sin(d\theta/2) \simeq \cos(\theta) \mp \sin(\theta) d\theta/2$

⁴ $\text{proy}_{\mathbf{t}_2^o}(\mathbf{t}_2^{\theta^+}) = \mathbf{t}_2^o$

⁵ $\text{proy}_{\mathbf{t}_2^o}(\mathbf{t}_2^{\theta^-}) = \mathbf{t}_2^o$

⁶ $\text{proy}_{\mathbf{t}_1^o}(\mathbf{t}_1^{\theta^+}) = \mathbf{t}_1^o$

⁷ $\text{proy}_{\mathbf{t}_1^o}(\mathbf{t}_1^{\theta^-}) = \mathbf{t}_1^o$

⁸ $\text{proy}_{\mathbf{t}_1^o}(\mathbf{t}_1^{\theta^+}) = \mathbf{t}_1^o$

⁹ $\text{proy}_{\mathbf{t}_1^o}(\mathbf{t}_1^{\theta^-}) = \mathbf{t}_1^o$

¹⁰ $\text{proy}_{\mathbf{t}_2^o}(\mathbf{t}_2^{\theta^+}) = \mathbf{t}_2^o$

¹¹ $\text{proy}_{\mathbf{t}_2^o}(\mathbf{t}_2^{\theta^-}) = \mathbf{t}_2^o$

Por tanto, el equilibrio de momentos establece:

$$\begin{aligned}
 & -N_{\varphi\theta}ad\varphi\frac{d\theta}{2} - \left(N_{\varphi\theta}ad\varphi + \underbrace{\frac{\partial N_{\varphi\theta}ad\varphi}{\theta}d\theta}_{\mathcal{O}^2} \right) \frac{d\theta}{2} \\
 & + N_{\theta\varphi}r_{\theta}d\theta\frac{d\varphi}{2} + \left(N_{\theta\varphi}r_{\theta}d\theta + \underbrace{\frac{\partial N_{\theta\varphi}r_{\theta}d\theta}{\varphi}d\varphi}_{\mathcal{O}^2} \right) \frac{d\varphi}{2} = 0
 \end{aligned} \tag{9.16}$$

Despreciando los términos asociados a infinitésimos de orden superior ($\mathcal{O}^2$) se obtiene:

$$N_{\varphi\theta} = N_{\theta\varphi} \tag{9.17}$$

La ecuación de equilibrio de momentos expresa la simetría de los esfuerzos tangenciales.

Un vez obtenida la ecuación de equilibrio de momentos se obtiene la ecuación de equilibrio de fuerzas en la dirección meridional. Los esfuerzos N_{φ} y su variación asociada contribuyen al equilibrio de fuerzas de acuerdo a las proyecciones de los vectores $\mathbf{t}_2^{\varphi^+}$ y $\mathbf{t}_2^{\varphi^-}$ sobre la dirección dada por $\mathbf{t}_1^{\varphi}$ ^{12 13}, respectivamente. En este caso, el equilibrio de fuerzas impone:

$$\begin{aligned}
 & -N_{\theta}ad\varphi + \left(N_{\theta}ad\varphi + \frac{\partial N_{\theta}ad\varphi}{\partial\theta}d\theta \right) - N_{\theta\varphi}r_{\theta}d\theta + \left(N_{\theta\varphi}r_{\theta}d\varphi + \frac{\partial N_{\theta\varphi}r_{\theta}d\varphi}{\partial\varphi}d\varphi \right) \\
 & - N_{\varphi}r_{\theta}d\theta \cos(\theta)\frac{d\varphi}{2} - \left(N_{\varphi}r_{\theta}d\theta + \underbrace{\frac{\partial N_{\varphi}r_{\theta}d\theta}{\partial\varphi}d\varphi}_{\mathcal{O}^2} \right) \cos(\theta)\frac{d\varphi}{2} + p_{\theta}r_{\theta}d\theta ad\varphi = 0
 \end{aligned} \tag{9.18}$$

Obteniéndose que:

$$\frac{\partial N_{\theta}a}{\partial\theta} + \frac{\partial N_{\theta\varphi}r_{\theta}}{\partial\varphi} - N_{\varphi}r_{\theta} \cos(\theta) + p_{\theta}r_{\theta}a = 0 \tag{9.19}$$

¹² $\text{proy}_{\mathbf{t}_1^{\varphi}}(\mathbf{t}_2^{\varphi^+}) = \cos(\theta)\frac{d\varphi}{2}\mathbf{t}_1^{\varphi}$

¹³ $\text{proy}_{\mathbf{t}_1^{\varphi}}(\mathbf{t}_2^{\varphi^-}) = -\cos(\theta)\frac{d\varphi}{2}\mathbf{t}_1^{\varphi}$

Del mismo modo, el equilibrio de fuerzas según la dirección del paralelo se deduce de la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 & N_{\varphi\theta}ad\varphi - \left(N_{\varphi\theta}ad\varphi + \frac{\partial N_{\varphi\theta}ad\varphi}{\partial\theta}d\theta \right) + N_{\varphi}r_{\theta}d\theta - \left(N_{\varphi}r_{\theta}d\theta + \frac{\partial N_{\varphi}r_{\theta}d\theta}{\partial\varphi}d\varphi \right) \\
 & - N_{\theta\varphi}r_{\theta}d\theta \cos(\theta) \frac{d\varphi}{2} - \left(N_{\theta\varphi}r_{\theta}d\theta + \underbrace{\frac{\partial N_{\theta\varphi}r_{\theta}d\theta}{\partial\varphi}d\varphi}_{\sigma^2} \right) \cos(\theta) \frac{d\varphi}{2} + p_{\varphi}r_{\theta}d\theta ad\varphi = 0
 \end{aligned} \tag{9.20}$$

que una vez simplificada establece:

$$\frac{\partial N_{\varphi\theta}a}{\partial\theta} + \frac{\partial N_{\varphi}r_{\theta}}{\partial\varphi} + N_{\theta\varphi}r_{\theta} \cos(\theta) - p_{\varphi}r_{\theta}a = 0 \tag{9.21}$$

Finalmente, el equilibrio de fuerzas según la dirección perpendicular a la lámina se obtiene proyectando los esfuerzos sobre la dirección $\mathbf{t}_n^o$ ^{14 15 16 17 18 19}:

$$\begin{aligned}
 & -N_{\theta}ad\varphi \frac{d\theta}{2} - \left(N_{\theta}ad\varphi + \underbrace{\frac{\partial N_{\theta}ad\varphi}{\partial\theta}d\theta}_{\sigma^2} \right) \frac{d\theta}{2} \\
 & -N_{\varphi}r_{\theta}d\theta \sin(\theta) \frac{d\varphi}{2} - \left(N_{\varphi}r_{\theta}d\theta + \underbrace{\frac{\partial N_{\varphi}r_{\theta}d\theta}{\partial\varphi}d\varphi}_{\sigma^2} \right) \sin(\theta) \frac{d\varphi}{2} \\
 & + p_n r_{\theta} ad\varphi = 0
 \end{aligned} \tag{9.22}$$

o, equivalentemente:

$$N_{\theta}a + N_{\varphi}r_{\theta} \sin(\theta) - p_n r_{\theta}a = 0 \tag{9.23}$$

Las ecuaciones de equilibrio dadas por (9.17), (9.19), (9.21) y (9.23) forman un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas: N_{θ} , N_{φ} , $N_{\theta\varphi}$ y $N_{\varphi\theta}$.

¹⁴ $\text{proy}_{\mathbf{t}_n^o}(\mathbf{t}_1^{\theta^+}) = \frac{d\theta}{2} \mathbf{t}_n^o$

¹⁵ $\text{proy}_{\mathbf{t}_n^o}(\mathbf{t}_1^{\theta^-}) = -\frac{d\theta}{2} \mathbf{t}_n^o$

¹⁶ $\text{proy}_{\mathbf{t}_n^o}(\mathbf{t}_1^{\varphi^+}) = 0$

¹⁷ $\text{proy}_{\mathbf{t}_n^o}(\mathbf{t}_2^{\varphi^+}) = -\sin(\theta) \frac{d\varphi}{2} \mathbf{t}_n^o$

¹⁸ $\text{proy}_{\mathbf{t}_n^o}(\mathbf{t}_1^{\varphi^-}) = 0$

¹⁹ $\text{proy}_{\mathbf{t}_n^o}(\mathbf{t}_2^{\varphi^-}) = \sin(\theta) \frac{d\varphi}{2} \mathbf{t}_n^o$

9.3.2 Problema axisimétrico

La formulación de la teoría de la membrana se simplifica si el problema presenta condiciones de axisimetría. Para que se den estas condiciones es necesario que: i) la geometría sea axisimétrica, lo cual se da de forma inherente en una lámina de revolución; y ii) que las fuerzas y las condiciones de contorno tengan también simetría de revolución. En este caso, se da que la fuerza externa $p_\varphi = 0$ y la componente tangencial de los esfuerzos $N_{\theta\varphi} = 0$. Además, la axisimetría establece que no existen variaciones con respecto a φ . Por tanto, las ecuaciones de equilibrio del problema son:

$$\frac{\partial N_\theta a}{\partial \theta} - N_\varphi r_\theta \cos(\theta) + p_\theta r_\theta a = 0 \quad (9.24a)$$

$$N_\theta a + N_\varphi r_\theta \sin(\theta) - p_n r_\theta a = 0 \quad (9.24b)$$

En el problema axisimétrico las incógnitas son N_θ y N_φ .

Ejemplo 9.3.1 Lámina cilíndrica de radio r sometida a presión interna p_n .

La resolución de este caso concreto de lámina de revolución con carga axisimétrica se obtiene considerando que el ángulo del meridiano es constante y de valor $\theta = \pi/2$ y que el radio de curvatura es $r_\theta = \infty$. Además, el radio del paralelo coincide con el del cilindro, $a = r$. Por tanto, las ecuaciones de equilibrio se expresan como:

$$\frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (9.25a)$$

$$N_\theta a + N_\varphi r_\theta - p_n r_\theta a = 0 \quad (9.25b)$$

La primera ecuación de equilibrio impone que el esfuerzo axial según la dirección del meridiano es constante, siendo nulo cuando el cilindro está abierto en los extremos. Entonces, la segunda ecuación de equilibrio establece que:

$$N_\varphi = p_n r \quad (9.26)$$

Por tanto, en un cilindro sometido a presión interna sólo se producen esfuerzos axiales en la dirección tangente al paralelo.

En cambio, si el cilindro tiene ambos extremos cerrados se produce una fuerza resultante producida por la acción de la presión interna de valor $F_n = \pi r^2 p_n$. Esta fuerza producirá unos esfuerzos meridionales de valor $N_\theta = F_n/2\pi r = p_n r/2$.

Ejemplo 9.3.2 Lámina esférica de radio r sometida a presión interna p_n .

La resolución de este caso concreto de lámina de revolución con carga axisimétrica se obtiene considerando que el radio de curvatura es constante de valor $r_\theta = r$. Además, el radio del paralelo se obtiene como $a = r \sin(\theta)$. En este caso, si la ecuación de equilibrio

de fuerzas en la dirección meridional (Ecuación (9.24a)) se multiplica por el $\sin(\theta)$ se obtiene:

$$\frac{\partial N_{\theta} a}{\partial \theta} \sin(\theta) - N_{\phi} r \cos(\theta) \sin(\theta) = 0 \quad (9.27)$$

Sustituyendo en esta expresión la Ecuación (9.24b) se tiene:

$$\frac{\partial N_{\theta} a}{\partial \theta} \sin(\theta) + N_{\theta} a \cos(\theta) = p_n r a \cos(\theta) \quad (9.28)$$

El término de la izquierda puede reescribirse como:

$$\frac{\partial N_{\theta} a \sin(\theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial N_{\theta} a}{\partial \theta} \sin(\theta) + N_{\theta} a \cos(\theta) \quad (9.29)$$

Por tanto, sustituyendo en la Ecuación (9.28) y particularizando el valor del radio del paralelo para la geometría esférica se llega a:

$$N_{\theta} = \frac{p_n r^2}{r \sin^2(\theta)} \int \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta \quad (9.30)$$

El valor del esfuerzo axil que actúa según la dirección meridional se obtiene haciendo uso de las identidades trigonométricas del ángulo doble ^{20 21}:

$$N_{\theta} = \frac{p_n r}{2} \quad (9.31)$$

Por último, sustituyendo el resultado anterior en la Ecuación (9.24b) se tiene:

$$N_{\phi} = \frac{p_n r}{2} \quad (9.32)$$

Una vez calculado el valor de los axiles ($N = N_{\theta} = N_{\phi}$) las tensiones de la membrana son:

$$\sigma = \sigma_{\theta} = \sigma_{\phi} = \frac{N}{t} = \frac{p_n r}{2t} \quad (9.33)$$

Y, considerando una ley de comportamiento de material isótropo, las deformaciones de la esfera vienen dadas por:

$$\varepsilon = \varepsilon_{\theta} = \varepsilon_{\phi} = \sigma \frac{(1 - \nu)}{E} = \frac{p_n r (1 - \nu)}{2tE} \quad (9.34)$$

Finalmente, el radio de la esfera en la situación deformada es:

$$r' = r(1 + \varepsilon) = r \left(1 + \frac{p_n r (1 - \nu)}{2tE} \right) \quad (9.35)$$

²⁰ $\sin(2\theta) = 2 \cos(\theta) \sin(\theta)$

²¹ $\cos(2\theta) = 1 - 2 \sin^2(\theta)$

Ejemplo 9.3.3 Lámina esférica de radio r sometida a su peso propio.

La solución de una lámina esférica que soporta su peso propio puede obtenerse como una generalización del problema anterior. La masa total de la lámina, m , produce una fuerza por unidad de superficie de valor $q = mg/\pi r^2$, siendo g la aceleración de la gravedad. Esta fuerza actúa según la dirección de la gravedad, coincidiendo con la dirección del eje de la lámina. La fuerza q se descompone según:

$$p_\theta = q \sin(\theta) \quad (9.36a)$$

$$p_n = -q \cos(\theta) \quad (9.36b)$$

La ecuación de equilibrio de fuerzas en la dirección meridional (Ecuación (9.24a)) multiplicada por el $\sin(\theta)$ implica:

$$\frac{\partial N_\theta a}{\partial \theta} \sin(\theta) - N_\theta r \cos(\theta) \sin(\theta) + p_\theta r a \sin(\theta) = 0 \quad (9.37)$$

Sustituyendo en esta expresión la Ecuación (9.24b) se tiene:

$$\frac{\partial N_\theta a}{\partial \theta} \sin(\theta) + N_\theta a \cos(\theta) = p_n r a \cos(\theta) - p_\theta r a \sin(\theta) \quad (9.38)$$

El término de la izquierda puede reescribirse como:

$$\frac{\partial N_\theta a \sin(\theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial N_\theta a}{\partial \theta} \sin(\theta) + N_\theta a \cos(\theta) \quad (9.39)$$

Por tanto, sustituyendo en la Ecuación (9.28) y particularizando el valor del radio del paralelo para la geometría esférica se llega a:

$$N_\theta = \frac{r}{\sin^2(\theta)} \int \sin(\theta) (p_n \cos(\theta) - p_\theta \sin(\theta)) d\theta \quad (9.40)$$

Esta ecuación se expresa particularizando el valor de la fuerza como:

$$N_\theta = -\frac{qr}{\sin^2(\theta)} \int \sin(\theta) (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) d\theta \quad (9.41)$$

Por tanto, el valor del esfuerzo que actúa según la dirección meridional es:

$$N_\theta = -\frac{qr(1 - \cos(\theta))}{\sin^2(\theta)} = -\frac{qr}{1 + \cos(\theta)} \quad (9.42)$$

Por último, sustituyendo el resultado anterior en la Ecuación (9.24b) se tiene:

$$N_\phi = qr \left(\frac{1}{1 + \cos(\theta)} - \cos(\theta) \right) \quad (9.43)$$

9.3.3 Validez teoría de la membrana

La validez de los resultados obtenidos mediante la teoría de la membrana dependen de las siguientes condiciones: i) las condiciones de contorno deben ser compatibles con las condiciones de equilibrio, de forma que solo se produzcan reacciones normales a la lámina; ii) la aplicación de la carga también debe ser compatible con las ecuaciones de equilibrio; y iii) la geometría de la lámina debe ser uniforme.

Por ejemplo, una restricción del desplazamiento que no sea paralela al plano medio de lámina en el punto de aplicación producirá una fuerza de reacción normal a dicho plano que no estará equilibrada, ya que la teoría de la membrana no considera las fuerzas fuera del plano.

En el caso de fuerzas puntuales actuando en la dirección de un elemento diferencial (por ejemplo, en la clave de una bóveda) aparecerá un desequilibrio ya que la teoría de la membrana no considera fuerzas fuera del plano. Sin embargo, a medida que el tamaño del elemento fuera mayor dicho estado de carga se equilibraría de forma natural por la curvatura de la lámina y los esfuerzos de membrana. Esta consideración implica que las acciones sobre una lámina deben estar suficientemente distribuidas para que la teoría de la membrana sea aplicable.

Por otra parte, si consideramos una lámina plana sujeta a una distribución de carga normal no sería posible cumplir el equilibrio de fuerzas verticales mediante esfuerzos de membrana. Por tanto, la teoría de la membrana tampoco es de aplicación para el análisis de placas.

Tampoco sería posible el estudio de la lámina mediante la teoría de la membrana si ésta presenta cambios en su geometría, por ejemplo, cambios de espesor.

En estos casos aparecen esfuerzos de flexión que normalmente se localizan en torno a la zona donde se aplican las condiciones de contorno, las fuerzas o se producen los cambios en la geometría. A este tipo de esfuerzos se les denomina *flexión localizada*.

Estas consideraciones muestran que la teoría de la membrana no es adecuada para todos los análisis de láminas. Aunque esta teoría permite simplificar el desarrollo de las ecuaciones de equilibrio de la lámina existen casos particulares que no sería posible su estudio. Cuando esto sucede, la solución del problema vendría dada por la solución obtenida según la teoría de la membrana más la que resulte del problema de flexión localizada. Sin embargo, cuando la geometría, las acciones externas y las condiciones de contorno cumplen las hipótesis de la teoría es posible obtener la solución completa del problema simplemente por teoría de la membrana.

9.4 Problemas propuestos

- 9.1 El objetivo del problema propuesto es el análisis de una lámina cilíndrica axisimétrica con los extremos libres, de radio r , longitud L y espesor t , sometida a una presión interna de valor p_n mediante dos modelizaciones diferentes. El Código 9.1 presenta el listado de comandos de ANSYS para modelizar una lámina cilíndrica sometida a una presión interna. En este código se utilizan condiciones de simetría para representar el problema. Por otra parte, el Código 9.2 modeliza la lámina cilíndrica utilizando elementos axisimétricos que

permiten simplificar la modelización del problema y su análisis. Los datos del problema son:

- $r = 1.5 \text{ m}$
- $L = 15 \text{ m}$
- $t = 0.025 \text{ m}$
- $E = 210 \times 10^9 \text{ N/m}^2$
- $\nu = 0.3$
- $p_n = 3.5 \times 10^6 \text{ N/m}^2$

9.2 El objetivo del problema propuesto es el análisis de una lámina esférica axisimétrica de radio r , y espesor t , sometida a una presión interna de valor p_n utilizando dos modelizaciones en ANSYS diferentes: i) un modelo tridimensional; y ii) un modelo axisimétrico.

Los datos del problema son:

- $r = 2 \text{ m}$
- $t = 0.02 \text{ m}$
- $E = 210 \times 10^9 \text{ N/m}^2$
- $\nu = 0.3$
- $p_n = 5 \times 10^6 \text{ N/m}^2$

Código 9.1 Listado de comandos de Ansys para el análisis de un cilindro sometido a presión interna.

```
! Este ejemplo modeliza el comportamiento de un cilindro de radio a, longitud 10*a y espesor t, solicitado por una presión uniforme de valor p0.

!*-----
! datos
!*-----

! geometría del cilindro
a=1.5
t=0.025
long=10*a/2

! propiedades del material
you=210e9 ! módulo Young
poi=0.3   ! coeficiente de Poisson

! carga
p0=-3.5e6

! numero de elementos
nel=10

!*-----

/prep7

! propiedades material
mp,ex,1,you
mp,prxy,1,poi

! tipo de elemento y sección
et,1,shell181
sectype,1,shell,,
secdata,t,1

! geometría
k,1,a
k,2,a, long
k,3,, a
k,4,, a, long
csys,1
a,1,2,4,3
esize, , nel
amesh,1
csys,0

! presión interna
sfa,1,1,pres,p0

! condiciones de contorno
nsel,s,loc,x,0
dsym,symm,x
nsel,s,loc,y,0
dsym,symm,y
nsel,s,loc,z,0
dsym,symm,z
nsel,all

! solución
/sol
antype,0
solve
finish

! post-proceso
/post1
allsel,all
etable,n11,smisc,1
etable,n22,smisc,2
etable,n12,smisc,3
etable,m1,smisc,4
etable,m2,smisc,5
etable,m12,smisc,6
etable,q1,smisc,7
etable,q2,smisc,8
```

Código 9.2 Listado de comandos de Ansys para el análisis de un cilindro sometido a presión interna utilizando elementos axisimétricos.

```
! Este ejemplo modeliza el comportamiento de un cilindro de radio a, longitud 10*a y espesor t, solicitado por una presión uniforme de valor p0.

!*-----
! datos
!*-----

! geometría del cilindro
a=1.5
t=0.025
long=10*a/2

! propiedades del material
you=210e9 ! módulo Young
poi=0.3 ! coeficiente de Poisson

! carga
p0=-3.5e6

! numero de elementos
nel=10

!*-----

/prep7

! propiedades material
mp,ex,1,you
mp,prxy,1,poi

! tipo de elemento y sección
et,1,shell208
sectype,1,shell
secdata,t,1

! geometría y mallado
n,1,a
n,nel+1,a,long
fill,1,nel+1
e,1,2
egen,nel,1,1

! condiciones de contorno
d,1,uy,,,,,rotz
d,nel+1,rotz

! presión interna
sfe,all,1,pres,,p0
finish

! solución
/sol
antype,0
solve
finish

! post-proceso
/post1
allsel,all
etable,n11,smisc,1
etable,n22,smisc,2
etable,n12,smisc,3
```

- 9.3** Explique de forma clara y concisa las hipótesis de la Teoría de la Membrana para el análisis de estructuras laminares. Discuta la validez de esta teoría para los casos mostrados en la Figura 9.7. ¿Es posible estudiar el comportamiento de una placa mediante la teoría de la membrana? ¿Por qué?

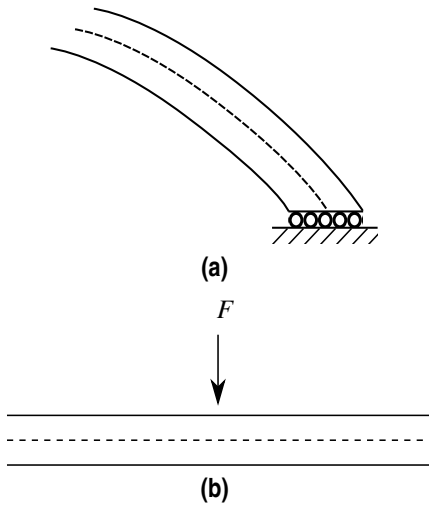


Figura 9.7

Apéndice A

Matrices de rigidez elementales

A.1 Elemento articulado

A.1.1 Coordenadas locales

En 2 coordenadas locales

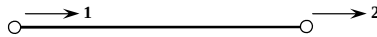


Figura A.1 Elemento Articulado en 2 Coordenadas Locales.

$$\underline{k}' = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

En 4 coordenadas locales

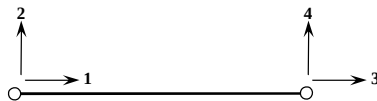


Figura A.2 Elemento Articulado en 4 Coordenadas Locales.

$$\underline{k}' = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

A.1.2 Coordenadas globales

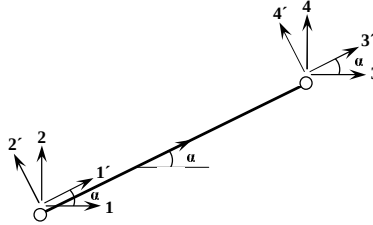


Figura A.3 Elemento Articulado en Coordenadas Globales.

$$\underline{k} = \underline{L} \cdot \underline{k}' \cdot \underline{L}^T \quad (\text{A.3})$$

$$\underline{L}_D = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

$$\underline{L} = \begin{pmatrix} \underline{L}_D & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{L}_D \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

$$\underline{k} = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha & -\cos^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha \\ \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha & -\sin^2 \alpha \\ -\cos^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha & \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha \\ -\cos \alpha \sin \alpha & -\sin^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

A.2 Elemento plano con nudos rígidos

A.2.1 Coordenadas locales

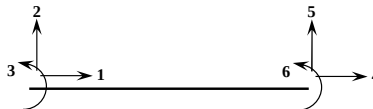


Figura A.4 Elemento Plano con Nudos Rígidos en Coordenadas Locales.

$$\underline{k}' = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \quad (A.7)$$

A.2.2 Coordenadas globales

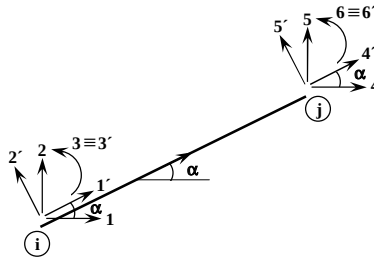


Figura A.5 Elemento Plano con Nudos Rígidos en Coordenadas Globales.

$$\underline{L}_D = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (A.8)$$

$$\underline{L} = \begin{pmatrix} \underline{L}_D & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{L}_D \end{pmatrix} \quad (A.9)$$

$$\underline{k} = \begin{pmatrix} A & D & P & -A & -D & P \\ D & B & F & -D & -B & F \\ P & F & C & -P & -F & \frac{C}{2} \\ -A & -D & -P & A & D & -P \\ -D & -B & -F & D & B & -F \\ P & F & \frac{C}{2} & -P & -F & C \end{pmatrix} \quad (A.10)$$

$$A = \cos^2 \alpha \frac{EA}{L} + \sin^2 \alpha \frac{12EI}{L^3} \quad B = \sin^2 \alpha \frac{EA}{L} + \cos^2 \alpha \frac{12EI}{L^3} \quad (A.11)$$

$$C = \frac{4EI}{L} \quad D = \cos \alpha \sin \alpha \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right) \quad (A.12)$$

$$F = \cos \alpha \frac{6EI}{L^2} \quad P = -\sin \alpha \frac{6EI}{L^2} \quad (A.13)$$

Apéndice B

Matrices de masa congruente

B.1 Elemento articulado

B.1.1 En 2 coordenadas locales

$$\underline{M'} = mL \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

B.1.2 En 4 coordenadas locales

$$\underline{M'} = mL \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Apéndice C

Matriz de rigidez geométrica

C.1 Elemento articulado

C.1.1 Coordenadas locales

En 4 coordenadas locales



Figura C.1 Elemento Articulado en 4 Coordenadas Locales.

$$\underline{k'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & 0 & -\frac{1}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} & 0 & \frac{1}{L} \end{pmatrix} \quad (C.1)$$

C.1.2 Coordenadas globales

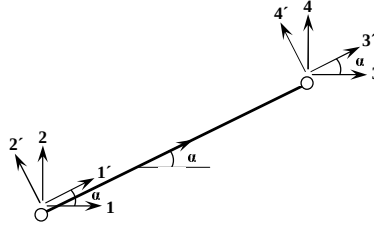


Figura C.2 Elemento Articulado en Coordenadas Globales.

$$\underline{k} = \underline{L} \cdot \underline{k}' \cdot \underline{L}^T \quad (C.2)$$

$$\underline{L}_D = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (C.3)$$

$$\underline{L} = \begin{pmatrix} \underline{L}_D & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{L}_D \end{pmatrix} \quad (C.4)$$

$$\underline{k} = \frac{1}{L} \begin{pmatrix} \sin^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha & -\sin^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha \\ -\cos \alpha \sin \alpha & \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha & -\cos^2 \alpha \\ -\sin^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha \\ \cos \alpha \sin \alpha & -\cos^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha & \cos^2 \alpha \end{pmatrix} \quad (C.5)$$

C.2 Elemento plano nudos rígidos

C.2.1 Coordenadas locales

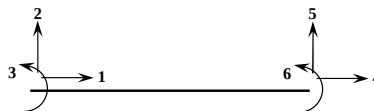


Figura C.3 Elemento Plano con Nudos Rígidos en Coordenadas Locales.

$$\underline{k}_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} \frac{1}{L} & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{6}{5} \frac{1}{L} & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{2L}{15} & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{L}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} \frac{1}{L} & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{6}{5} \frac{1}{L} & -\frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & -\frac{L}{30} & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{2L}{15} \end{pmatrix} \quad (C.6)$$

C.2.2 Coordenadas globales

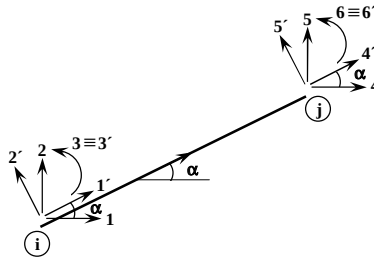


Figura C.4 Elemento Plano con Nudos Rígidos en Coordenadas Globales.

$$\underline{L}_D = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (C.7)$$

$$\underline{L} = \begin{pmatrix} \underline{L}_D & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{L}_D \end{pmatrix} \quad (C.8)$$

$$\underline{k} = \begin{pmatrix} A & D & P & -A & -D & P \\ D & B & F & -D & -B & F \\ P & F & C & -P & -F & \frac{C}{4} \\ -A & -D & -P & A & D & -P \\ -D & -B & -F & D & B & -F \\ P & F & \frac{C}{4} & -P & -F & C \end{pmatrix} \quad (C.9)$$

$$A = \sin^2 \alpha \cdot \frac{6}{5L} \quad B = \cos^2 \alpha \cdot \frac{6}{5L} \quad (C.10)$$

$$C = \frac{2L}{15} \quad D = \cos \alpha \sin \alpha \cdot \left(-\frac{6}{5L} \right) \quad (C.11)$$

$$F = \cos \alpha \cdot \frac{1}{10} \quad P = -\sin \alpha \cdot \frac{1}{10} \quad (C.12)$$

Índice de Figuras

1.1	(a) Hangar de la planta de montaje del avión de transporte militar A400M (Sevilla). (b) Planta de energía termosolar Gemasolar (Fuentes de Andalucía). (c) Terminal de cruceros del puerto de Sevilla	2
1.2	(a) Representación esquemática de una estructura y (b) modelo estructural asociado	3
1.3	Modelo de elementos finitos del puente de Barqueta (Sevilla) y detalle del modelo de la sección transversal del tablero.	5
1.4	Flujo de trabajo en la resolución de un problema	6
2.1	Modelización de una barra sometida a un estado de tracción	11
2.2	Modelización de una barra con dos elementos	12
2.3	Discretización de un problema de tensión plana	19
2.4	Representación de la función de forma N_i	20
2.5	Definición del problema de una laja con un agujero	23
2.6	Representación polar de la componente σ_θ del estado tensional en el contorno del agujero (adimensionalizado a σ_∞)	23
2.7	Discretización del problema de la laja con un agujero	24
2.8	Representación de la componente circunferencial del estado de tensiones en una laja utilizando el elemento (a) PLANE182 y (c) PLANE183	25
2.9	Definición del problema de una laja con un agujero	26
3.1	Pórtico sometido a fuerzas puntuales y cargas repartidas	27
3.2	Discretización del pórtico en elementos finitos	28
3.3	Elemento finito barra	28
3.4	Elemento finito barra sometido a esfuerzo axial	29
3.5	Funciones de forma lineales del elemento finito de dos nodos	31
3.6	Sistemas de coordenadas: general, global y elemental	35
3.7	Equilibrio y compatibilidad en un nodo común a dos elementos	37

3.8	Voladizo sometido a cargas longitudinales	38
3.9	Representación del esfuerzo axil a lo largo de la barra	40
3.10	Viga sometida una serie de cargas verticales y momentos	40
3.11	Deformación de una viga por flexión	41
3.12	Secciones de la viga antes y después de la deformación	41
3.13	Convenio de signos para la tensión σ_x y el momento flector en la sección	42
3.14	Elemento finito viga de E-B de dos nodos	43
3.15	Funciones de forma del elemento finito de Euler-Bernoulli de dos nodos: polinomios de Hermite	44
3.16	Transformación de coordenadas espaciales a coordenadas naturales para el elemento barra	47
3.17	Funciones de forma del elemento finito de Euler-Bernoulli de dos nodos: polinomios de Hermite	48
3.18	Voladizo sometido a una carga uniforme	52
3.19	Viga en voladizo bajo carga uniforme. Diagrama de momentos exacta y obtenida mediante el MEF	54
3.20	Secciones de la viga antes y después de la deformación	54
3.21	Distribuciones de tensiones tangenciales supuesta en la teoría de Timoshenko (izquierda) y exacta (derecha)	56
3.22	Elemento finito viga de Timoshenko de dos nodos	56
3.23	Funciones de forma lineales N_1 y N_2 del elemento finito de Timoshenko de dos nodos en coordenadas naturales	57
3.24	Voladizo sometido a una carga puntual en el extremo libre	60
3.25	Representación del parámetro ψ en función de la esbeltez λ considerando (línea azul) integración exacta e (línea naranja) integración reducida	62
3.26	(a) Ejemplo de función C^0 . (b) Su primera derivada es integrable, pero (c) no la derivada de orden 2	65
3.27	Funciones de forma de Lagrange del elemento finito de dos nodos	66
3.28	Funciones de forma de Lagrange (a) N_1 , (b) N_2 y (c) N_3 del elemento finito de tres nodos	66
3.29	Estructura sometida a un campo de desplazamientos impuesto	67
3.30	Suma de las funciones de forma lineales N_1 y (b) N_2	68
3.31	Representación de las tensiones en una barra en voladizo discretizada con 4 elementos	69
3.32	Problema 1: viga biempotrada sometida a carga uniforme	71
3.33	Desplazamientos nodales usando la formulación de E-B	79
3.34	(a) Diagrama de esfuerzos cortantes y (b) diagrama de momentos flectores usando la formulación de E-B	79
3.35	Problema 1: pórtico	81
3.36	Problema 2: bancada de ensayos	83
3.37	Problema 3: pórtico a dos aguas	85
3.38	Problema 4: voladizo atirantado	88

4.1	Flujo de trabajo en la resolución de un problema no-lineal	92
4.2	Distribución de tensiones normales σ_y en una placa con agujero sometida a una tracción uniforme $p = 1$ MPa	94
4.3	Evolucion de la deformaciones plasticas ε_y^p en una placa con agujero sometida a una tracción uniforme p	95
4.4	Historia de carga en un análisis no-lineal	96
4.5	Proceso iterativo para encontrar la raíz $f(x) = x^3 - x - 1$.	97
4.6	Modelos de comportamiento de un material	98
4.7	Ley de comportamiento del material	99
4.8	Ley de comportamiento de un material	100
4.9	Ley de comportamiento bilineal de un material	100
4.10	Ciclos de cargas y descargas	101
4.11	Modelo de comportamiento de un material con endurecimiento isotrópico	102
4.12	Modelo de comportamiento de un material con endurecimiento cinemático	103
4.13	Representación del criterio de plastificación de Von-Mises	104
4.14	Evolución del criterio de plastificación de Von-Mises	104
4.15	Algoritmo para el calculo de tensiones en un problema no-lineal	106
4.16	Ley de comportamiento bilineal de un material	107
4.17	Ley de comportamiento	108
4.18	Curva fuerza-desplazamiento de una barra sometida a un estado uniaxial de tensión	110
5.1	Barra articulada sometida a compresión: (a) configuración inicial y (b) situación deformada	116
5.2	Diagrama de estabilidad de un mecanismo sometido a una carga de compresión	117
5.3	Solución no-lineal del problema	118
5.4	Deformada de una columna con extremo libre	119
5.5	Modos de pandeo de una barra en voladizo	120
5.6	Deformada de una columna con extremo libre con excentricidad de la carga	121
5.7	Diagrama de estabilidad de una barra en voladizo con carga excéntrica	122
5.8	Deformada de una columna con extremo libre e imperfecciones geométricas	123
5.9	Diagrama de estabilidad de una barra en voladizo con imperfecciones geométricas	125
5.10	Deformada de la viga-columna	126
5.11	Diagrama de estabilidad de la viga-columna	128
5.12	Problema general de pandeo de una barra	128
5.13	Barras con diferentes condiciones de contorno (de izq. a dcha.): empotrada-libre, apoyada-apoyada, empotrada-empotrada, empotrada-empotrada con deslizamiento horizontal, empotrada-articulada	129

5.14	Longitud equivalente de una barra comprimida con condiciones de contorno (de izq. a dcha.): empotrada-libre, apoyada-apoyada, empotrada-empotrada, empotrada-empotrada con deslizamiento horizontal, empotrada-articulada	131
5.15	Curva de Euler de barras sometidas a compresión de acero S260	132
5.16	Barra sometida una serie de cargas y momentos	132
5.17	Equilibrio de la rebanada en la posición deformada	132
5.18	Funciones de estabilidad del elemento	135
5.19	Elemento Plano con Nudos Rígidos en Coordenadas Locales	136
5.20	Funciones de estabilidad (líneas continuas) y funciones linealizadas (líneas discontinuas) del elemento	137
5.21	Funciones de estabilidad del elemento	138
5.22	Definición de la estructura y esfuerzos	143
6.1	Representación de un sistema de un grado de libertad	147
6.2	Equilibrio de fuerzas en un sistema de un grado de libertad	148
6.3	Influencia de las fuerzas estáticas en la respuesta dinámica de una estructura	149
6.4	Vibración libre no amortiguada de un sistema de un grado de libertad	151
6.5	Vibración libre críticamente amortiguada de un sistema de un grado de libertad	152
6.6	Vibración libre de sistemas de un grado de libertad: subamortiguados, con amortiguamiento crítico y no amortiguado	154
6.7	(a) Evolución temporal y (b) contenido en frecuencia de la aceleración del extremo de una pletina empotrada producida por un desplazamiento inicial $u_0 = 0.01$ m	154
6.8	Comparación de la medida experimental de la aceleración y de la solución del sistema de un grado de libertad del extremo de una pletina empotrada producida por un desplazamiento inicial $u_0 = 0.01$ m	155
6.9	Respuesta de un sistema de un grado de libertad no amortiguado sometido a una carga armónica siendo $\beta = 2/3$	157
6.10	Variación del (a) factor de amplificación dinámico y (b) fase con el amortiguamiento	158
6.11	Variación de la respuesta resonante con el amortiguamiento	160
6.12	Aislamiento de vibraciones para atenuar una fuerza aplicada	160
6.13	Aislamiento de vibraciones para atenuar un desplazamiento de la base	161
6.14	Variación de la transmisibilidad con el amortiguamiento	161
6.15	Mapa de diseño del sistema de aislamiento	163
6.16	Representación de un sistema de un grado de libertad excitado por un desplazamiento de la base	164
6.17	Acelerograma del terremoto de El Centro (1940)	166
6.18	Evolución temporal del desplazamiento de un sistema de un grado de libertad producidos por el terremoto de El Centro (1940)	166

6.19	(a) Espectro elástico de la respuesta, (b) pseudo-velocidad espectral y (c) pseudo-aceleración espectral del terremoto del El Centro (1940) para distintos factores de amortiguamiento	167
6.20	Funciones de intensidad: (a) $I(t) = 1$, (b) trapezoidal: $I(t) = (t/t_{RISE})$, $I(t) = 1$ y $I(t) = (1 - t/t_{END})$, (c) exponencial: $I(t) = a_0(\exp(-\alpha_0 t) - \exp(-\beta_0 t))$ y (d) compuesta: $I(t) = (t/t_{RISE})^{ipow}$, $I(t) = 1$ y $I(t) = \exp(-\alpha_0 t)$	168
6.21	Acelerograma compatible con el espectro del terremoto de El Centro (1940) para $\zeta = 0.02$.	169
6.22	(Línea negra) Espectro elástico de la respuesta del terremoto del El Centro (1940) para $\zeta = 0.02$ y (línea roja) espectro del acelerograma compatible mostrado en la Figura 6.21.	169
7.1	Marson Water Tower (Universidad de Iowa)	171
7.2	Representación de una viga simplemente apoyada. Definición de grados de libertad	172
7.3	Elemento barra: modelo de masas discretas	178
7.4	Elemento barra: modelo de masas discretas	179
7.5	Modos de vibración de vigas biapoyadas y en voladizo	181
7.6	(a) Representación esquemática de una estructura de tres grados de libertad. (b) Modelo equivalente de masas concentradas	185
7.7	Modos de vibración de la edificación	186
7.8	Factor de amortiguamiento modal: (línea continua) modelo de Rayleigh (línea de trazos) proporcional a la matriz de masa y (línea de trazos y puntos) proporcional a la matriz de rigidez	189
7.9	Metodología para la actualización de modelos. Fuente: Inverse modelling of civil engineering structures based on operational modal data. Ph.D Thesis. Anne Teughels. Department of Civil Engineering K.U.Leuven. Promotor: prof.dr.ir. Guido De Roeck.	191
7.10	(a) Función de respuesta a un impulso y (b) respuesta de un sistema de un grado de libertad producida por un escalón de fuerza	197
7.11	Evolución temporal de las coordenada modales de la estructura	199
7.12	Evolución temporal del desplazamiento de la planta superior de la estructura	200
7.13	Espectro de respuesta elástica para $K = 1.3$, $C = 1.6$ y $\zeta = 2\%$	206
7.14	Evolución de la aceleración en un intervalo de tiempo	211
7.15	Evolución temporal del desplazamiento de la planta superior de la estructura: (línea negra) superposición modal y (línea gris) método de integración Newmark- β	214
7.16	Amplitudes máximas de la respuesta de un grado de libertad de una estructura cuando es solicitada por una serie de cargas armónicas	218
7.17	Pares de la transformada de Fourier: (a) Función de respuesta a un impulso y (b) función de respuesta en frecuencia. Longitud de la muestra temporal 207	222

7.18	Pares de la transformada de Fourier: (a) Función de respuesta a un impulso y (b) función de respuesta en frecuencia. Longitud de la muestra temporal $1000T$	223
7.19	Representación de un sistema de un grado de libertad con TMD	224
7.20	(a) Función de respuesta en frecuencia y (b) función de respuesta a un impulso de un sistema de un grado de libertad con TMD	225
8.1	Geometría de la placa	229
8.2	Definición del campo de desplazamientos en una placa	231
8.3	Definición del giro	231
8.4	Deformación de una sección (a) por flexión (ϵ_f) y (b) por cortante (ϵ_c)	233
8.5	Estado tensional en una placa: (a) tensiones normales y (b,c) tensiones tangenciales	233
8.6	Definición de los esfuerzos (a) flectores, (b) torsores y (c) cortantes	235
8.7	Definición de esfuerzos (a) flectores, (b) torsores y (c) cortantes en un elemento diferencial de placa	238
8.8	Descomposición de la rotación de una placa	241
8.9	Flexión de una placa delgada	241
8.10	Condiciones de contorno en una placa: (a) borde empotrado, (b) borde apoyado y (c) borde libre. (d) Cortante efectivo en un borde libre.	245
8.11	Esfuerzos en equilibrio con las fuerzas externas aplicadas en el plano	246
8.12	Elemento finito placa de Kirchhoff de cuatro nodos	250
8.13	Ejemplo de no conformidad	252
8.14	Elemento finito placa de Reissner-Mindlin de cuatro nodos	256
9.1	(a) Capilla Lomas de Cuernavaca y (b) Mercado de Algeciras	272
9.2	Definición de los esfuerzos en una lámina	272
9.3	Geometría de un casquete esférico	275
9.4	Elemento diferencial de una lámina de revolución	275
9.5	Definición de fuerzas en un elemento diferencial de la lámina	276
9.6	Definición de los cosenos directores	277
9.7		288
A.1	Elemento Articulado en 2 Coordenadas Locales	289
A.2	Elemento Articulado en 4 Coordenadas Locales	289
A.3	Elemento Articulado en Coordenadas Globales	290
A.4	Elemento Plano con Nudos Rígidos en Coordenadas Locales	290
A.5	Elemento Plano con Nudos Rígidos en Coordenadas Globales	291
C.1	Elemento Articulado en 4 Coordenadas Locales	295
C.2	Elemento Articulado en Coordenadas Globales	296
C.3	Elemento Plano con Nudos Rígidos en Coordenadas Locales	296
C.4	Elemento Plano con Nudos Rígidos en Coordenadas Globales	297

Índice de Tablas

3.1	Pesos y puntos de Gauss-Legendre para distintos ordenes n de integración	49
4.1	Solución $f(x) = x^3 - x - 1$	97
4.2	Ley de comportamiento	108
7.1	Factor de participación modal (masa total $M_T = 16414 \text{ kg}$)	187
7.2	Valores discretos de la pseudo-aceleración espectral en función de la frecuencia y del periodo	210

Índice de Códigos

2.1	Listado de comandos de ANSYS para resolver calcular el estado tensional de una laja con un agujero	24
3.1	Listado de comandos de MATLAB: datos de entrada	71
3.2	Listado de comandos de MATLAB: matriz de rigidez y vector de fuerzas elemental	72
3.3	Listado de comandos de MATLAB: matriz de giro	73
3.4	Listado de comandos de MATLAB: cálculo y ensamblaje del sistema de ecuaciones de la estructura	74
3.5	Listado de comandos de MATLAB: matriz de localización	74
3.6	Listado de comandos de MATLAB: solución del sistema de ecuaciones	75
3.7	Listado de comandos de MATLAB: esfuerzos en el elemento	76
3.8	Listado de comandos de MATLAB: cálculo de esfuerzos	76
3.9	Listado de comandos de MATLAB: programa de elementos finitos	77
3.10	Listado de comandos de ANSYS para la resolución del Problema 1 usando la formulación de E-B (BEAM3)	78
3.11	Listado de comandos de MATLAB: datos de entrada del problema 1	80
3.12	Listado de comandos de ANSYS para la resolución del Problema 1 usando la formulación de E-B (BEAM3)	81
3.13	Listado de comandos de MATLAB: datos de entrada del problema 2	83
3.14	Listado de comandos de ANSYS para la resolución del Problema 2 usando la formulación de E-B (BEAM3)	83
3.15	Listado de comandos de MATLAB: datos de entrada del problema 3	85
3.16	Listado de comandos de ANSYS para la resolución del Problema 3 usando la formulación de E-B (BEAM3)	86
3.17	Listado de comandos de MATLAB: datos de entrada del problema 4	88
3.18	Listado de comandos de ANSYS para la resolución del Problema 5 usando la formulación de E-B (BEAM3)	89

4.1	Implementación del método Newton-Raphson en MATLAB para encontrar la raíz $f(x) = x^3 - x - 1$	97
4.2	Listado de comandos de ANSYS para el análisis no lineal de la barra	111
5.1	Listado de comandos de MATLAB para calcular la solución del sistema no-lineal de la Figura 5.1	117
6.1	Listado de comandos de MATLAB para resolver la integral de Duhamel	167
7.1	Listado de comandos de ANSYS para realizar el análisis modal de una edificación de tres plantas	187
7.2	Función <code>fri.m</code> (MATLAB) para calcular la Función de Respuesta un Impulso de un sistema de un grado de libertad	196
7.3	Listado de comandos de MATLAB para calcular la función de respuesta al impulso y la FRF de un sistema de un grado de libertad	197
7.4	Listado de comandos de ANSYS para realizar el análisis dinámico mediante superposición modal de una edificación de tres plantas	199
7.5	Listado de comandos de MATLAB para obtener el espectro de respuesta elástica según la NCSE-02	205
7.6	Listado de comandos de MATLAB para obtener el espectro de respuesta elástica según la NCSP-07	208
7.7	Listado de comandos de Ansys para el análisis modal espectral de una estructura	209
7.8	Listado de comandos de MATLAB para calcular la la solución del Ejemplo 7.5.2 mediante el método Newmark- β	214
7.9	Listado de comandos de ANSYS para calcular la la solución del Ejemplo 7.5.2 mediante el método Newmark- β	215
7.10	Listado de comandos de MATLAB para calcular la función de respuesta al impulso y la FRF de un sistema de un grado de libertad	223
7.11	Listado de comandos de MATLAB para calcular la FRF de un Amortiguador de Masa Sintonizado	225
7.12	Listado de comandos de ANSYS para calcular la FRF de un Amortiguador de Masa Sintonizado	226
8.1	Listado de comando de ANSYS para el análisis de una placa simplemente apoyada de dimensiones $a \times b$	253
8.2	Listado de comando de MATLAB para el análisis de una placa cuadrada apoyada en los bordes	259
8.3	Listado de comando de Ansys para el análisis de una placa cuadrada con diferentes condiciones de contorno	259
8.4	Listado de comando de ANSYS para el análisis de una placa cuadrada apoyada sobre vigas	261
9.1	Listado de comandos de Ansys para el análisis de un cilindro sometido a presión interna	286

9.2	Listado de comandos de Ansys para el análisis de un cilindro sometido a presión interna utilizando elementos axisimétricos	287
-----	--	-----

Bibliografía

- [1] A.H. Barbat and J.M. Canet, *Estructuras sometidas a acciones sísmicas: Cálculo por ordenador*, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, 1994.
- [2] K.J. Bathe, *Finite element procedures*, Prentice Hall, New Jersey, 1996.
- [3] D. Billington, *Thin shell concrete structures*, McGraw-Hill, Inc. New York, 1965.
- [4] A.K. Chopra, *Dynamics of structures: theory and applications to earthquake engineering*, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall International, 2013.
- [5] Ministerio de Fomento. Gobierno de España, *Norma de construcción sismorresistente: Puentes (ncsp-07)*, Ministerio de Fomento. Gobierno de España, 2008.
- [6] ———, *Norma de construcción sismorresistente: Parte general y edificación (ncse-02)*, Ministerio de Fomento. Gobierno de España, 2009.
- [7] E. Oñate, *Cálculo de estructuras por el método de los elementos finitos. Análisis estático lineal*, 2 ed., CIMNE, 1995.
- [8] J.J.C. Remmers R. de Borst, M.A. Crisfield and C.V. Verhoosel, *Nonlinear finite element analysis of solids and structures*, Wiley, 2012.
- [9] J. Penzien R.W. Clough, *Dynamics of structures*, 3 ed., Computers & Structures, 2003.

